Übung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie'

Aufgabe W3 (Lot, Mitttelsenkrechte Kongruenzsatz)

(i) Zeigen Sie: Besitzt ein Dreieck der euklidischen Ebene zwei kongruente Winkel (z.B. $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$) , so ist es gleichschenklig. (Umkehrung der Anmerkung (ii) nach (9.3) des Skripts.)

Lösungshinweis: Betrachten Sie auch das Lot von C auf die Seite AB!

(ii) Beweisen Sie: Die Diagonalen eines Rhombus (Raute, Viereck mit 4 gleich langen Seiten) stehen aufeinander senkrecht, halbieren sich und die Winkel des Rhombus!

(Vergl.Sie auch mit Aufgabe C3 !)

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie benutzen, dass in der euklidischen Ebene die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ genau aus den Punkten besteht, die den gleichen Abstand zu A und B haben.

Lösungsskizze

(i) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$. Ferner sei CD das Lot von C auf AB (mit $D \in AB$). Dann gilt laut Konstruktion $\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle BDC$ und nach Voraussetzung $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DAC$ und folglich auch $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BCD$. Wegen $\overline{CD} \equiv \overline{CD}$ folgt nach Kongruenzsatz WSW die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BDC$. Insbesondere gilt $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Also ist $\triangle ABC$ gleichschenklig.

(ii) Wegen der gleichlangen Seiten des Rhombus ist jede Diagonale des Rhombus die Mittelsenkrechte der anderen Diagonalen. Die Winkelhalbierung folgt aus der Kongruenz der Teildreiecke.