1.Teil der Modulprüfung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie' am 27.4.2018

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte (innerhalb von 30 Minuten) folgende Aufgabe!
Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten (60-minütigen) Teil der Modulprüfung angerechnet.

Aufgabe 1 (Geradenschnitte, affine Geometrie, Translationen)

(a) Seien F eine Ebene in einem 3-dim affinen Raum $A = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ und $g_1 \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $g_1 \subseteq F$, ferner $P_1 \in \mathcal{P}$ mit $P_1 \in F \setminus g_1$.

Bezeichne $[P_1]_F$ die Menge der Geraden durch P_1 in F, also

$$[P_1]_F := \{h \in \mathcal{G} \mid P_1 \in h \wedge h \subseteq F\}.$$

Begründen Sie:

$$\Big|[P_1]_F\Big| = |g_1| + 1.$$

Lösungshinweis: Entscheidend für ein $h \in [P_1]_F$ ist, ob h die Gerade g_1 schneidet oder nicht.

(b) Seien $\mathcal{A} = \mathrm{AG}(K^3)$ mit $K = \mathrm{GF}(p)$, p prim, und h Gerade von $\mathcal{A}$. Begründen Sie: $|h| = p$.

(c) Seien $(T, \circ)$ die Gruppe der Translationen eines 3-dim affinen Raumes und $\tau_1, \tau_2 \in T$ Translationen mit verschiedenen Richtungen. Zeigen Sie:

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1.$$

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie die 'Parallelogramm-Konstruktion' der Bilder einer Translation und die Abgeschlossenheit von $(T, \circ)$ benutzen; ebenfalls verwenden dürfen Sie, wodurch eine Translation schon festgelegt ist.

Lösungsskizze:

(a) (3,5 Punkte)
Sei $h \in [P_1]_F$ und $h \nparallel g_1$. Da $g_1, h \subseteq F$, folgt aus $h \nparallel g_1$ und der Definition der Parallelität von Gerade, dass gilt:

$$\text{Es exisitert genau ein Punkt} \quad Q \in g_1 \text{ mit } \{Q\} = h \cap g_1.$$

Ist umgekehrt $Q \in g_1$, dann ist (wegen $Q \in g_1 \subseteq F$ und $P_1 \in F$) die Gerade $h := P_1Q$ eine Gerade aus F und damit aus $[P_1]_F$.

Damit definiert jeder Punkt von g_1 genau eine Gerade h mit $P_1 \in h$ und $h \nparallel g_1$ und umgekehrt. Mit der eindeutig bestimmten Parallelen h_0 von g_1 durch P_1 gilt dann

$$\Big|[P_1]_F \setminus \{h_0\}\Big| = |g_1| \quad \text{und somit} \quad |[P_1]_F| = |g_1| + 1.$$

(b) (2,5 Punkte)
Jede Gerade g in $\mathcal{A}$ ist laut Definition ein 1-dim affiner Unterraum von K^3, also von der Form $g = aK + b$ (mit $a, b \in K^3, a \neq 0$). Daher ist

$$|g| = |aK + b| = |K|.$$

Mit $K = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ folgt $|g| = p$.

(c) (4 Punkte)
Seien $\tau_1 = \tau_{OP_1}$ und $\tau_2 = \tau_{OP_2}$. Wegen der verschiedenen Richtungen von τ_1 und τ_2 gilt $OP_1 \nparallel OP_2$ und wegen $OP_1, OP_2 \subseteq F := OP_1P_2$ existiert der Schnittpunkt S der Parallelen zu OP_2 durch P_1 mit der Parallelen zu OP_1 durch P_2 (Parallelogrammkonstruktion). Bei dieser Konstruktion gilt $S = \tau_1(P_2)$ und $S = \tau_2(P_1)$.Darau folgt:

$$(*) \quad \tau_2 \circ \tau_1(O) = \tau_2(P_1) = S = \tau_1(P_2) = \tau_1 \circ \tau_2(O).$$

Da T abgeschlossen bzgl. $\circ$ ist, folgt $\tau_1 \circ \tau_2, \tau_2 \circ \tau_1 \in T$. Wegen der Eindeutigkeit einer Translation bei gegebenem Punkt- und Bildpunkt-Paar ergibt sich die Gleichheit von $\tau_1 \circ \tau_2$ und $\tau_2 \circ \tau_1$.
Alternative Argumentation nach $(*)$*:*
Da die Beziehung $(*)$ für alle $O \in \mathcal{P}$ gilt, folgt $\tau_1 \circ \tau_2$ und $\tau_2 \circ \tau_1$. $\square$