2.Teil der Modulprüfung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie' am 15.6.2018

Name, Vorname	Artikel-Nr. oder Kennzeichen	Punkte Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4

Bearbeiten Sie bitte zwei der folgenden drei Aufgaben!
Falls Sie drei Aufgaben bearbeitet haben, kennzeichnen Sie bitte, welche der Aufgaben gewertet werden sollen!
Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**. (Auch Fehler in der Darstellung können sich negativ auswirken!)
Für jede vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Die erzielte Punktezahl des 1.Klausurteils wird auf den zweiten Teil der Modulprüfung angerechnet. Insgesamt sind damit 30 Punkte möglich.

Aufgabe 2 (Wechselwinkel, Kongruenzsatz)
Sei $\mathcal{R}$ ein nicht-ausgeartetes Viereck in der reellen euklidischen Ebene mit Ecken A, B, C, D, dessen gegen überliegende Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ kongruent und parallel sind. Zeigen Sie für die beiden anderen Seiten $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ und $AD \parallel BC$ auf folgendem Weg:

(i) Begründen Sie (unter Betrachtung der Diagonalen AC) die Kongruenz $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$!

(ii) Warum gilt $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$?

(iii) Was folgt aus (ii) für $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sowie für $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle BCA$? (Ohne Beweis!)

(iv) Begründen Sie $AD \parallel BC$ mittels (iii)!

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen u.a. benutzt werden: Eigenschaften von Wechselwinkeln und die Kongruenzsätze.

Aufgabe 3 (Außenwinkel, gleichschenkliges Dreieck)
In der reellen euklidischen Ebene liegt der größeren Seite eines nicht-ausgearteten Dreiecks der größere Winkel gegenüber. Beweisen Sie dies (ohne Bezug auf die entsprechende Übungsaufgabe aus Skript bzw. Vorlesung), und zwar wie folgt: Sei $\triangle ABC$ das gegebene Dreieck und o.B.d.A. $|\overline{AB}| > |\overline{BC}|$.

Begründen Sie:

(i) Es lässt sich ein Punkt P so auf BC^+ bestimmen, dass ein gleichschenkliges Dreieck entsteht.

(ii) Es gilt $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle APC$.

(iii) Ferner ist der (Außen-Winkel) $\sphericalangle ACB$ größer als der (Innen-) Winkel $\sphericalangle APC$.

(iv) C liegt im Innern von $\overline{BP}$ und $|\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle BAP|$.

(v) Kombinieren Sie (ii), (iii) und (iv) und zeigen Sie schließlich $|\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle ACB|$.

Lösungshinweis: Die Kongruenzsätze und andere Sätze über Innen- bzw. Außenwinkel bei Dreiecken dürfen Sie unbewiesen benutzen, z.B. über Basiswinkel von gleichschenkligen Dreiecken

Aufgabe 4 (Gleichschenklige bzw. rechtwinklige Dreiecke, Seitenhalbierende, Höhen, Kongruenzsätze)
Sei $\triangle ABC$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck der reellen euklidischen Ebene. Zeigen Sie:

1. Ist die Seitenhalbierende s_{AB} der Seite $\overline{AB}$ gleich der Höhe h_C durch C, dann ist $\triangle ABC$ gleichschenklig.
   Lösungshinweis: Sei F der Fußpunkt der Höhe h_C. Betrachten Sie die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$! Wie kann man dann den Kongruenzsatz SWS anwenden?

2. Ist $\triangle ABC$ gleichschenklig, dann liegt die Seitenhalbierende s_{AB} auf der Höhe h_C.
   Lösungshinweis: Wie kann man den Kongruenzsatz SsW auf die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ anwenden? (Dabei bezeichne wieder F den Fußpunkt der Höhe h_C !)

Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie Aussagen über gleichschenklige Dreiecke verwenden und, dass die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks größer ist als die jeder der Katheten.

Lösungsskizzen:
ad Aufgabe 2

(i) Sei $\mathcal{R}$ das gegebene Viereck und AC eine der Diagonalen. Die Winkel $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle BAC$ sind dann Wechselwinkel an parallelen Geraden; sie sind damit nach einem Satz aus der Vorlesung kongruent.

(ii) Die Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle CAB$ haben die gemeinsame Seite $\overline{AC}$ und (laut Voraussetzung) kongruente Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$; nach (i) sind die eingeschlossenen Winkel kongruent. Aus dem Kongruenzsatz SWS folgt dann $\triangle ACD \equiv \triangle CAB$.

(iii) Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt die Kongruenz entsprechender Seiten bzw. Winkel, also $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ (also die erste zu zeigende Aussage) und $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$.

(iv) Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle BCA$ sind kongruente Wechselwinkel an AC, weswegen (nach einem Satz der Euklidischen Geometrie) die freien Schenkel AD^+ und CB^+ parallel sind; dies ist die zweite Aussage, die zu beweisen war.

ad Aufgabe 3 (vgl. Skript-Aufgabe 59 b)

(i) Man bestimmt P so auf BC^+, dass $|\overline{BP}| = |\overline{AB}|$; dies ist nach dem Axiom des Streckenabtragens möglich. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist dann gleichschenklig.

(ii) Die Winkel $\sphericalangle BAP$ und $\sphericalangle APC = \sphericalangle APB$ sind als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABP$ (laut einem Satz über gleichschenklige Dreiecke) kongruent.

(iii) $\sphericalangle ACB$ ist größer als $\sphericalangle APC$, da (bezogen auf $\triangle APC$) jeder Außenwinkel größer ist als jeder nicht-anliegende Innenwinkel. (Vgl. Skript-Aufgabe 59a !)

(iv) C liegt im Inneren von $\overline{PB}$, da $|\overline{PB}| = |\overline{AB}| > |\overline{BC}|$ (laut Voraussetzung) ist und $P \in BC^+$; folglich ist AC^+ im Innern von $\sphericalangle BAP$. Es folgt $|\sphericalangle BAC| < |\sphericalangle BAP|$. (S. Aufgabe B3)

(v) $|\sphericalangle BAC| \overset{(iv)}{<} |\sphericalangle BAP| \overset{(ii)}{=} |\sphericalangle APC| \overset{(iii)}{<} |\sphericalangle ACB|$.

ad Aufgabe 4

1. Ist F der Fußpunkt der Höhe h_C, so sind wegen Gleichheit von Höhe und Seitenhalbierende die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{FB}$ kongrunet. Außerdem sind die Winkel $\sphericalangle AFC$ und $\sphericalangle BFC$ kongruent (rechte Winkel). Die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ mit der gemeinsamen Seite $\overline{FC}$ sind daher nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, woraus dann die Kongruenz der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ folgt.

2. Ist umgekehrt ΔABC gleichschenklig mit $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, so liegt nach einem Satz C auf der Mittelsenkrechten m_{AB}; damit ist

$$h_c = m_{AB} = s_c.$$

   Alternativ: Ist $\triangle ABC$ gleichschenklig und h_C die Höhe auf AB mit Fußpunkt F, so, "stimmen" die beiden Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle BFC$ in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der Hypotenuse "überein". Da die Hypotenuse in jedem rechtwinkligen Dreieck größer ist als jede Kathete, sind die beiden Dreiecke nach dem Kongruenzsatz SsW kongruent, woraus $\overline{AF} \equiv \overline{FB}$ folgt; damit liegt F zwischen A und B, und h_C ist auch die Seitenhalbierende.