Nachprüfung zum 1.Teil der Modulprüfung zum Lehrkräfteweiterbildungskurs 'Geometrie' am 15.6.2018

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte (innerhalb von 30 Minuten) folgende Aufgabe!
Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten (60-minütigen) Teil der Modulprüfung angerechnet.

Aufgabe 1 (Schnitte von Geraden und Ebenen, Parallelität, affine Geometrie, Translation)

(a) Seien E eine Ebene in einem 3-dim affinen Raum $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ und $h_1 \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $h_1 \subseteq E$, ferner

$$S := \{g \in \mathcal{G} \mid g \subseteq E \wedge g \parallel h_1\}$$

die Parallelenschar aller Geraden von E, die parallel zu h_1 sind.
Begründen Sie:

$$|S| = |h_1|.$$

Lösungshinweis: Wählen Sie eine Gerade f_1 von E mit $f_1 \notin S$! Die Gleichheit der Mächtigkeiten der Geraden von E dürfen Sie unbewiesen voraussetzen.

(b) Sei $\mathcal{A} = \mathrm{AG}(K^3)$ mit $K = \mathrm{GF}(q)$, q Primzahlpotenz, und sei E eine Ebene von $\mathcal{A}$. Bestimmen Sie $|E|$!

(c) Seien $(T, \circ)$ die Gruppe der Translationen eines 3-dim affinen Raumes $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ und $\tau \in T \setminus \{\mathrm{id}_{\mathcal{P}}\}$ nicht-triviale Translation! Zeigen Sie (ohne Verwendung dieser Tatsache bzw. der Parallelgrammkonstruktion aus der Vorlesung bzw. dem Skript):

$$\tau \quad \text{lässt alle Spuren} \quad P\tau(P) \quad (\text{mit} \quad P \in \mathcal{P}) \quad \text{fix.}$$

Lösungshinweis: Ohne Beweis dürfen Sie andere Eigenschaften von Translationen unbewiesen verwenden.

Lösungsskizze:

(a) Es existiert eine Gerade f_1 mit $f_1 \subseteq E$ und $f_1 \nparallel h_1$ (dies ist z.B. mittels der Geraden- und Ebenen-Grundsätze einzusehen). Wegen der Transitivität der Parallelitätsrelation gilt $f_1 \nparallel g$ für alle $g \in S$. Damit erhält man $|f_1 \cap g| = 1$ für alle $g \in S$.

Umgekehrt gehört nach dem Parallelenaxiom zu jedem Punkt $P \in f_1$ genau eine Gerade $g \in S$ mit $P \in g$.

Mit $|f_1| = |h_1|$ folgt die Behauptung: $|S| = |f_1| = |h_1|$.

(b) Jede Ebene E in $\mathcal{A}$ ist laut Definition ein 2-dim affiner Unterraum von K^3, also von der Form

$$E = \{p + a\lambda + b\mu \mid \lambda, \mu \in K\}$$

(mit $p, a, b \in K^3, \quad a, b$ linear unabhängig).
Da zu jedem Punkt von E genau ein Paar $(\lambda, \mu) \in K^2$ gehört, gilt

$$|E| = |K^2| = q^2.$$

(c) Laut Definition von Dehnungen gilt $P\tau(P) \parallel \tau(P)\tau^2(P)$ für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$.

Gemäß der Definition der Parallelität von Geraden sind parallele nicht-disjunkte Geraden einer Ebene gleich, also:

Wegen $\tau(P) \in (P\tau(P) \cap \tau(P)\tau^2(P))$ folgt

$$P\tau(P) = \tau(P)\tau^2(P) = \tau(P\tau(P)) \text{ für jeden Punkt } P \in \mathcal{P}.$$

τ lässt also die Spur $P\tau(P)$ für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ fest.