1.Teil der Modulprüfung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II' am 28.4.2017

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Punkte für Aufg.1

Bearbeiten Sie bitte folgende Aufgabe!
Zur vollständigen Lösung gehört auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Für die vollständig gelöste Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte; die erzielte Punktezahl wird auf den zweiten Teil der Modulprüfung angerechnet.

Aufgabe 1 (Eigenwerte, Eigenvektoren)

(i) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \; !$$

(ii) Geben Sie ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms, aber mit kurzer Begründung, den Eigenwert und den Eigenraum der folgenden Matrix an:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)} \; !$$

(iii) Seien A und C zwei $n \times n-$ Matrizen über dem Körper K, und sei $v \in K^{(n,1)}$ ein Eigenvektor sowohl von A als auch von C, evtl. zu verschiedenen Eigenwerten! Zeigen Sie, dass dann v auch Eigenvektor von $A + C$ ist!
Lösungshinweis: Was bedeutet es, dass v Eigenvektor von A ist, was, dass v Eigenvektor von C ist? Betrachten Sie $(A + C)v$ und benutzen Sie Gesetze des Rechnens mit Matrizen!

(iv) Welche Vektoren sind nach (i) und (ii) Eigenvektoren sowohl von A_1 als auch von C_1?

(v) Wenden Sie (iii) und (iv) auf die Matrix $D_1 := A_1 + C_1$ zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume von D_1 an!

Lösungsskizze:

(i) Wir berechnen das charakteristische Polynom von A_1:

$$\chi_{A_1}(x) = \det(A_1 - xE_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 1 = x^2 - 2x = x(x-2).$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte von A_1 (als Nullstellen von χ_{A_1}):

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2.$$

Die Eigenräume zu λ_1 bzw. λ_2 sind die Lösungsräume der homogenen linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c+d \\ c+d \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ und damit

$$\operatorname{Eig}(A_1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \operatorname{Eig}(A_1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

PROBE nicht vergessen!

Alternativ kann man die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ erraten und bei einer Probe auch die Eigenwerte bestimmen.

(ii) Als Diagonalmatrix hat C_1 die Diagonalelemente als Eigenwerte μ_1 und μ_2; also gilt $\mu_1 = \mu_2 = -1$. Aus gleichem Grund sind die Einheitsvektoren e_1 und e_2 Eigenvektoren und damit

$$\operatorname{Eig}(C_1, -1) = \mathbb{R}^{(2,1)}.$$

Alternativ:
Wegen $C_1 = -E_2$ ist -1 zweifacher Eigenwert und $\operatorname{Eig}(C_1, -1) = \mathbb{R}^{(2,1)}$.
Weitere Alternative:
Das Produkt mit den kanonischen Basisverktoren liefert den Eigenwert und den Eigenraum:
$A \cdot e_i = (-1)e_i$ für $i = 1, 2$ ist -1 Eigenwert und $\operatorname{Eig}(C_1, -1) = \mathbb{R}^{(2,1)}$ der Eigenraum. (Anmerkung: Punktspiegelung!)

(iii) Seien λ Eigenwert von A und μ Eigenwert von C, jeweils zum Eigenvektor v. Dann gilt $Av = \lambda v$ und $Cv = \mu v$. Es folgt:

$$(A + C)v = Av + Cv = \lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v.$$

Es ist also v auch Eigenvektor der Matrix $A + C$ zum Eigenwert $\lambda + \mu$.

(iv) Nach (i) und (ii) ist jedes Element ungleich 0 von $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ sowohl Eigenvektor von A_1 mit Eigenwert 0 als auch von C_1 mit Eigenwert -1.

Analog ist jedes Element aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sowohl Eigenvektor von A_1 mit Eigenwert 2 als auch von C_1 mit Eigenwert -1.

(v) Nach (iii) und (iv) ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ enthalten im Eigenraum von

$$D_1 = A_1 + C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $0 + (-1)$; analog ist (wieder nach (iii) und (iv)) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ enthalten im Eigenraum von $D_1 = A_1 + C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $-1 + 2$.

Aus Dimensionsgründen ergibt sich so:

$$\mathrm{Eig}(D_1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}(D_1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$