Modulprüfung 2.Teil zum Lehrerweiterbildungskurs 'Lineare Algebra /Analytische Geometrie II' am 30.6.2017

Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1 aus Teil 1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note
		X					
Punkte							

Bearbeiten Sie bitte zwei der drei folgenden Aufgaben! Falls Sie alle drei Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche zwei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Das Resultat der 1.Teilklausur (Aufgabe 1) wird übernommen.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 2 (Diagonalähnlichkeit)
Welche der beiden folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ sind diagonalähnlich? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne die Eigenräume explizit zu berechnen!

$$\text{(i)} \quad A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise:

Zu (i) und (ii) Die in der Vorlesung behandelten Kriterien für die Diagonalähnlichkeit dürfen unbewiesen benutzt werden.

zu (ii) Unbewiesen dürfen Sie benutzen, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

Aufgabe 3 (Skalarprodukt, Norm, Orthogonalität)
Gibt es im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt Φ derart, dass gilt:

$$(*) \qquad ||(1,0)||_\Phi = 1 \ \wedge \ ||(-1,1)||_\Phi = 1 \ \wedge \ (1,0) \perp_\Phi (-1,1) \ ?$$

Bestimmen Sie zunächst eine Fundamentalmatrix der betreffenden symmetrischen Bilinearform. Ist diese positiv definit?

Aufgabe 4 (Orthogonaler Automorphismus, Orthogonalraum)
Sei (V, Φ) ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, also V ein $\mathbb{R}-$Vektorraum mit endlicher Basis und Φ Skalarprodukt auf V.

1. Seien dabei $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ und $B = (b_1, b_2)$ eine Orthonormalbasis von (V, Φ). Sind folgende Abbildungen f_i mit Matrix $M_i = M_B^B(f_i)$ (für $i = 1, 2$) orthogonale Automorphismen (Isometrien) von (V, Φ)? Begründen Sie Ihre Antworten!

   $$(i)\;\; M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ii)\;\; M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Lösungshinweis:
   Ohne Beweis dürfen Sie Eigenschaften der darstellenden Matrix eines orthogonalen Automorphismus benutzten.

2. Seien f ein orthogonaler Automorphismus von (V, Φ) und W ein $f-$invarianter Unterraum von V, gelte also $f(W) = W$.
   Zeigen Sie, dass der Orthogonalraum von W ebenfalls $f-$invariant ist, also $f(W^\perp) = W^\perp$ gilt!
   Lösungshinweis:
   Betrachten Sie $\Phi(f(v), w)$ für $v \in W^\perp$ und $w = f(w') \in W$!
   Beachten Sie, dass f biljektiv auf V operiert!

Lösungsskizzen:

Zu Aufgabe 2

(i) Das charakteristische Polynom von A_1, nämlich χ_{A_1} mit

$$\chi_{A_1}(X) = \det(A_1 - XE_3) = \begin{pmatrix} -X & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} = (2-X)(X^2+1),$$

zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren. Nach dem ensprechenden in der Vorlesung behandelten Kriterium für die Diagonähnlichkeit ist damit A_1 <u>nicht</u> diagonalähnlich.

(ii) Das charakteristische Polynom von A_2, nämlich χ_{A_2} mit

$$\chi_{A_2}(X) = \det(A_2 - XE_3) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-1)$$
$$= -(X-2)(X-1)(X+1)$$

zerfällt über $\mathbb{R}$ in drei verschiedene Linearfaktoren. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, können die drei Eigenräume (im 3−dimensionalen $\mathbb{R}^3$) jeweils höchstens und damit genau die Dimension 1 haben. Algebraische und geometrische Vielfachheit der Eigenwerte stimmen also überein. Da, wie gesehen, χ_{A_2} in Linearfaktoren zerfällt, ist deswegen nach dem ensprechenden in der Vorlesung behandelten Kriterium für die Diagonähnlichkeit die Matrix A_2 diagonalähnlich.

Alternativ kann man auch mit der Tatsache argumentieren, dass hier $-\chi_{A_2}$ auch das Minimalpolynom von A_2 ist und in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Zu Aufgabe 3

Ein Skalarprodukt Φ auf $\mathbb{R}^{(2,1)}$ hat (bezüglich der kanonischen Basis) die Koordinatendarstellung

$$\Phi\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

da es sich bei Φ in $\mathbb{R}$ um eine symmetrische Bilinearform handelt. Wir setzen die gegebenen Bedingungen in die Gleichung ein und bekommen

$$1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \Longleftrightarrow a = 1,$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + b \Longleftrightarrow b = 1,$$

$$1^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c - 1 \Longleftrightarrow c = 2.$$

Als Fundamentalmatrix eines Skalarprodukts bzgl. der kanonischen Basis kommt also höchstens die Matrix $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in Frage. (Probe ?) Zu zeigen bleibt, dass M_1 positiv definit ist. Es gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0,$$

sowie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

Also ist M_1 positiv definit, und es gibt ein Skalarprodukt der geforderten Eigenschaften.

Als *Alternativlösung* hätte man auch die Basis $B = (b_1, b_2) = \big((1,0), (-1,1)\big)$ wählen können, bzgl. der die Fundamentalmatrix die Form

$$M_2 = M_B(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(b_1, b_1) & \Phi(b_1, b_2) \\ \Phi(b_2, b_1) & \Phi(b_2, b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat. Dass M_2 und damit Φ positiv definit ist, sieht man sofort. (Die positive Definitheit von Φ ist ja unabhängig von der Basis.)

Zu Aufgabe[1] 4

1. Bezüglich einer Orthonormalbasis werden orthogonale Automorphismen genau durch orthogonale Matrizen dargestellt; dies sind Matrizen mit $A \cdot A^T = E_n$; insbesondere sind solche Matrizen regulär (wegen $(\det A)^2 = 1 \neq 0$).

[1] Aufgabe frei nach Teilen von Aufgabe 13.24 aus S.Lipschutz, Linear Algebra; Schaum's outline series 1968, 1974.

(i) M_1 ist singulär, also f_1 kein Automorphismus.

(ii) $M_2 \cdot M_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \neq E_2$. Also ist auch f_2 keine Isometrie.

Alternativ: Wegen $|\det M_2| \neq 1$ ist f_2 nicht orthogonal.

Anmerkung. Erst f_3 mit Matrix

$$M_3 := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ist wegen $M_3 \cdot M_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$ orthogonaler Automorphismus.

2. Definitionsgemäß ist $W^\perp = \{v \in V \mid \Phi(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in W\}$. Wegen $f(W) = W$ existiert zu jedem $w \in W$ ein $w' \in W$ mit $f(w') = w$. Für $f(v)$ mit $v \in W^\perp$ gilt wegen $\Phi(v, w') = 0$ für $v \in W^\perp$ und $w' \in W$ sowie

$$\Phi(f(v_1), f(v_2)) = \Phi(v_1, v_2) \text{ für alle } v_1, v_2 \in V, w \in W$$

damit

$$\Phi(f(v), w) = \Phi(f(v), f(w')) = \Phi(v, w') = 0$$

für alle $w \in W$ und $v \in W^\perp$. Mit $f(W^\perp) \subseteq W^\perp$ ergibt sich die Behauptung aus Dimensionsgründen: f ist ein Automorphismus von V, und damit gilt $\dim_{\mathbb{R}} f(W^\perp) = \dim_{\mathbb{R}}(W^\perp)$, folglich $f(W^\perp) = W^\perp$.