Name, Vorname	Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Σ	Note

Klausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 4Q
'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'
SoSe 2016

Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben!
Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die stilistisch einweindfreie Darstellung des Gedankenganges.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte, also maximal 30 Punkte.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Aufgabe 1 (Matrixdarstelllung, inverse Matrix, Determinante)
Seien V ein 3−dimensionaler reeller Vektorraum, ferner $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= b_2 - b_3 \\ f(b_2) &= -b_1 + b_2 \\ f(b_3) &= b_1 - b_2 + b_3 \end{aligned}$$

(i) Geben Sie (ohne Begründung) die Matrix $A = M_B^B(f)$ an!
Hinweis: Falls Sie sich nicht sicher sind, ob Sie die richtige Matrix angegeben haben, wählen Sie für die weiteren Aufgabenteile statt A die Matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und statt f die zu A_1 gehörende lineare Abbildung f_1 !

(ii) Zeigen Sie: $\det(A) \neq 0$.

(iii) Berechnen Sie A^{-1}

(iv) Welchen Wert hat $\det(A^{-1})$?

(v) Geben Sie eine kurze Begründung dafür an, dass f invertierbar ist!

(vi) Berechnen Sie $f^{-1}(b_2)$.

Aufgabe 2
(Eigenwert, charakteristisches Polynom, Eigenbasis, Diagonalisierbarkeit)
Sei $A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ eine reelle Matrix mit $t \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_t !

(b) Bestimmen Sie die (reellen!) Eigenwerte von A_t in Abhängigkeit von t !

(c) Existiert für $t > 0$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren? (Wenn ja, so müssen Sie diese nicht angeben!)

(d) Berechnen Sie im Falle $t \leq 0$ den zu A_t gehörenden Eigenraum!

(e) Ist A_t mit $t \leq 0$ diagonalähnlich?

Aufgabe 3 (Eigenwerte–theoretisch)
Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus von V. Sei ferner A eine $n \times n-$Matrix über K ! Zeigen Sie:

1. Ist f ein Automorphismus und λ ein Eigenwert von f, so gilt: $\lambda \neq 0$.

2. Ist f ein Automorphismus und v ein Eigenvektor von f, so ist v auch Eigenvektor von f^{-1}.
   Lösungshinweis: Wenden Sie f^{-1} auf die Gleichung $f(v) = \lambda v$ an! Ohne Beweis dürfen Sie benutzen, dass f^{-1} ebenfalls linear ist.

3. Gilt $A^T \cdot A = E_n$, und ist λ Eigenwert von A, so ist $\lambda \neq 0$ und $\frac{1}{\lambda}$ ebenfalls Eigenwert von A.
   Lösungshinweis: Betrachten Sie $E_n v$ zum Eigenvektor v von A zum Eigenwert λ . Ohne Beweis dürfen Sie folgenden Satz verwenden: Die (quadratischen) Matrizen A und A^T besitzen die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 4 (orthogonale Abbildung, Skalarprodukt)

1. Sei (V, Φ) ein euklidischer Vektorraum (also reeller Vektorraum mit Skalarprodukt Φ); sei ferner f ein Automorphismus von V, der mit dem Skalarprodukt Φ verträglich ist (, also ein SKP-Automorphismus von (V, Φ))! . Zeigen Sie, dass f die Orthogonalität von Vektoren erhält, dass also für alle $v, w \in V$ gilt:

$$v \perp_\Phi w \Longleftrightarrow f(v) \perp_\Phi f(w).$$

2. Gibt es ein Skalarprodukt g auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$(*) \quad (0,1) \perp_g (-1,1) \quad \text{und} \quad ||(0,1)||_g = 1 = ||(-1,1)||_g?$$

   Lösungshinweis:

   (i) Bestimmen Sie zunächst die Matrix A_g einer symmetrischen Bilinearform, die $(*)$ erfüllt!

   (ii) Zeigen Sie, dass g positiv definit ist.
   Hinweis: $2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x^2 + 2xy + y^2)$.

Lösungsskizzen

zu Aufgabe 1

(i)

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii)/(iii) Wir berechnen die Determinante und die Inverse von A gemeinsam durch (auch für die Determinantenberechnung zulässige) elementare Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r}(z_1' = z_1 + z_2 \\ z_2' = z_2 + z_3)\end{array}$$

$$- \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad (z_3' = z_3 + z_1')$$

Da jeweils zu Zeilen nur Linearkombinationen von anderen Zeilen addiert wurden, ist $\det(A) = \det(E_3) = 1$ (siehe linke Seite der erhaltenen Matrix). Ferner folgt (mit der rechten Seite der Matrix)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man $\det A$ auch mit der Formel von Sarrus oder mit der Entwicklung nach Laplace berechnen.

(iv) Da $\det A = 1$ ist, gilt $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$.

Alternativ lässt sich $\det(A^{-1})$ mit Laplace oder Sarrus direkt aus A^{-1} berechnen.

(v) Wegen $\det(f) = \det(M_B^B(f)) \neq 0$ ist f regulär und lässt sich (nach einem Satz aus der Vorlesung) invertieren.

(vi) Es gilt $f^{-1}(b_2) = b_1 + b_2 + b_3$ z.B. wegen $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

zu Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & 0 & t-1 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x(t-1) + x \\ &= -x^3 + xt = -x(x^2 - t).\end{aligned}$$

(b) Als Eigenwerte kommen nach Teil 1 also in Frage $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{t}$. Im Falle $t > 0$ gibt es daher 3 verschiedene Eigenwerte, im Fall $t = 0$ den einzigen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ in algebraischer Vielfachheit 3 und im Falle $t < 0$ den rellen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ in Vielfachheit 1.

(c) Wenn $t > 0$ ist, dann sind die drei Eigenwerte verschieden, also gibt es drei zugehörige Eigenvektoren, die den Raum $\mathbb{R}^3$ aufspannen (A ist diagonalisierbar).

(d)/(e) Im Falle $t \leq 0$ ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von A (s. Teil 2!). Nun gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow z = 0 \wedge x + y = 0.$$

Der zugehörige Eigenraum ist $\operatorname{Eig}(A_t, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbb{R}$. Da dieser eindimensional ist, kann A_t nicht zu einer Diagonalmatrix ähnlich sein.

zu Aufgabe 3

1. Wäre $\lambda = 0$, so existierte ein Eigenvektor $v \neq 0$ mit $f(v) = 0 \cdot v = 0$. Damit wäre $\operatorname{Kern} f \neq \{0\}$ und f nicht injektiv.

2. Da λ Eigenwert von f ist, existiert ein Eigenvektor v mit $v \neq 0$ und $f(v) = \lambda v$. Nach Teil 1 ist $\lambda \neq 0$; da f^{-1} ebenfalls linear ist, folgt $v = f^{-1}(\lambda v) = \lambda f^{-1}(v)$ und daraus $\lambda^{-1} v = f^{-1}(v)$. Also ist v auch Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von f^{-1}.

3. Aus $Av = \lambda v$ und $v \neq 0$ folgt $0 \neq v = E_3 v = A^T A v = A^T \cdot \lambda v = \lambda A^T v$, also $\lambda \neq 0$ und $A^T v = \lambda^{-1} v$. Nach Lösungshinweis haben A und A^T die gleichen Eigenwerte. Also ist λ^{-1} auch Eigenwert von A.

zu Aufgabe 4

1. Mit der Definition $v \perp_g w :\Longleftrightarrow \Phi(v, w) = 0$ gilt (wegen der Verträglichkeit von Φ und f) für alle $v, w \in V$:

$$v \perp_\Phi w \Longleftrightarrow \Phi(v, w) = 0 \Longleftrightarrow \Phi(f(v), f(w)) = 0 \Longleftrightarrow f(v) \perp_\Phi f(w).$$

2. Existiert ein Skalarprodukt g der geforderten Eigenschaften? Sei

$$A_g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

die (symmetrische !) Fundamentalmatrix einer symmetrischen Bilinearform g (bzgl. der kanonischen Basis)!

(i) Es muss dann wegen $(*)$ gelten:

$$0 = \quad (0 \quad 1) \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\beta \ \ \gamma) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\beta + \gamma$$

und damit

$$1 = (0 \ \ 1) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta$$

und schließlich

$$1 = (-1 \ 1) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha - 1.$$

Als einzige Möglichkeit bleibt $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Umgekehrt (!) erfüllt eine (symmetrische) Bilinearform g mit dieser Matrix die Forderungen $(*)$

(ii) Zu untersuchen bleibt, ob diese Matrix (und damit g) positiv definit ist:

$$\begin{aligned} g(\xi, \eta), (\xi, \eta)) &= (\xi \ \ \eta) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (2\xi + \eta)\xi + (\xi + \eta)\eta \\ &= 2\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 = \xi^2 + (\xi + \eta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Und $g((\xi, \eta), (\xi, \eta)) = 0$ gilt nach der vorigen Berechnung nur für $(\xi, \eta) = (0, 0)$.

Damit ist nachgewiesen, dass ein Skalarprodukt der angegebenen Eigenschaften existiert.