**Nachklausur**

zur Modulprüfung zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie'
am 12.7.17

| Name, Vorname | Matrikel-Nr. bzw. Kennzeichen | Aufg.1 | Aufg.2 | Aufg.3 | Aufg.4 | $\Sigma$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| Punkte | | | | | | | |

**Bearbeiten Sie bitte drei der vier folgenden Aufgaben!** Falls Sie alle vier Aufgaben bearbeitet haben sollten, **kennzeichnen Sie bitte, welche drei Aufgaben gewertet werden sollen!**
Zur vollständigen Lösung einer Aufgabe gehört, wenn nicht anders angegeben, auch die (stilistisch einwandfreie zielführende) **Darstellung des Gedankenganges**.
Pro gelöster Aufgabe erhalten Sie 10 Punkte. Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

**Aufgabe 1** (Affiner Raum)

Seien $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$ ein drei-dimensionaler affiner Raum, $E \in \mathcal{E}$ , $g \subseteq E$ und $P \in \mathcal{P}$ mit $P \notin E$.

(i) Begründen Sie: $|E| = |g|^2$.
*Lösungshinweis:* Legen Sie zwei sich schneidende Geraden fest! Betrachten Sie dann zwei geeignete Parallelprojektionen auf diese!
Unbewiesen dürfen Sie voraussetzen, dass je 2 Geraden von $E$ die gleiche Mächtigkeit haben.

(ii) Bezeichne $[P]$ die Menge der Geraden von $\mathcal{G}$ durch $P$ und $u$ die Anzahl der Geraden durch $P$, die parallel zu $E$ sind. Begründen Sie:

$$|[P]| = |g|^2 + u.$$

*Hinweis:* $u$ ist <u>nicht</u> zu bestimmen.

**Aufgabe 2** (Kongruenz)

Beweisen Sie kongruenzgeometrisch, aber ohne Verwendung des Kongruenzsatzes 'SSS', den Satz vom Drachenviereck:
Liegen in der euklidischen Ebene die Punkte $C$ und $D$ in verschiedenen Halbebenen zur Geraden $AB$ und gilt $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$, so folgt $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ . (Siehe Abbildung 1!)

*Nicht* ohne Beweis verwenden dürfen Sie hier in dieser Aufgabe den Kongruenzsatz SSS, Begriff und Eigenschaften von Symmetrieachsen bzw. Spiegelungen, die Eigenschaften der Diagonalen eines Drachenvierecks.

*Lösungshinweise:*
• Unterscheiden Sie drei Fälle (s. ebenfalls Abbildung 1)!
• Ohne Beweis dürfen Sie dabei verwenden: Eigenschaften von gleichschenkligen Dreiecken, der Winkel-Addition bzw. -Subtraktion und die von 'SSS' verschiedenen Kongruenzsätze.

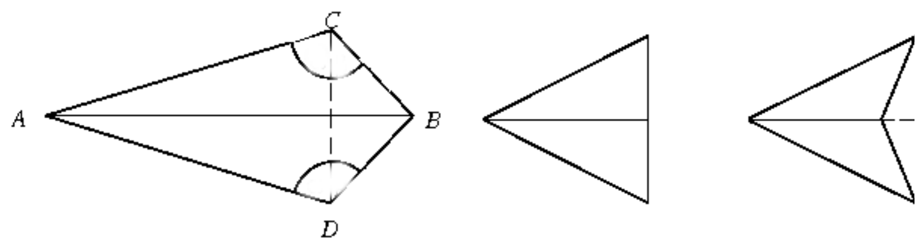


Abbildung 1: Zum Satz vom Drachenviereck (Aufgabe 2)

**Aufgabe 3** (Winkelsumme und Thalessatz)

Zeigen Sie, dass in der euklidischen Ebene gilt:

(i) Die Winkelsumme im Dreieck ist gleich $2R$.
*Lösungshinweise:*
• Ziehen Sie eine geeignete Hilfs-Parallele!
• Eigenschaften von Stufen- und Wechselwinkeln dürfen Sie hier unbewiesen benutzen.

(ii) Beweisen Sie den Satz von Thales!
*Lösungshinweis:* Zerlegen Sie das zugehörige Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke.

**Aufgabe 4** (Spiegelungsbeweis)

Beweisen Sie mithilfe von Bewegungen die Existenz des Mittelpunktes und der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$ in der reellen euklidischen Ebene $E$.
*Lösungshinweise:*
• Beachten Sie Abbildung 2, s.u.! Betrachten Sie die Fahnen

$$F_1 := (AB^+, ABC^+) \quad \text{und} \quad F_2 := (BA^+, ABC^+).$$

Gibt es eine Bewegung $\psi$, die $F_1$ auf $F_2$ abbildet?
• Benutzt werden darf (ohne Beweis) die „freie Beweglichkeit", die Möglichkeit des Streckenab- bzw. des Winkelantragens, die Existenz rechter Winkel, Eigenschaften von Bewegungen, insbesondere von Spiegelungen.

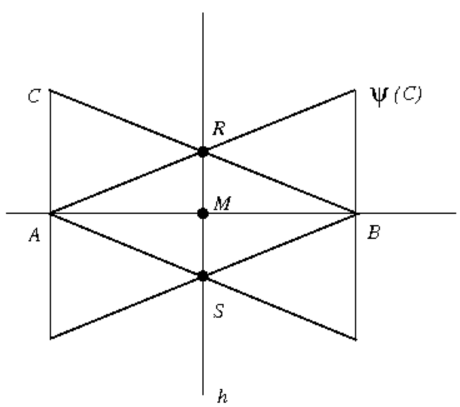


Abbildung 2: Zu Aufgabe 4

**Lösungsskizzen:**
**Zu Aufgabe 1**

(i) Seien $g_1$ und $g_2$ zwei verschiedene sich in einem Punkt $N$ schneidende Geraden von $E$. (Existenz folgt aus dem Reichhaltigkeitsaxiom für $E$ und den Geradenaxiomen).

Zu jedem Punkt $R$ von $E$ gibt es (nach dem Euklidischen Parallelenaxiom) genau eine Gerade $\hat{g}_i$ mit $R \in \hat{g}_i$ und $\hat{g}_i \parallel g_i \quad (i = 1, 2)$ und (als Schnitt von nicht-parallelen Geraden) genau einen Punkt $X_R := g_1 \cap \hat{g}_2$ sowie genau einen Punkt $Y_R := g_2 \cap \hat{g}_1$. Umgekehrt ist durch ein beliebiges Punktepaar $(X, Y)$ mit $X \in g_1$ und $Y \in g_2$ mittels des Schnittes der Parallelen zu $g_1$ bzw. $g_2$ durch $X$ bzw. $Y$ ein eindeutiger Punkt von $E$ bestimmt. Es gilt also

$$|E| = \{(X, Y) \mid X \in g_1 \text{ und } Y \in g_2\}| = |g \times g| = |g|^2.$$

(ii) Laut der Definition der Parallelität von Geraden und Ebenen schneidet jede Gerade aus $[P]$ entweder die Ebene $E$ in einem Punkt (und ist dann durch diesen Schnittpunkt eindeutig bestimmt) oder ist parallel zu $E$. $[P]$ besteht daher genau aus $|E|$ Geraden, die $E$ schneiden, und $u$ weiteren Geraden parallel zu $E$. Mit (i) folgt daher

$$|[P]| = |g|^2 + u,$$

was zu zeigen war.

**Zu Aufgabe 2**
Als Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind die Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle ADC$ kogruent; analog gilt $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle BCD$.
*1.Fall:* $A$ und $B$ sind auf verschiedenen Seiten von $CD$. Dann addieren sich die Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle BCD$ und die Winkel $\sphericalangle ADC$ und $\sphericalangle CDB$. Anwendung des Kongruenzsatzes SWS liefert die Behauptung $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$.
*2.Fall:* $B \in CD$. Dann gilt definitionsgemäß $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$ und $\overline{CB} \equiv \overline{BD}$; für die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks gilt wieder $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ADC$, und der Kongruenzsatz SWS ist anwendbar.
*3.Fall:* $A$ und $B$ liegen auf der gleichen Seite von $CD$. Dann betrachtet man die Differenz der Winkel bei $C$ bzw. bei $D$ und kann den Kongruenzsatz SWS erneut anwenden.
*Alternativ:* Die Mittelsenkrechte auf $\overline{CD}$ enthält die Punkte $A$ und $B$. So

entstehen je zwei Dreiecke, die sich als kongrunet erweisen und die Kongruenz der Winkel bei $A$ und $B$ zeigen. Der Kongruenzsatz SWS zeigt dann die Behauptung.

**Zu Aufgabe 3**

(i) Sei $g = CD$ die Parallele zu $AB$ durch $C$ (s.Abbildung 3 !). Die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle(CD^+, CA^-)$ sind Stufenwinkel mit parallelen Schenkeln und daher kongruent. Die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCD$ sind Wechselwinkel mit parallelen Schenkeln und daher ebernfalls kongruent. Da $CB^+ \subseteq$ Inn $(\sphericalangle ACD) \cup \{C\}$ und $CD^+ \subseteq$ Inn$\sphericalangle(CA^+, CA^-) \cup \{C\}$, addieren sich die betreffenden Winkel und $\sphericalangle ACB$ bei $C$ (und damit die Innenwikel von $\Delta ABC$) zu $2R$.

(ii) Das Zentrum $M$ des Halbkreises ist auch der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ (s. Abbildung 4 !) Dann sind $\Delta MAC$ und $\Delta MBC$ gleichschenklige Dreiecke, deren Basiswinkel $\alpha$ bzw. $\beta$ also jeweils kongruent sind. Wegen $CM^+ \subseteq$ Inn$(\sphericalangle ACB) \cup \{C\}$ addieren sich die Winkel der Größe $\alpha$ und $\beta$ bei $C$. Im Dreieck $\Delta ABC$ gilt daher $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 2R$ (s.(i)), woraus $\alpha + \beta = R$ folgt.

*Alternative Möglichkeit:*
Anwendung des Umfangswinkelsatzes auf $\sphericalangle ACB$.

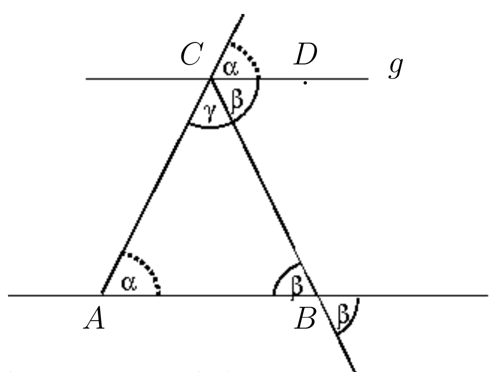


Abb. 3: Zur Winkelsumme

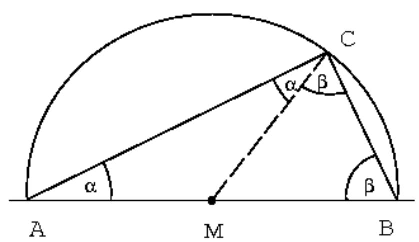


Abb. 4: Zum Beweis des Thalessatzes

**Zu Aufgabe 4**

Für $C \in E$ mit $AC \perp AB$ (Antragen eines rechten Winkels ) existiert nach dem Satz von der freien Beweglichkeit die Bewegung $\psi$, die die Fahne $F_1 = (AB^+, ABC^+)$ auf die Fahne $(BA^+, ABC^+)$ abbildet; $\psi(B)$ muss auf $BA^+$ liegen und den gleichen Abstand von $B$ haben wie $A$ von $B$. Daher ist $\psi(B) = A$; ähnlich gilt $\psi(\psi(C)) = C$ (Lote auf $AB$). Daher ist $R = A\psi(C) \cap BC$ Fixpunkt von $\psi$. Analog erhält man einen Fixpunkt $S$ von $\psi$ in $ABC^-$. Die Gerade $h = RS$ ist Achse der Spiegelung $\psi = \gamma_h$ und daher senkrecht auf $AB = A\psi(A)$. Ferner ist $M := AB \cap h$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. $\square$