Klausur (Modulprüfung) zum Lehrerweiterbildungskurs 'Geometrie' WiSe 2013/2014

Aufgabe 1 (gleichseitiges Dreieck)

Sei $\mathcal{D} = \Delta ABC$ ein gleichseitiges Dreieck in der reellen euklidischen Ebene. Zeigen Sie:

(i) Jedes Mittellot von $\mathcal{D}$ ist gleichzeitig Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe von $\mathcal{D}$.

(ii) Im gleichseitigen Dreieck fallen zusammen:

- der Inkreismittelpunkt
- der Umkreismittelpunkt
- der Schwerpunkt
- der Höhenschnittpunkt.

Hinweis: Die Existenz dieser Punkte und Linien und deren allgemeine Eigenschaften dürfen Sie unbewiesen benutzen, ebenso Eigenschaften der Mittelsenkrechten von beliebigen Strecken und die Kongruenzsätze.

Aufgabe 2 (Translation)
Zeigen Sie: Jede Translation der euklidischen Ebene bildet Winkel auf Winkel gleicher Größe ab!
Hinweis: Benutzt werden dürfen affine Eigenschaften von Translationen und die Längentreue von Translationen sowie die Kongruenzsätze.

Aufgabe 3 (Symmetrieachsen, Rechteck)
Bestimmen Sie alle Symmetrieachsen eines nicht-quadratischen Rechtecks $\mathcal{R} = \square\square ABCD$ der reellen euklidischen Ebene (mit Begründung)!

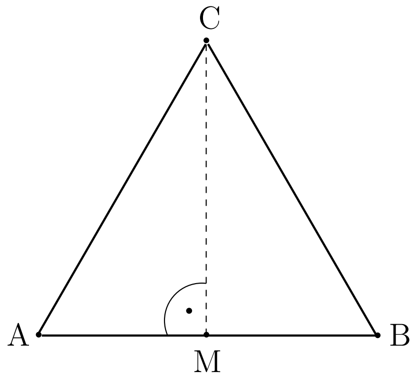
Hinweis: Ohne Beweis dürfen Sie Eigenschaften von Geradenspiegelungen benutzen sowie die Tatsache, dass in einem Rechteck die Gerade durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 der sich gegenüberliegenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ senkrecht zu AB und CD ist (lt. Übungsaufgabe E3) und dass in einem Parallelogrammen die Orthogonalität der Diagonalen die Kongruenz aller vier Seiten impliziert (lt. Übungsaufgabe 14).

Lösungsskizzen

Zu Aufgabe 1

(i) *1. Möglichkeit*

Sei m_{AB} die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Nach deren Eigenschaft liegt C wegen $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ auf m_{AB} (s. Skizze). Daher ist m_{AB} auch Höhe und Seitenhalbierende von $\mathcal{D}$. Die beiden rechtwinkligen Teildreiecke ΔAMC und ΔBMC sind nach den Kongruenzsätzen SSS oder SWS kongruent, woraus $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle BCM$ folgt. Also ist m_{AB} auch Winkelhalbierende von $\mathcal{D}$.



2.Möglichkeit

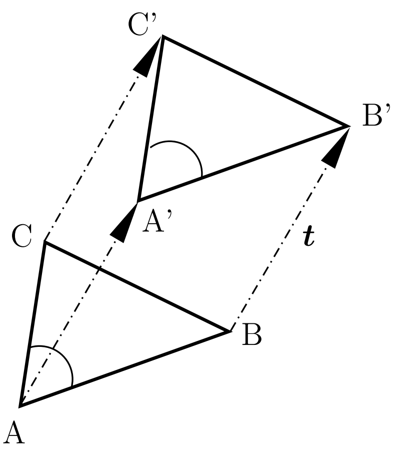
Ist M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und s_{AB} die Seitenhalbierende zu dieser Seite mit $C \in s_{AB}$, so haben die Teildreiecke ΔAMC und ΔBMC kongruente Seiten, sind also nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Daraus folgt, dass die Winkel $\sphericalangle ACM$ und $\sphericalangle BCM$ gleich groß sind, ebenso die Winkel $\sphericalangle AMC$ und $\sphericalangle BMC$. Letztere sind also rechte Winkel. Dies zeigt, dass s_{AB} auch Mittellot, Höhe und Winkelhalbierende ist.

(ii) Da bei jeder drei Seiten das Mittellot, die Höhe, die Seitenhalbierende und die Winkelhalbierende übereinstimmen, gilt das auch für die entsprechenden Schnittpunkte der Winkelhalbierenden (Inkreismittelpunkt), der Mitellote (Umkreisschnittpunkt), der Seitenhalbierenden (Schwerpunkt) und der Höhen. □

Zu Aufgabe 2

Sei $\sphericalangle BAC$ der gegebene Winkel, $t = t_{AA'}$ die gegebene Translation und $\Delta A'B'C'$ das Bild des Dreiecks ΔABC unter t (s. Skizze). Da Translationen Strecken auf (parallele) Strecken gleicher Länge abbilden, also $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ und $|\overline{AC}| = |\overline{A'C'}|$ sowie $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$ gilt, sind die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent, folglich auch der Winkel $\sphericalangle BAC$ und sein Bild $\sphericalangle B'A'C'$ unter t.

Alternativer Beweis: mittels Stufenwinkelsatz und Winkeladdition/-Subtraktion



Zu Aufgabe 3 (Skript-Aufgabe 79, Buch-Aufgabe 37e)
1.Möglichkeit:
Unter einer Deckabbildung des Rechtecks $\mathcal{R}$ wird die Menge $\{M_1, M_2\}$ der Mittelpunkte der sich gegenüberliegenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ permutiert. Die Gerade M_1M_2 und die Mittelsenkrechte von $\overline{M_1M_2}$ sind also Fixgeraden einer $\mathcal{R}$ auf sich abbildenden Geradenspiegelung γ und kommen als einzige als Achsen von γ in Frage.
Für die Umkehrung siehe unten!

2.Möglichkeit:
Die Eckenmenge $\{A, B, C, D\}$ wird durch eine Spiegelung γ permutiert. Dabei sind folgende Fälle zu betrachten:
1.Fall: $\gamma(A) = A$. Wegen der unterschiedlichen Längen der Seiten mit Ecke A folgt dann $\gamma(B) = B$ und $\gamma(D) = D$, also $\gamma = \mathrm{id}$.
2.Fall: $\gamma(A) = B$. Es folgt (wegen $\gamma^2 = \mathrm{id}$) dann $\gamma(B) = A$; damit ist AB eine von der Achse verschieden Fixgerade und m_{AB} die Achse von γ.
3.Fall: $\gamma(A) = D$. Analog zum vorigen Fall ist m_{AD} Achse von γ.
4.Fall: $\gamma(A) = C$. Es folgt (wegen $\gamma^2 = \mathrm{id}$) dann $\gamma(C) = A$. Die Achse von γ müsste dann auf AC senkrecht stehen und $\{B, D\}$ permutieren. Blieben B und D fix, so wäre dies die Achse von γ, und die Diagonalen von $\mathcal{R}$ stünden aufeinander senkrecht, was nach der Lösungshilfe nur für eine Raute, hier also einem Quadrat möglich ist. Würden B und D vertauscht, so müsste auch BD senkrecht zur Achse sein, also $BD \parallel AC$ gelten, ein Widerspruch.
Als Symmetrieachsen kommen also nur die beiden Mittelsenkrechten zu je einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten in Frage.

Umkehrung
Umgekehrt ist M_1M_2 tatsächlich Symmetrieachse, da laut Lösungshinweis die Gerade M_1M_2 senkrecht auf $\overline{CD}$ und $\overline{AB}$ steht und diese Strecken jeweils halbiert. Analoges gilt für die Gerade durch die Mittelpunkte der anderen beiden Seiten des Rechtecks.

Die einzigen Symmetrieachsen eines echten Rechtecks sind also die beiden Mittelsenkrechten zu je einem Paar von gegenüberliegenden parallelen Seiten.