Klausur Pflichtbereich Mathematik

am 31.8.2016

Bearbeiten Sie 8 der folgenden 12 Aufgaben, dabei aus jeder der 4 Gruppen mindestens eine Aufgabe!

Zur Lösung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch und fachlich einwandfreie Darstellung des zielführenden Gedankenganges.
Eigener nicht-programmierbarer Taschenrechner ist erlaubt.

Gruppe 1: Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Aufgabe 1 (Basisergänzungssatz, Satz von der linearen Fortsetzung)

1. Seien V ein endlich-dimensionaler $K-$Vektorraum, H eine Hyperebene (d.h. ein Unterraum der Codimension 1) von V sowie $a_1, a_2 \in H$ und a_1, a_2 linear unabhängig, ferner $d \in V \setminus H$. Zeigen Sie, dass es dann eine Basis B von H gibt derart, dass $a_1, a_2 \in B$ ist und $C := B \cup \{d\}$ Basis von V.
Lösungshinweis: Benutzen Sie (ohne Beweis) z.B. den Basisergänzungssatz!

2. Sei nun H eine Hyperebene des 3-dim Vektorraums V; seien ferner $a_1, a_2 \in H$ und a_1, a_2 linear unabhängig sowie $d_1, d_2 \in V \setminus H$.
Zeigen Sie:
Es gibt einen Automorphismus f von V mit $f(H) = H$, $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_1$ und $f(d_1) = d_2$.
Lösungshinweis: Sie dürfen den Satz von der linearen Fortsetzung ohne Beweis anwenden.

Aufgabe 2 (Lineares Gleichungssystem, Determinante, inverse Matrix)

1. Lösen Sie folgendes Lineares Gleichungssystem $(*)$ über $\mathbb{R}$!

$$(*) \qquad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 2 \\ \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 1 \end{cases}$$

2. Bestimmen Sie die Determinante und die Inverse der Koeffizientenmatrix A des folgenden Gleichungssystems $(**)$ über $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Lösung von $(**)$ mithilfe der Matrix A^{-1} !

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \xi_1 & + & \xi_2 & + & \xi_3 & = & 2 \\ \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & = & 1 \\ & & & & \xi_3 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aufgabe 3 (Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit)

Beweisen Sie (ohne Verwendung des entsprechenden Satzes über symmetrische Matrizen), dass die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist!
Lösungshinweise:
1. Zeigen Sie, dass die Matrix A drei verschiedene Eigenwerte besitzt! Eigenschaften von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten dürfen Sie unbewiesen benutzen.
2. Beachten Sie auch: $\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab + c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}$.

Aufgabe 4 (Skalarprodukt, Orthogonalität, Norm, positive Definitheit)

Bestimmen Sie für $\mathbb{R}^2$ alle Skalarprodukte Φ, für die gilt:

$$(*) \qquad (1,0) \perp_\Phi (0,1) \quad \text{und} \quad ||(1,0)||_\Phi = 1.$$

Lösungshilfe:

1. Bestimmen Sie alle symmetrischen Bilinearformen mit $(*)$, abhängig von $c := ||(0,1)||_\Phi$.
2. Prüfen Sie die Fundamentalmatrix auf positive Definitheit!

Gruppe 2: Analysis

Aufgabe 5 (Folgenkonvergenz, Potenzreihe, geometrische Reihe)

1. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

   $$a_n := (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

   auf Konvergenz für $n \to \infty$.

   Lösungshinweise:

   (i) Man kann z.B. untersuchen, ob die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist!

   (ii) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = (n+1) - n$

2. Für welche reellen x konvergiert, für welche divergiert die Potenzreihe

   $$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{\frac{n}{2}}} \ ?$$

   Lösungshinweis: Man kann z.B. $q = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ oder $q = x^2$ substituieren.

Aufgabe 6 (Mittelwertsatz, Stetigkeit)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei f' beschränkt auf $[a, b]$.

1. Zeigen Sie, dass ein $M \in \mathbb{R}$ existiert derart, dass gilt:

   $$\forall x, y \in [a, b] : \quad |f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y - x|.$$

2. Ist f gleichmäßig stetig?

Aufgabe 7: (Differenzierbarkeit, Gradient, lineare Approximation)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\quad f(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f !
2. Begründen Sie: f ist differenzierbar für alle Vektoren $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Geben Sie den Gradienten grad(f) von f an der Stelle (x,y) an!
4. Geben Sie mit Hilfe von grad(f) eine Approximation (ohne Fehlerabschätzung) an für

$$v := f(a + 0,01, \quad 1 + 0,03) - f(a,1) \quad (\text{für } a \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \; !$$

Hinweis: Allgemeine Sätze der mehrdimensionalen Differenzialrechnung dürfen Sie hier ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 8 (Partielle Integration; uneigentliches Integral)

(a) Finden Sie mit partieller Integration eine Stammfunktion zu xe^{-x}.

(b) Berechnen Sie $\int\limits_0^b xe^{-x}\text{dx}$ für $b > 0$.

(c) Bestimmen Sie damit $\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,\text{dx}$.

Lösungshilfe:
Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass $\lim\limits_{b\to\infty} be^{-b} = 0$ gilt.

Gruppe 3: Elementargeometrie

Aufgabe 9 (Dreieckskongruenz, Mittelsenkrechte)

Sei $\Delta\, ABC$ ein nicht-ausgeartetes Dreieck der reellen euklidischen Ebene, dessen Höhe h_C durch C mit der Seitenhalbierenden s_C durch C übereinstimmt.
Zeigen Sie:

(i) $\Delta\, ABC$ ist gleichschenklig.

(ii) s_C ist auch Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.

(iii) Die Seitenhalbierenden s_A und s_B haben die gleiche Länge.

Lösungshinweise:
Benutzt werden dürfen die Kongruenzsätze für Dreiecke und allgemeine Aussagen über Eigenschaften von Mittelsenkrechten, Seitenhalbierenden und Höhen.
Hinweis zu (ii): Betrachten Sie z.B. die Dreiecke ΔAF_CC und ΔBF_CC mit $F_C := AB \cap s_C$.
Hinweis zu (iii): Betrachten Sie z.B. die Dreiecke ΔAF_AC und ΔBF_BC mit $F_A := BC \cap s_A$ und $F_B := AC \cap s_B$.

Aufgabe 10 (Mittelsenkrechten, Dreispiegelungssatz)
Beweisen Sie den Satz über den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks der reellen euklidischen Ebene mit Hilfe des Dreispiegelungssatzes.

Lösungshilfen:

1. Betrachten Sie $\gamma = \gamma_{m_a} \circ \gamma_g \circ \gamma_{m_b}$ für eine geeignete Gerade g. (Hierbei bezeichne γ_g die Spiegelung an der Geraden g und m_a bzw. m_b die Mittelsenkrechte auf der Seite a bzw. b).

2. Allgemeine Eigenschaften von Mittelsenkrechten (außer der zu beweisenden Aussage), von Geradenspiegelungen und den Dreispiegelungssatz dürfen Sie hier unbewiesen benutzen.

Gruppe 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 11 (Baumdiagramm, Rückwärtsschließen, Formel von Bayes)

Von den Jugendlichen, die Ende des Schuljahres 2011 die Haupt– bzw. Realschule mit oder ohne Abschluss verließen, waren $46,3\%$ weiblich und $53,7\%$ männlich. Ohne schulischen Abschluss blieben dabei rd. $7,6\%$ der Abgängerinnen und rd. 10% der Abgänger.

(a) Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm und eine Vierfeldertafel! Berechnen Sie dann rückwärts die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass eine aus den Absolventen mit Abschluss zufällig herausgegriffene Person weiblich ist. (Dabei dürfen Sie hier die relativen Häufigkeiten als die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten nehmen.)

(b) Berechnen Sie p erneut, diesmal mithilfe der Formel von Bayes!

Aufgabe 12 (Satz von de Moivre–Laplace)

(i) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit w, bei 4500 (unabhängigen) Würfen mit einem idealen Würfel zwischen 700 und 750-mal (einschließlich dieser Grenzen) eine Sechs zu erhalten?

(ii) Wie lautet die genaue (nicht approximierte) Formel für w (ohne Ausrechnen der einzelnen Terme)?

Hinweise zu (i):
(1) Sie dürfen den Satz von de Moivre-Laplace ohne Stetigkeitskorrektur verwenden.
(2) Es gilt $\Phi(2) \approx 0,977$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet.
Hinweis zu (ii): Vewenden sie ohne Beweis die Formel der entsprechenden Verteilung!

Lösungsskizzen:
Zu Aufgabe 1:

1. Sei $\dim_K V = n$, also $n = \dim_K H + 1$. Nach Voraussetzung sind a_1 und a_2 linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz existiert eine Basis B von H mit $\{a_1, a_2\} \subseteq B \subseteq H$; weil $d \notin H$, ist d linear unabhängig von B und daher (aus Dimensionsgründen) $C = B \cup \{d\}$ eine Basis von V.

2. Wegen $\dim_K H = 2$ bildet (a_1, a_2) eine (geordnete) Basis B von H und $C_i = (a_1, a_2, d_i)$ (geordnete) Basen von V (mit $i = 1, 2$).

   Nach dem Satz von der linearen Fortsetzung gibt es nun eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_1$, und $f(d_1) = d_2$. Da f linear ist, wird auch $H = \text{Spann}(a_1, a_2)$ auf $H = \text{Spann}(a_2, a_1)$ abgebildet. f ist surjektiv (f bildet die Basis C_1 von V auf die Basis C_2 von V ab!) und daher (u.a. aus Dimensionsgründen) ein Automorphismus.

Zu Aufgabe 2:

1. Die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $(*)$ ist

$$A_{\text{erw}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | \; 2 \\ 1 & 1 & 2 & | \; 1 \end{pmatrix}.$$

   Durch elementare Umformung (2.Zeile minus 1.Zeile) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

   Das zugehörige Gleichungssystem (mit dem gleichen Lösungsraum wie $(*)$) lautet

$$(*') \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} \xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & = & 2 \\ & - & \xi_2 & + & \xi_3 & = & -1 \end{array} \right. .$$

   Der Lösungsraum des homogenen Systems hat die Dimension $3-2$ und ist damit der Unterraum U_1, der von einer nicht-trivialen Lösung (z.B. mit $\xi_3 = 1$ erhalten) erzeugt wird:

$$U_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbb{R}.$$

Alternative Lösung: Der Lösungsraum U_1 wird erzeugt vom Vektorprodukt der Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix A von $(*)$:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum L des Systems $(*)$ ist die Summe von U_1 und einer Partikulärlösung, z.B. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Der Lösungsraum von $(*)$ ist daher

$$L = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\mathbb{R}.$$

2. Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $(**)$ ist

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Deren Determinante erhält man z.B. durch Entwicklung nach der letzten Zeile :

$$\det A = 1 \cdot (2-1) = 1.$$

Da $\det A \neq 0$ gilt, ist A regulär, also invertierbar, und das LGS $(**)$ besitzt genau eine Lösung.
Die Inverse von A berechnet man z.B. wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \quad \begin{array}{r}(z_2' = z_2 - z_1)\\ z_1' = z_1 - z_3)\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1\\0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \quad (z_1'' = z_1' - z_2')$$

Es folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Die Lösung von $(**)$ ist damit

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 3:
Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & c & 0 \\ c & b-x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+b}{2}-x \end{vmatrix} = (\frac{a+b}{2} - x)[(a-x)(b-x) - c^2].$$

Die Eigenwerte genügen damit den Gleichungen

$$\lambda = \frac{a+b}{2} \quad \text{oder} \quad \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2 = 0$$

und sind damit $\lambda_1 = \frac{a+b}{2}$ und

$$\lambda_{2/3} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - ab + c^2} = \frac{a+b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + 4c^2} \in \mathbb{R}.$$

Falls der Radikand ungleich 0 ist, sind die drei Eigenwerte verschieden und zugehörige Eigenvektoren linear unabhängig; damit existiert eine Eigenbasis von A, und A ist diagonalisierbar.
Ist der Radikand gleich 0, so ist $c = 0$ (und $a = b$), folglich A schon von Diagonalform.

Zu Aufgabe 4:

1. Sei Φ ein Skalarprodukt der gesuchten Eigenschaften, und sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

die Fundamentalmatrix von Φ. Aus $(*)$ folgt dann

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \quad \text{und} \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a.$$

Umgekehrt hat die Bilinearform mit Fundamentalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

die geforderten Eigenschaften (mit $c := \Phi((0,1),(0,1)) = ||(0,1)||_\Phi^2$).
Alternativ kann man verwenden, dass $A = (\Phi(e_i, e_j))_{i,j=1,2}$ gilt.

2. Damit Φ sogar Skalarprodukt ist, muss die Matrix A positiv definit sein. Wir prüfen, ob $\Phi(v,v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + cy^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow c \geq 0.$$

Und $x^2 + cy^2 = 0$ gilt für $c \geq 0$ genau dann, wenn $0 \leq cy^2 = -x^2 \leq 0$, also $x = 0$ und $[c = 0$ oder $y = 0]$ ist. Dabei ist im Falle $c = 0$ auch $y \neq 0$ möglich. $c > 0$ ist daher notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass A positiv definit und Φ ein Skalarprodukt ist.
Alternativ kann man damit argumentieren, dass die beiden führenden Hauptminoren von A, also $\det(1)$ und $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$ positiv sein müssen.

Zu Aufgabe 5:

1. Es gilt

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(-1)^n|\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \quad \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

$(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also keine Nullfolge; und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zwei Häufungspunkte: $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$, ist also nicht konvergent.

2. In

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{\frac{n}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^2}{\sqrt{2}})^n$$

kann man z.B. $\frac{x^2}{\sqrt{2}}$ durch q ersetzen; die dann erhaltene geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert genau für $|q| < 1$, also für $x^2 < \sqrt{2}$, d.h. (infolge der Monotonie der Wurzelfunktion) für $|x| < \sqrt[4]{2}$.
Alternativ lässt sich $q = x^2$ wählen. Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^n q^n$ ist (gemäß der entsprechenden Formel für Potenzreihen)

$$\rho_q = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{(\frac{1}{\sqrt{2}})^n}} = \sqrt{2},$$

der der Reihe U damit

$$\rho_x = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

mit Divergenz an den Randpunkten.
$U(x)$ konvergiert also für $|x| < \sqrt[4]{2}$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \backslash (-\sqrt[4]{2}, +\sqrt[4]{2})$.

Zu Aufgabe 6:

1. Aus dem Mittelwertsatz, angewandt auf das Intervall $[x, y]$ mit $x < y$ und $[x, y] \subseteq [a, b]$, folgt die Existenz eines $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Wegen der Beschränktheit von f' existiert ein $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f'(z)| \leq M \quad \text{für alle} \quad z \in [a, b],$$

insbesondere für $z = \xi$. Damit erhält man für alle $x, y \in [a, b]$

$$(*) \qquad |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq M \cdot |y - x|.$$

2. Wir können in Teil (1) o.B.d.A. $M > 0$ mit Eigenschaft $(*)$ wählen.
Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben und δ definiert durch $\delta := \frac{\epsilon}{M}$.
Für $|x - y| < \delta = \frac{\epsilon}{M}$ folgt dann

$$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y - x| < M \cdot \delta = \epsilon \quad \text{für alle} \quad x, y \in [a, b].$$

Die Funktion f ist also gleichmäßig stetig (sogar Lipschitz-stetig).
Alternative Argumentationen:
Nach Teil 1 ist f Lipschitz-stetig, gemäß einem Satz aus der Vorlesung Analysis daher gleichmäßig stetig.
Bzw.: Eine auf einem kompakten Intervall stetige reelle Funktion (folgt aus der Differenzierbarkeit) ist gleichmäßig stetig.

Zu Aufgabe 7:

1. Es gilt: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy.$

2. Da alle partiellen Ableitungen existieren und (als Polynome) stetig sind, ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ (sogar stetig) differenzierbar.

3. Somit ist $\operatorname{grad} f|_{(x,y)} = (3x^2 - 3y^2, \quad -6xy).$

4. Aus der Definition der Differenzierbarkeit im Punkt

$$(x_0, y_0) = (a, 1)$$

ergibt sich die Approximation

$$f(x,y) \approx f(a,1) + \operatorname{grad} f|_{(a,1)} \cdot ((x,y) - (a,1)).$$

Für $(x,y) = (a + 0.01, \quad 1 + 0.03)$ gilt dann folgende Approximation:

$$\begin{aligned} v &= f(x,y) - f(a,1) \\ &\approx \operatorname{grad} f_{|(a,1)} \cdot ((a + 0,01, \quad 1 + 0,03) - (a,1)) \\ &= (3a^2 - 3, \quad -6a) \cdot (0.01, \quad 0,03) \\ &= 0.03a^2 - 0.03 - 0.18a. \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 8
a) Mit partieller Integration erhält man
$\int xe^{-x}\mathrm{dx} = x\frac{e^{-x}}{-1} + \int e^{-x}\mathrm{dx} = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c.$
b) Aus a) ergibt sich
$\int\limits_0^b xe^{-x}\mathrm{dx} = -e^{-x}(x+1)|_0^b = -e^{-b}(b+1) + 1.$
c) Mit b) und der Lösungshilfe erhält man

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}\mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty}[-e^{-b}(b+1)+1] = 1 \quad .$$

Bemerkung: Auf diese Weise berechnet man den Erwartungswert der Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda = 1$. Diese hat die Dichtefunktion f mit $f(t) = e^{-t}$ für $t \geq 0$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$. (Sie ist ein Analogon zur geometrischen Verteilung für den Fall stetiger Zeit.)

Zu Aufgabe 9

(i) Nach Voraussetzung ist $h_C = s_C$. Also steht s_C senkrecht auf AB.
s_C ist somit auch gleich der Mittelsenkrechten $m_{\overline{AB}}$ von $\overline{AB}$.
Als Punkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ hat C den gleichen Abstand von A und B; folglich ist $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$, und $\Delta\, ABC$ ist gleichschenklig.
Alternativ ab 2. Zeile: Für $F_C := AB \cap s_C$ sind die rechtwinkligen Dreiecke $\Delta\, AF_CC$ und $\Delta\, BF_CC$ nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, also folgt $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$.

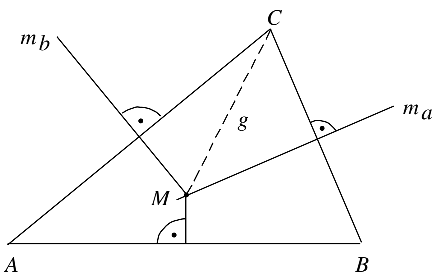
(ii) Nach dem Kongruenzsatz SSS oder der Alternative in (i) sind $\Delta\, AF_CC$ und $\Delta\, BF_CC$ kongruent; folglich gilt $\sphericalangle ACF_C \equiv \sphericalangle BCF_C$, und s_C ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$.

(iii) Sind F_A bzw. F_B die Fußpunkte von s_A und s_B, dann hat das Dreieck $\Delta\, AF_AC$ zwei Seiten, die kongruent zu den entsprechenden Seiten von $\Delta\, BF_BC$ sind und einen kongruenten Winkel einschließen. Nach dem Kongruenzsatz SWS sind die Dreiecke kongruent und damit deren Seiten s_A und s_B gleich lang.

Anmerkung: Wäre die Verwendung der Eigenschaften von Spiegelungen erlaubt worden, so hätte man als weitere Alternative z.B. in (i), (ii) und (iii) die Spiegelung γ_{F_CC} betrachten können, die rechte Winkel und Längen erhält und damit A auf B abbildet (und natürlich F_C und C festlässt). Die Aussagen über die Längen von $\overline{AC}, \overline{BC}$, über die von s_A und s_B sowie die Größen der Winkel $\sphericalangle ACF_C$ und $\sphericalangle BCF_C$ folgen dann sofort.

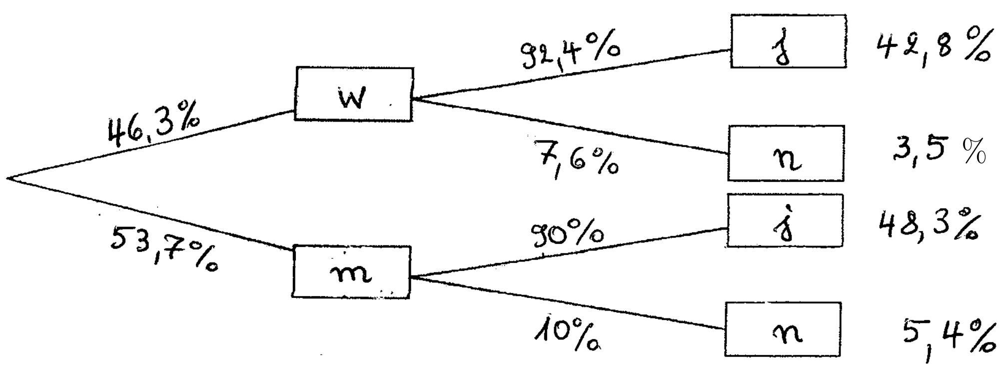
Zu Aufgabe 10

Die Mittelsenkrechten m_a und m_b sind nicht parallel(!); wähle g und M wie in der untenstehenden Abbildung (s.nächste Seite) , und betrachte $\gamma = \gamma_{m_a} \circ \gamma_g \circ \gamma_{m_b}$. Nach dem Dreispiegelungssatz ist γ eine Spiegelung; diese lässt M fest und bildet A auf B ab. Die Achse von γ ist daher das Mittellot zu $\overline{AB}$ und geht (wie die anderen Mittelsenkrechten des Dreiecks) durch M .
$\square$



Zu Aufgabe 11:[1]

(a) Aus den Angaben erhält man folgendes Baumdiagramm (mit w $\hat{=}$ weiblich, m $\hat{=}$ männlich, j $\hat{=}$ mit Abschluss, n $\hat{=}$ ohne Abschluss):

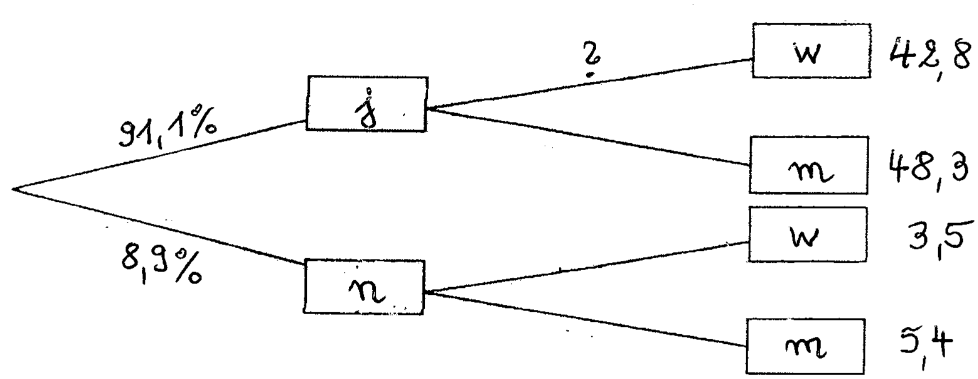


Die Wahrscheinlichkeit der Pfade (des Aufretens beider Merkmalausprägungen) liefern die Einträge in die
Vierfeldertafel:

	Abschl. ja	Abschl. nein	gesamt
Gechlecht "w"	42,8	3,5	46,3
Geschlecht "m"	48,3	5,4	53,7
gesamt	91,1	8,9	100

[1] (Zahlen gemäß Statistischem Bundesamt, Wiesbaden 2013.)

Somit erhält man als **umgekehrtes Baumdiagramm:**



Es folgt, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{42,8}{91,1} \approx 47\%$$

ist.

(b) Alternativ berechnet man die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit aus

$$P(w|j) = \frac{P(w) \cdot P(j|w)}{P(j)} \approx \frac{0,463 \cdot 0,924}{0,428 + 0,483} = \frac{0,428}{0,911} \approx 0,47.$$

Zu Aufgabe 12:

(i) Sei X die Zufallsvariable, die zählt, wie oft die Sechs bei 4500 Würfen auftritt. X ist dann (bei dieser Bernoullikette) binomialverteilt zu den Parametern $n = 4500$ und $p = \frac{1}{6}$. Man erhält den Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 4500 \cdot \frac{1}{6} = 750$ und die Streuung

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{4500 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{625} = 25 \ .$$

Die standardisierte Zufallsvariable $\dfrac{X - 750}{25}$ hat also Erwartungswert 0 und Varianz 1, was die Anwendung des Satzes von de Moivre-Laplace für die gesuchte Wahrscheinlichkeit w wie folgt ermöglicht:

$$\begin{aligned} w = P(700 \leq X \leq 750) &= P\Big(- \frac{50}{25} \leq \frac{X - 750}{25} \leq 0\Big) \\ &\approx \Phi(0) - \Phi(-2) = \frac{1}{2} - \Big[1 - \Phi(2))\Big] = \Phi(2) - \frac{1}{2} \\ &\approx 0,977 - 0,5 \approx 0,477. \end{aligned}$$

Also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. 48%.

(ii) Da X eine nach $B_{4500;1/6}$ verteilte Zufallsgröße ist, folgt:

$$w = P(700 \leq X \leq 750) = \sum_{k=700}^{750} \binom{4500}{k} \Big(\frac{1}{6}\Big)^k \Big(\frac{5}{6}\Big)^{4500-k}.$$