

Übung zum Lehrerweiterbildungskurs Mathematik 'Lineare Algebra/Analytische Geometrie II'

Aufgabe C5 (Eigenwerte, Eigenräume über $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_3$)

Berechnen Sie, falls existent, die Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{(2,2)}$$

im Fall

- (i) $K = \mathbb{R}$,
- (ii) $K = \mathbb{C}$,
- (iii) $K = \mathbb{F}_3 = \text{GF}(3)$,
- (iv) Bestimmen Sie jeweils, falls existent, die Eigenräume von A !

Lösungsskizze

Es gilt in allen Fällen $\chi_A(X) = \det(A - XE_2) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$.

- (i) Falls $K = \mathbb{R}$ ist, gibt es keine Nullstelle des Polynoms $X^2 + 1$ (da das Quadrat jeder reellen Zahl nicht-negativ ist). In diesem Fall hat also A keine Eigenwerte.
- (ii) Über \mathbb{C} zerfällt $X^2 + 1$ in Linearfaktoren: $\chi_A(X) = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$; es hat also $\chi_A(X)$ die Nullstellen (und damit A die Eigenwerte) $\lambda_1 = +i$ und $\lambda_2 = -i$ (wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet).
- (iii) Durch Einsetzen von $0, 1, 2$ in $X^2 + 1$ und (eventuelle Reduktion modulo 3) sieht man, dass im Falle $K = \text{GF}(3)$ das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ keine Nullstelle und damit A keine Eigenwerte besitzt.
- (iv) Da A in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \text{GF}(3)$ keine Eigenwerte besitzt, gibt es auch keine Eigenräume. Sei also $K = \mathbb{C}$.

Die Eigenräume $E(i)$ zum Eigenwert $\lambda_1 = i$ und $E(-i)$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -i$ haben wegen Verschiedenheit von λ_1 und λ_2 die Dimension 1 und sind die Lösungsräume der beiden linearen homogenen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

die u.a. von $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$ gelöst werden. Es folgt

$$E(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathbb{C} \quad \text{und} \quad E(-i) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathbb{C}.$$