

## Übungen zum Lehrerweiterbildungskurs “Lineare Algebra/Analytische Geometrie II”

**Aufgabe B3** (Kern, Bild, Dimension, Fortsetzungssatz)

Seien  $V$  ein  $n$ -dim und  $W$  ein  $m$ -dim Vektorraum über dem Körper  $K$  (mit  $n, m \in \mathbb{N}$ )! Ferner sei  $X$  ein Unterraum von  $V$  und  $Y$  ein Unterraum von  $W$ . Welche Bedingung an die Dimensionen ist 1.) notwendig und 2.) hinreichend für die Existenz einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit Kern  $f = X$  und Bild  $f = Y$ . (Mit Begründung!)

**Lösungsskizze**

1.) Für eine beliebige lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  gilt die Dimensionsformel

$$\dim_K(\text{Kern } f) + \dim_K(\text{Bild } f) = \dim_K V.$$

Für Kern  $f = X$  und Bild  $f = Y$  folgt als notwendige Bedingung:

$$(*) \quad \dim_K X + \dim_K Y = n.$$

2.) Diese Bedingung ist auch hinreichend. Beweis: Es gelte (\*). Nach dem Basisexistenzsatz existiert eine Basis  $B_X$  von  $X$ ; dabei ist  $|B_X| = \dim_K X$ . Nach dem Basisergänzungssatz kann man diese Basis zu einer Basis  $B = B_X \dot{\cup} D$  von  $V$  ergänzen. Aus (\*) folgt, dass

$$r := |D| = |B| - |B_X| = n - \dim_K X = \dim_K Y$$

ist. Eine Basis  $C_Y$  von  $Y$  hat ebenfalls die Mächtigkeit  $r$ ; wir setzen  $D = (d_1, \dots, d_r)$  und  $C_Y = (c_1, \dots, c_r)$ . Damit definieren wir eine Abbildung  $\tilde{f} : B \rightarrow C_Y$  durch  $\tilde{f}(B_X) := \{0_W\}$  und  $\tilde{f}(d_i) := c_i$  für  $i = 1, \dots, r$ . Nach dem Fortsetzungssatz existiert eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  mit  $f|_B = \tilde{f}$ . Die so konstruierte lineare Abbildung  $f$  erfüllt Kern  $f = X$  und  $f(V) = Y$ .  $\square$