

Modulprüfung zur Analysis II

Lösungen

Weiterbildung für Lehrer an der FU

Dozent: V.Schulze Datum: 1.7.2016 Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Name		Vorname		Unterschrift		Matr.Nr.	
Aufgabe	1	2	3		Punktsumme	Note	
Punkte							

Bearbeiten Sie zwei der folgenden drei Aufgaben.

Anmerkung: Pro Aufgabenteil werden maximal 5 Punkte vergeben, pro Aufgabe also maximal 15 Punkte; insgesamt also maximal 30 Punkte. Zur vollständigen Bearbeitung einer Aufgabe gehört auch die stilistisch einwandfreie Darstellung des Gedankenganges.

Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{falls } x > 0 \\ x + 1 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

- (i) Ist f stetig an der Stelle $x = 0$?
- (ii) Ist f differenzierbar an der Stelle $x = 0$?
- (iii) Existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$?

Lösung

(i) Nach der Regel von l'Hospital gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(x^2)}{2x} = 1$.

Ferner gilt $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1$.

Also ist f stetig an der Stelle $x = 0$.

(ii) Für $h > 0$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin(h^2)}{h^2}}{h} - \frac{1}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h^2)-h^2}{h^3}$,
und nach l'Hospital ist $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h^2)-h^2}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h \cos(h^2)-2h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(h^2)-2}{3h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h \sin(h^2)}{3} = 0$.

Für $h < 0$ gilt $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1-1}{h} = 1$.

Links- und rechtsseitige Ableitung stimmen also nicht überein.

Also ist f an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

(iii) Es gilt $|\frac{1}{x^2} \sin(x^2)| \leq |\frac{1}{x^2}|$.

Nach dem Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale existiert also $\int_1^\infty f(x)dx$.

Aufgabe 2

- (i) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(x-1)^n}{2^n n}$?
- (ii) Zeigen Sie, daß die Potenzreihe aus (i) konvergent ist für genau alle $x \in [-1, 3)$.
- (iii) Für welche x konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{(2x-1)^n}{2^n n}$?

Lösung

(i) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$.

Also ist der Konvergenzradius $r = 2$.

(ii) Die Potenzreihe besitzt nach (i) den Konvergenzradius 2 und den Entwicklungspunkt 1.

Also konvergiert die Potenzreihe für $x \in (-1, 3)$ und sie divergiert für $x \notin [-1, 3]$.

Die Randpunkte des Konvergenzintervalls werden getrennt untersucht.

Für $x = 3$ konvergiert die Potenzreihe nicht, da die harmonische Reihe nach Vorlesung nicht konvergiert.

Für $x = -1$ konvergiert die Potenzreihe, da die alternierende harmonische Reihe nach Vorlesung konvergiert.

(iii) Es gilt $2x \in [-1, 3)$ genau dann, wenn $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Nach (ii) konvergiert die Funktionenreihe also genau für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 - x \sin y$.

- (i) Bestimmen Sie den Gradienten von f im Punkt (x_0, y_0) .
- (ii) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(x_0, y_0)$.
- (iii) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 0)$.

Lösung

(i) Für die partiellen Ableitungen gilt $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \sin y$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \cos y$.

Der gesuchte Gradient ist also $(2x_0 - \sin y_0, -x_0 \cos y_0)$.

(ii) Da die partiellen Ableitungen von f in einer ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0, y_0)$ stetig sind, gilt für die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 1 = 2x_0 - \sin y_0 - x_0 \cos y_0$.

(iii) Die Gleichung der Tangentialebene lautet $z = f'_x(1,0)x + f'_y(1,0)y + c$, also $z = 2x - y + c$ mit einer noch zu bestimmenden Konstanten c .
Es gilt $f(1,0) = 1$ und der Punkt $(1,0, f(1,0))$ liegt auf der Tangentialebene.
Durch einsetzen ergibt sich $1 = 2 \cdot 1 - 0 + c$, also $c = -1$.
Die Gleichung der Tangentialebene lautet also $z = 2x - y - 1$.