

Kapitel III Absolute und euklidische Geometrie

M Die dritte Axiomengruppe Hilberts besteht aus *Kongruenzaxiomen*. Sie treten
bei Euklid nicht auf. Wohl aber stehen bei Euklid *Kongruenzsätze*. Euklid
| leitet sie aus der als selbstverständlich angenommenen "freien Beweglich-
keit" einer Ebene in sich oder jede andere Ebene (Transitivität der Gruppe
aller längentreuen inzidenzerhaltenden Bijektionen) ab. Nach moderner Auffas-
sung müßten darüber aber Axiome an den Anfang gestellt werden. Tatsächlich
werden sowohl in der fachwissenschaftlichen Geometrie (z.B. F. BACHMANN,
Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff) als auch in der Didaktik
der Geometrie immer wieder Ansätze gemacht, die Geometrie aus Grundannahmen
über "Bewegungen" statt über Kongruenz aufzubauen. Der Zusammenhang ist nach
| üblichem Sprachgebrauch folgender: Geometrische Figuren sind kongruent, wenn
M sie durch Bewegungen auseinander hervorgehen.

Im folgenden Kapitel gehen wir (u.a. aus historischen Gründen) zunächst von den
(etwas schwerfälligen) Kongruenzaxiomen nach Hilbert aus. Die geometrischen
Eigenschaften und Abbildungen, die sich aus den Inzidenz-, Ordnungs- und Kon-
gruenzaxiomen ableiten lassen, fasst man unter dem Begriff *absolute Geometrie*
(manchmal auch als *metrische Geometrie* bezeichnet) zusammen. Nimmt man das
Parallelenaxiom hinzu, so spricht man von *Euklidischer Geometrie*, bei dessen
Negation von *Nichteuklidischer Geometrie*.

§9. Kongruenzaxiome und erste Folgerungen (in der absoluten Geometrie)

Im Folgenden wollen wir ein Maß für die Größe von Strecken und Winkeln ge-
winnen. Dazu teilen wir zunächst alle Punktpaare und analog alle Winkelpaare in
Kongruenzklassen ein und erklären anschließend kongruente Strecken (bzw. Win-
kel) als gleich groß.

A) Axiome der Kongruenz

(9.1) Generalvoraussetzung und Vereinbarungen

In diesem Paragraphen verstehen wir unter einer *Strecke* $\overline{AB}$
(wahlweise) das (ungeordnete) Punktpaar $\{A, B\}$ (oder das da-
durch bestimmte Intervall $[A, B]$ bzw. $]A, B[$). Insbesondere
gilt also $\overline{AB} = \overline{BA}$. Unter einem Winkel $\sphericalangle(p, q)$ verstehen wir
hier den nicht-orientierten Winkel, also die Menge $\{p, q\}$
von
Halbgeraden mit gleichem Scheitel.
Insbesondere gilt $\sphericalangle(p, q) = \sphericalangle(q, p)$. Als *Dreieck* ΔABC be-

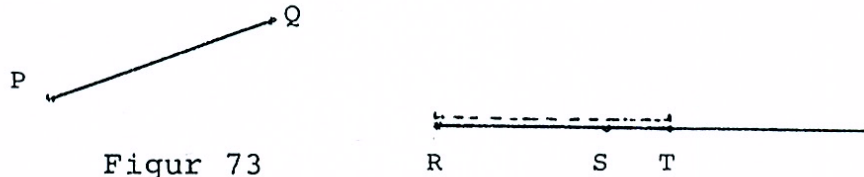
zeichnen wir jetzt das *geordnete* Tripel (A,B,C) nicht-kollinearer Punkte A,B,C .

Im übrigen sei, falls nicht anders vermerkt, $I = (P,G,E)$ ein geordneter Inzidenzraum (mit induzierter Zwischenrelation Z). Auf der Menge der Strecken und auf der Menge der Winkel seien zwei binäre Relationen (*Kongruenzrelationen* genannt) definiert^{*)}, die wir mit demselben Symbol " $\equiv$ " (kongruent) bezeichnen. Diese mögen folgenden Axiomen genügen:

(9.2) Axiome der Streckenkongruenz

(a) (KO 1) (Möglichkeit des Streckenabtragens)

Zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ mit $P \neq Q$ und jeder Halbgeraden RS^+ mit $R \neq S$ gibt es^{**)} einen Punkt $T \in RS^+$ mit $\overline{PQ} \equiv \overline{RT}$.



Figur 73

Axiom (KO 1) beschreibt die mögliche Konstruktion mittels Stechzirkel.

Anmerkung: Axiom (KO 1) (angewandt auf die zu RS^+ komplementäre Halbgerade garantiert die Existenz eines Punktes U mit $(U,R,S) \in Z$. Daher ist Axiom (OR 2) überflüssig, wenn die Kongruenzaxiome gefordert werden.

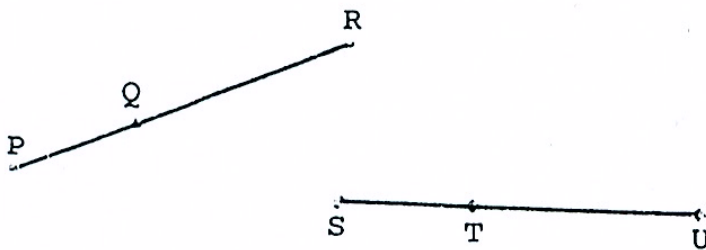
(b) (KO 2) Die Streckenkongruenz ist eine Äquivalenzrelation

Anmerkung: Dieses Axiom kann noch abgeschwächt werden.

*) Nullwinkel seien genau zu Nullwinkeln und gestreckte Winkel genau zu gestreckten Winkeln kongruent.

**) T ist dann eindeutig bestimmt, siehe (§.4) !

- (c) (KO 3) Axiom der Streckenaddition (vgl. Figur 74)
Sind $(P, Q, R), (S, T, U) \in \mathcal{L}$, dann folgt aus $\overline{PQ} \equiv \overline{ST}$ und $\overline{QR} \equiv \overline{TU}$ auch $\overline{PR} \equiv \overline{SU}$.

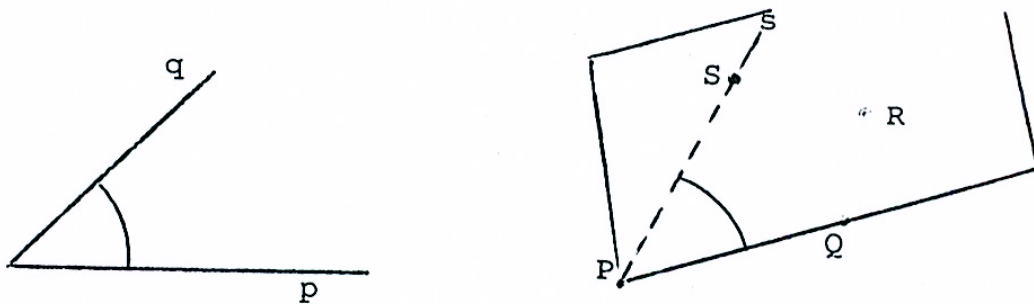


Figur 74

Dieses Axiom verbindet u.a. die Kongruenzrelation mit den Ordnungsrelationen.

(9.3) Axiome der Winkel- und der Dreieckskongruenz

- (a) (KO 4) Axiom des Winkelantragens (vgl. Figur 75)
Zu jedem Winkel $\angle(p, q)$, jeder Halbgeraden $r = PQ^+$ und jeder Halbebene PQR^+ gibt es genau eine Halbgerade $s = PS^+$ mit $S \in PQR^+ \cup PQ$ und $\angle(p, q) \equiv \angle(r, s)$.
 (KO 5) Die Winkelkongruenz ist eine Äquivalenzrelation.



Figur 75

Anmerkung: Außer in der ersten Auflage seines Werkes fordert Hilbert bei (KO 5) nur die Reflexivität. Die Symmetrie und Transitivität muss dann mühsam bewiesen werden. Dieses Vorgehen ist darin begründet, dass man vom Standpunkt der Logik aus mit möglichst wenig und scheinbar schwachen Axiomen auskommen will. Vom Standpunkt der Eleganz und didaktischen Einfachheit her ist jedoch der andere, von uns eingeschlagene Weg vorzuziehen.

Ein Zusammenhang zwischen Strecken und Winkelkongruenz stellt folgendes Axiom her:

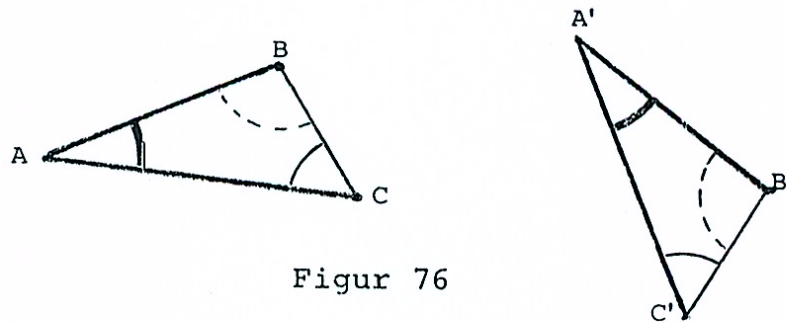
(b) (KO 6) Axiom der Dreieckskongruenz (vgl. Figur 76)

Wenn für zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Kongruenzen $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ sowie $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so folgt auch

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$$

(und damit $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$)

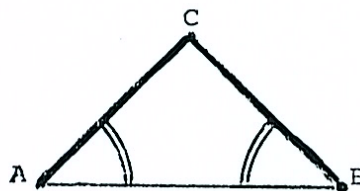
Anmerkung: (i) Die letzte Aussage folgt durch Vertauschung von B mit C und B' mit C'.



Figur 76

(ii) Setzt man in (KO 6) speziell $\overline{C} = A' = A$, $\overline{A} = B' = C$ und $\overline{B} = C' = B$, so folgt: In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ (gleichschenkligen Dreieck) gilt $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAC$.

D.h.: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel kongruent (vgl. Figur 77)

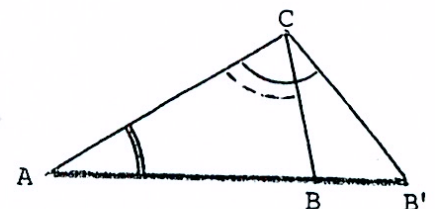


Figur 77

(9.4) Hilfssatz

Die Streckenabtragung ist eindeutig, d.h. aus $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$ und $B' \in \overline{AB}^+$ folgt $B = B'$.

Beweis Es sei $C \notin \overline{AB}$. Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} \equiv \overline{AB'}$, $\overline{AC} = \overline{AC}$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC$, (vgl. Figur 78).



Figur 78

Wegen der Reflexivität der beiden Kongruenzrelationen folgt damit aus (KO 6) auch $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ACB'$. Wendet man nun das Axiom des Winkelantragens (KO 4) (mit $r = p = CA^+$ und $q = CB^+$ sowie $PQR^+ = ACB^+$) an, so folgt $CB^+ = CB'^+$ und darum $B = B'$.

□

Aufgabe 50

Auf $\mathbb{R}^3$ sei $x \cdot y$ das kanonische Skalarprodukt und $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$. Auf dem (mit lexikographischer Ordnung versehenen) 3-dim reellen affinen Raum $AG(3, \mathbb{R})$ definieren wir Kongruenzrelationen durch $\overline{uv} \equiv \overline{rs} : \Leftrightarrow \|v-u\| = \|s-r\|$ (für alle $u, v, r, s \in \mathbb{R}^3$) und

$$\sphericalangle(vuw) \equiv \sphericalangle(srt) \Leftrightarrow \frac{(v-u) \cdot (w-u)}{\|v-u\| \cdot \|w-u\|} = \frac{(s-r) \cdot (t-r)}{\|s-r\| \cdot \|t-r\|}$$

(für $u, v, w, s, r, t \in \mathbb{R}^3$ mit $v, w \neq u$ und $s, t \neq r$ sowie

v, u, w und s, r, t nicht kollinear). Nullwinkel seien genau zu Nullwinkeln und gestreckte Winkel genau zu gestreckten Winkeln kongruent.

Untersuchen Sie die Aussagen der Axiome (KO 1) bis (KO 6) auf ihre Gültigkeit für dieses Modell!

Lösungshinweis: Eigenschaften des Skalarprodukts dürfen Sie ohne Beweis verwenden ($\rightarrow$ Lineare Algebra). Vereinfachen Sie die Beweisführung z.B. durch Anwendung von Translationen!

Wir wollen nun zu den Kongruenzsätzen für Dreiecke kommen.

B. Kongruenzsätze (1. Teil)

(9.5) Definition (Kongruenz von Dreiecken)

Das Dreieck $\triangle ABC$ heißt kongruent zum Dreieck $\triangle A'B'C'$, in Zeichen $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, (bzw. beide Dreiecke heißen kongruent zueinander), falls folgende sechs Kongruenzen erfüllt sind:

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \quad \text{und}$$

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'C', \angle CBA \equiv \angle C'B'A', \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Anmerkung: Diese Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Dreiecke.

(9.6) Kongruenzsatz SWS

Sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke mit
 $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$,
 so ist $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

(Ungenau heißt es: "Stimmen zwei Dreiecke in 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel überein, so sind sie kongruent").

Beweis: Aus dem Axiom der Dreieckskongruenz (KO 6) folgt

sofort $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ und

$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$. Es ist daher

nur noch $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ zu zeigen.

Nach dem Axiom des Streckenabtragens

(KO 1) existiert ein $D' \in B'C'^+$

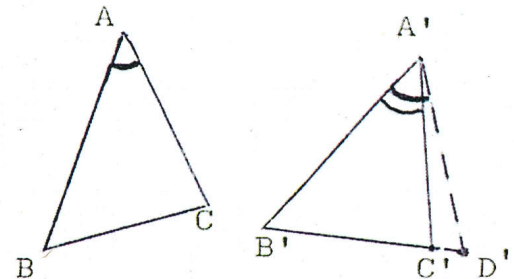
mit $\overline{BC} \equiv \overline{B'D'}$ (s. Figur 79).

Aus (KO 6) angewandt auf $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'D'$, folgt nun

$\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$ und daraus $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'D'$ (Transitivität der Winkelkongruenz, s. (KO 5)). Das Axiom des

Winkelantragens (KO 4) zeigt nun $A'C'^+ = A'D'^+$, also $C' = D'$.

□



Figur 79

(9.7) Kongruenzsatz WSW

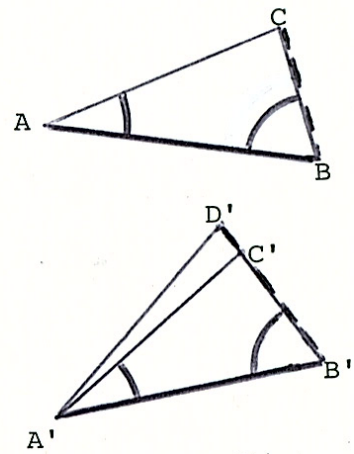
Sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ Dreiecke mit
 $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ und $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$,
 so gilt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$!

Beweis: s. Aufgabe 51.

Aufgabe 51:

Beweisen Sie den Kongruenz-
satz WSW.

Lösungshilfe: s. Figur 80

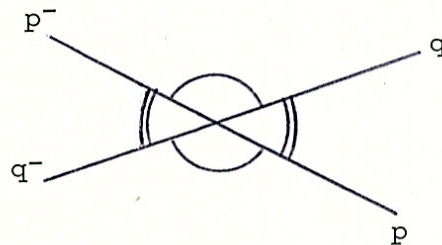


Figur 80

C) Kongruenz von Winkeln

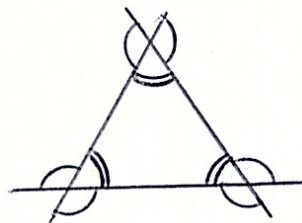
(9.8) Definition (Winkel in spezieller Lage)

- (a) Ist $\angle(p, q)$ ein Winkel, so heißen $\angle(p, q^-)$ und $\angle(p^-, q)$ die *Nebenwinkel* und $\angle(p^-, q^-)$ der *Scheitelwinkel* zu $\angle(p, q)$.



Figur 81

- (b) In einem Dreieck A, B, C heißen die Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ die *Innenwinkel* des Dreiecks, die zugehörigen Nebenwinkel die *Außenwinkel* des Dreiecks (s. Figur 82!).



Figur 82

(c) Zwei Winkel $\angle P_1 R P_2$ und $\angle Q_1 S Q_2$

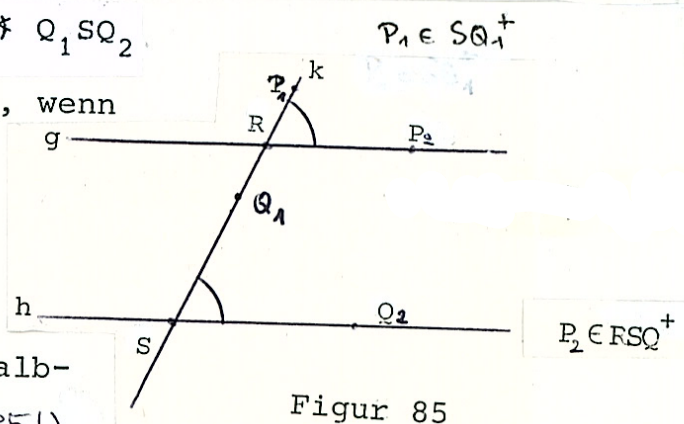
mit $R \neq S$ heißen *Stufenwinkel*, wenn
bei geeigneter Numerierung

$RP_1^+ \subseteq SQ_1^+ \vee SQ_1^+ \subseteq RP_1^+$ gilt und

die beiden freien Schenkel

RP_2^+ und SQ_2^+ in der gleichen Halbebene $RSP_2^+ = RSQ_2^+$ liegen, (s. Fig. 85!)

Die Winkel $\angle(SQ_1^+, SQ_2^+)$ und $\angle(RQ_1^+, RP_2^+)$ heißen Wechselwinkel.



Figur 85

(9.9) Satz

- (a) Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent.
 (b) Scheitelwinkel sind kongruent.

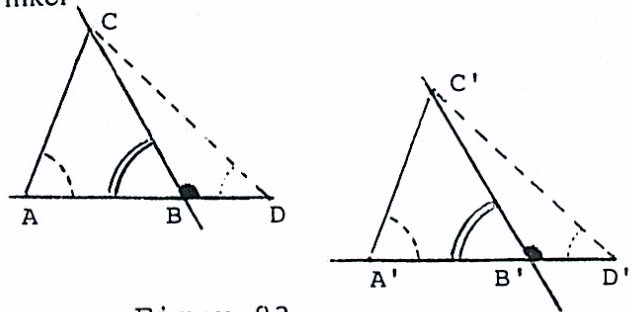
Beweis

Wegen (KO 1) können wir für die kongruenten Winkel $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ o.B.d.A. voraussetzen, dass

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$$

gilt, die zu untersuchenden Nebenwinkel gleich

$\angle DBC$ und $\angle D'B'C'$ sind



Figur 83

und $\overline{BD} \equiv \overline{B'D'}$ ist (für geeignete Punkte D, D'), s. Figur 83.

Nach Axiom (KO 3) ist dann $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$. Aus dem Kongruenzsatz SWS folgt $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, insbesondere

$\angle DAC = \angle BAC \equiv \angle B'A'C' = \angle D'A'C'$. Erneute Anwendung des Kongruenzsatzes SWS liefert $\triangle ADC \equiv \triangle A'D'C'$, woraus sich $\overline{DC} \equiv \overline{D'C'}$ und $\angle BDC = \angle ADC \equiv \angle A'D'C' = \angle B'D'C'$ ergibt.

Aus Axiom (KO 6), angewandt auf $\triangle DBC$ und $\triangle D'B'C'$, folgt nun die Behauptung (a). Teil (b) erhält man durch Anwendung von Teil (a) auf einen Nebenwinkel der zu untersuchenden Winkel. □

Für spätere Beweise benötigen wir noch

(9.10) Hilfssatz (der absoluten Geometrie):

Kein Außenwinkel eines Dreiecks ist einem nicht-anliegenden Innenwinkel kongruent.

Anmerkung: Nach geeigneter Definition von Summe und Größenvergleich bei Winkeln gilt bekanntlich, daß jeder Außenwinkel größer als jeder nicht-anliegende Innenwinkel ist und sogar gleich der Summe der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel. Das Letztere gilt jedoch nur, wenn das Parallelenaxiom erfüllt ist.

Beweis von 9.10

Sei $\triangle ABC$ gegeben und $E \in BC^- \setminus \{B\}$.

Wir nehmen an, es gelte $\angle EBA = \angle BAC$.

- 1.) Nach (KO 1) existiert ein Punkt $D \in BE^+$ mit $\overline{BD} = \overline{AC}$. Nach dem Kongruenzsatz SWS folgt $\triangle ABC = \triangle BAD$, insbesondere

(*) $\angle ABC = \angle BAD$. (vgl. Figur 84). t

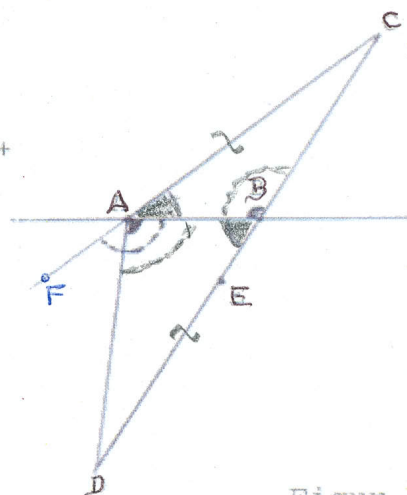
2.) Es ist nach Annahme 1

Annahme $\angle BAC = \angle DBA$ Da Nebenwinkel

von kongruenten Winkeln kongruent sind, ergibt sich so die Kongruenz $\triangle BAF \cong \triangle ABC$ (nach (*)) also von $\angle BAF$ zu $\angle BAD$.

3.) Aus

der Eindeutigkeit des Winkelantrages folgt nun $D \in AC$, im Widerspruch zu $D \in BC$. □



Figur 84

Aufgabe 52: Zeigen Sie folgenden Satz der absoluten Geometrie:

Sei g eine Gerade und P ein Punkt mit $P \notin g$. Dann existiert mindest eine Parallele von g durch P .

(Damit ist das Parallelaxiom jetzt auf Forderung der Eindeutigkeit der Parallelen abschwächbar).

Lösungshinweis: Zeigen Sie zunächst:

Freie Schenkel von kongruenten *Stufenwinkeln* sind parallel. (vgl. Figur 85).

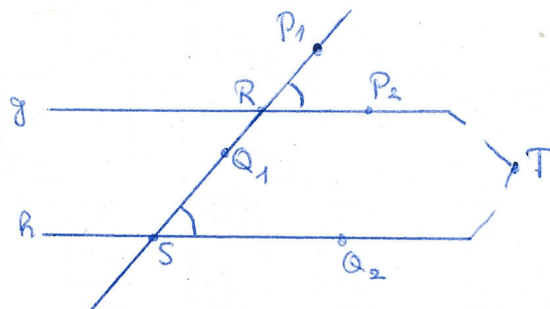
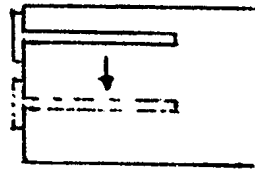


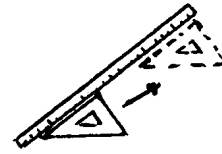
Fig. 85

Anmerkung

Beachten Sie die Konstruktionsmöglichkeit von parallelen Geraden mit Reißschiene oder Zeichendreieck (vgl. Figuren 86 und 87).



Figur 86



Figur 87

Aufgabe 53

Beweisen Sie folgenden *Additionssatz für Winkel*:

Seien $p_i = O_i p_i^+$, $q_i = O_i q_i^+$ und r_i

Halbgeraden mit Scheitel O_i

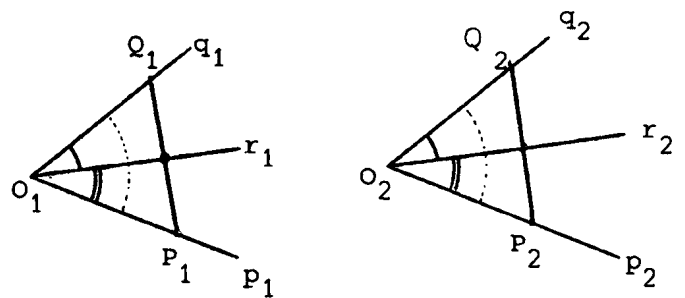
und $r_i \subseteq \text{Inn} \star (p_i, q_i) \cup \{O_i\}$

(für $i = 1, 2$). Gilt dann

$\star(p_1, r_1) \equiv \star(p_2, r_2)$ und

$\star(r_1, q_1) \equiv \star(r_2, q_2)$, so auch

$\star(p_1, q_1) \equiv \star(p_2, q_2)$ (vgl. Fig. 88).



Figur 88

(9.11) Definition

Ein Winkel heißt *rechter Winkel*, falls er zu seinen Nebenwinkeln kongruent ist.

(9.12) Hilfssatz

Es gibt rechte Winkel.

Beweis:

An eine Halbgerade $p = OA^+$ werde ein beliebiger Winkel nach beiden Seiten einer Ebene angetragen, und auf den (freien) Schenkeln werde jeweils von O aus kongruente Strecken $\overline{OB}$ bzw. $\overline{OC}$ abgetragen. $D = BC \cap OA$ existiert, und es gilt $D \in]B, C[$, da B und C auf verschiedenen Seiten von OA liegen.

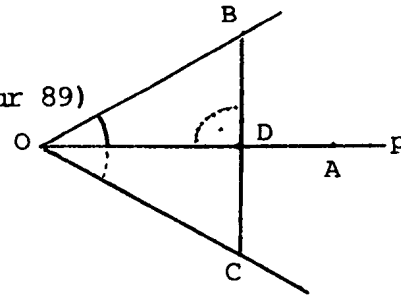
Drei Fälle können auftreten.

1. Fall. D liegt auf $OA^+ \setminus \{O\}$ (s. Figur 89)

Dann ist $\triangle OBD \equiv \triangle OCD$

und daher $\sphericalangle BDO \equiv \sphericalangle CDO$;

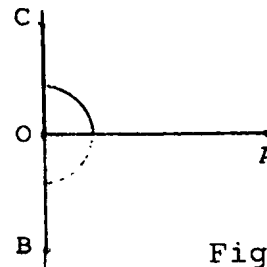
d.h. $\sphericalangle BDO$ ist rechter Winkel.



Figur 89

2. Fall D = O (s. Figur 90)

$\sphericalangle AOB$ ist rechter Winkel.



Figur 90

3. Fall D liegt auf $p^- \setminus \{O\}$.
(s. Figur 91).

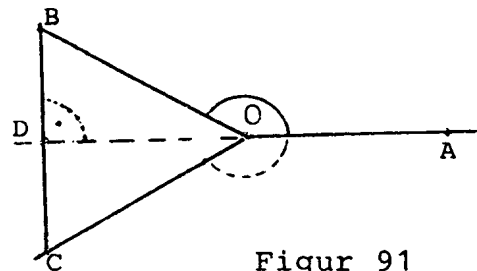
Nach 9.9 ist $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle DOC$;

und daher wieder $\triangle OBD \equiv \triangle OCD$.

(s. 1. Fall).

Aufgabe 54

□



Figur 91

Zeigen Sie, dass in einem die Anordnungs- und Kongruenzaxiome erfüllenden Inzidenzraum die rechten Winkel genau eine Kongruenzklasse von Winkeln bilden, also

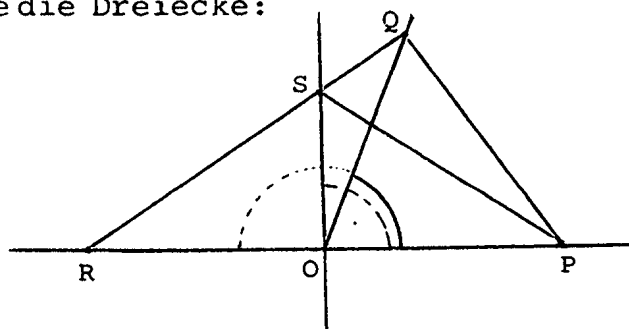
- i) Jeder zu einem rechten Winkel kongruente Winkel ein rechter ist.
- ii) Je zwei rechte Winkel kongruent sind.

Lösungshinweis zu (ii): Tragen Sie an einen Schenkel des ersten rechten Winkels in der Ebene dieses Winkels einen zum zweiten rechten Winkel kongruenten Winkel an. Wählen Sie Punkte P, Q, R, S wie in der Skizze angedeutet mit $\overline{OP} \equiv \overline{OR} \equiv \overline{OQ}$ und betrachten Sie die Dreiecke:

$\triangle ORQ$, $\triangle OPQ$ sowie

$\triangle ROS$, $\triangle POS$

(vgl. Figur 92)!



Figur 92

D Lot und Mittelpunkt

Wichtige abgeleitete Begriffe der absoluten Geometrie sind
Senkrechtstehen von Geraden, Lot und Mittelpunkt:

(9.13) Definition (rechtwinklig, Lot)

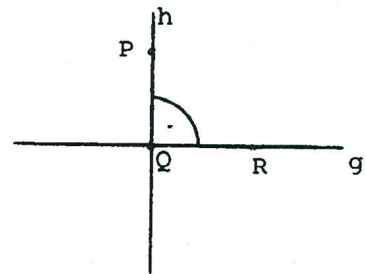
(a) Zwei sich schneidende Geraden QP und QR heißen *rechtwinklig* (orthogonal) zueinander bzw. *senkrecht* aufeinander stehend, falls die Halbgeraden QP^+ und QR^+ einen rechten Winkel bilden. Bezeichnung: $QP \perp QR$.

(b) Die Gerade h heißt ein *Lot* von P auf g , falls $P \in h$ und $g \perp h$ gilt;

$Q := g \cap h$ heißt der *Fußpunkt* dieses

Lotes. (Vgl. Figur 93). *Lotfußpunkt*

(Es darf dabei auch $P \in g$ gelten, also $P = Q$.)



Figur 93

(9.14) Hilfssatz (Existenz und Eindeutigkeit des Lotes)

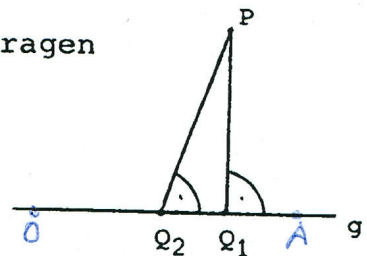
In der absoluten Geometrie gilt für ein Punkt P und eine Gerade g : Ist $P \notin g$, so gibt es genau ein Lot von P auf g .
Ist $P \in g$, so gibt es in jeder Ebene durch g genau ein Lot von P auf g .

← Lot fallen
← Lot errichten

Beweis: Sei $P \notin g$. Dann folgt die Existenz des Lotes analog zum Beweis von 9.12 (mit $g = OA$ und $P = B$), die Eindeutigkeit aus 9.10 (vgl. Figur 94) oder aus der Parallelität freier Schenkel von Stufenwinkeln (s. Aufg. 52).

Ist $P \in g$, so folgt die Existenz durch Antragen eines rechten Winkels, die Eindeutigkeit aus der Eindeutigkeit des Antragens eines rechten Winkels oder seines

(ebenfalls rechten) Nebenwinkels in einer Halbebene. Figur 94



(9.15) Definition (Mittelpunkt)

Sei $P \neq Q$, dann heißt $M \in PQ$ *Mittelpunkt* der Strecke $\overline{PQ}$, falls $\overline{PM} \equiv \overline{MQ}$ gilt.

Aufgabe 55

Zeigen Sie, daß es zu einer Strecke $\overline{PQ}$ mit $P \neq Q$ höchstens einen Mittelpunkt M gibt und $M \in]P, Q[$ gilt.

Lösungshinweis: Nehmen Sie an, es gäbe zwei Mittelpunkte M, N von $\overline{PQ}$; wählen Sie $R \in QP^-$ und $S \in RP^-$ so, daß $\overline{QR} \equiv \overline{MN} \equiv \overline{RS}$ ist. Zeigen Sie dann $\overline{MR} \equiv \overline{PN} \equiv \overline{NQ}$ und daraus $\overline{MS} \equiv \overline{MQ}$.

(9.16) Satz

mindestens (und nach Aufg. 55 damit)

Zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ mit $P \neq Q$ existiert *genau* ein Mittelpunkt M .

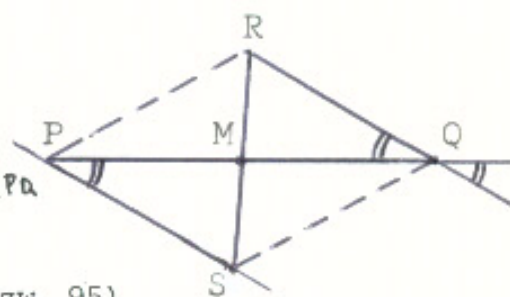
Beweis

Der Nachweis der Eindeutigkeit ist Gegenstand von Aufgabe 55. Zu zeigen ist also noch die Existenz.

- (i) Wir wählen einen Punkt R mit $R \notin PQ$ und tragen den zu $\angle PQR$ kongruenten Winkel an PQ^+ in der Halbebene PQR^- an. Auf dem freien Schenkel dieses Winkels wählen wir S mit $\overline{PS} \equiv \overline{QR}$. Da R und S in verschiedenen Halbebenen zu PQ zur Ebene durch PQR liegen, existiert

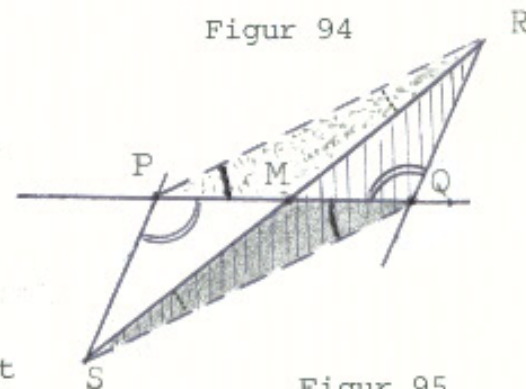
$$M =]R, S[\cap PQ. \quad (\text{vgl. Figuren 94 bzw. 95})$$

Wir zeigen nacheinander: $M \in]P, Q[$ und M ist Mittelpunkt von P, Q .



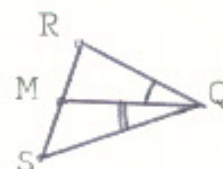
Figur 94

- (ii) Da nach 9.9 der Scheitelwinkel zu $\angle PQR$ zu diesem kongruent ist, ist er kongruenter Stufenwinkel zu $\angle SPQ$; daher sind PS und RQ parallel (s. Aufgabe 52). P und S liegen daher in der gleichen Halbebene mit Rand RQ , wegen $M \in]R, S[$ ebenfalls M , also $M \in QP^+$. Aus Symmetriegründen folgt $M \in PQ^+$ und damit $M \in PQ^+ \cap QP^+$, sowie $M \neq P, Q$, also $M \in]P, Q[$.



Figur 95

- (iii) Nach Konstruktion gilt $\overline{PS} \equiv \overline{QR}$ und $\angle SPQ \equiv \angle PQR$. Aus dem Kongruenzsatz SWS erhalten wir $\triangle QPS \equiv \triangle PQR$ und daraus $\overline{PR} \equiv \overline{QS}$ sowie $\angle QPR \equiv \angle PQS$. Da $PQ^+ \setminus \{P\}$ im Inneren von $\angle SPR$ liegt ($M \in]SR[$, s. Aufgabe 32) und analog $QP^+ \setminus \{Q\}$ im Inneren von $\angle RQS$, kann man nun den Additionssatz für Winkel anwenden (Figur 96) (s. Aufg. 53): $\angle RQS \equiv \angle SPR$. Wieder nach (9.6) folgt $\triangle RQS \equiv \triangle SPR$. Dieses zeigt $\angle QSM \equiv \angle QSR \equiv \angle PRS \equiv \angle PRM$. Nach dem Kongruenzsatz WSW folgt $\triangle PRM \equiv \triangle QSM$, insbesondere $\overline{PM} \equiv \overline{QM}$.



Figur 96

E) Kongruenzsätze (Fortsetzung)

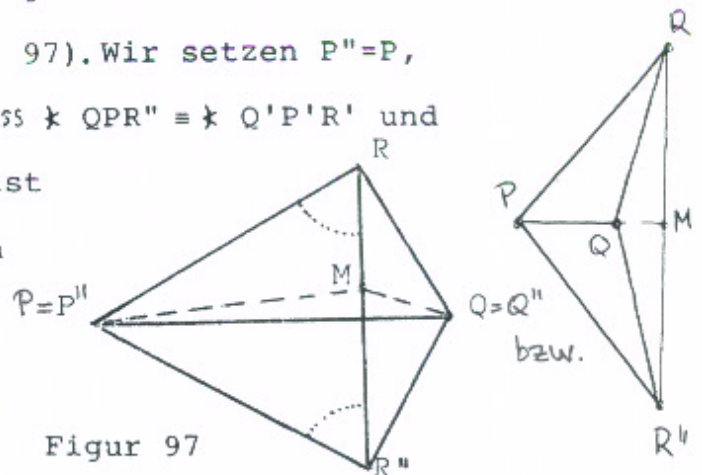
Mit den Begriffen Mittelpunkt und Lot beweisen wir nun den Kongruenzsatz SSS.

(9.17) Kongruenzsatz SSS

Sind $\triangle PQR$ und $\triangle P'Q'R'$ Dreiecke mit $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$, $\overline{PR} \equiv \overline{P'R'}$ und $\overline{QR} \equiv \overline{Q'R'}$, so gilt $\triangle PQR \equiv \triangle P'Q'R'$.

Beweis:

- (i) Wir konstruieren ein zu $\triangle P'Q'R'$ kongruentes Dreieck $\triangle P''Q''R''$ in der Ebene durch P, Q, R (s. Figur 97). Wir setzen $P'' = P$, $Q'' = Q$ und bestimmen $R'' \in \overline{PQR}^-$ so, dass $\angle QPR'' \equiv \angle Q'P'R'$ und $\overline{PR''} \equiv \overline{P'R'}$. Nach Kongruenzsatz SWS ist dann $\triangle PQR'' \equiv \triangle P'Q'R'$ und daher auch $\overline{QR''} \equiv \overline{Q'R'}$. Wegen der Transitivität der Dreieckskongruenz reicht der Nachweis von $\triangle PQR'' \equiv \triangle PQR$.



- (ii) Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{RR''}$. Da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks kongruent sind, folgt

$$\angle PRM \equiv \angle PR''M \text{ und } \angle MRQ \equiv \angle MR''Q. \text{ Aus dem Kongruenzsatz SWS}$$

folgen wir $\triangle PRM \equiv \triangle PR''M$ sowie $\triangle RQM \equiv \triangle R''QM$ und somit $PM \perp RR''$, $QM \perp RR''$ (vgl. die Definition). Aus der Eindeutigkeit des Lotes auf RR'' durch M in der Ebene PQR schließen wir auf die Kollinearität von P, M, Q und damit auf $M \in \overline{PQ}$. Es folgt

$$\angle PQR \equiv \angle MQR \equiv \angle MQR'' \equiv \angle PQR'' \text{ im Falle } QP^+ = QM^+ \text{ (bzw. } \angle QPR \equiv \angle QPR'' \text{ andernfalls) und daraus } \triangle PQR \equiv \triangle PQR''.$$

□

Anmerkung: Dieser Kongruenzsatz lässt sich auch unter Vermeidung der Begriffe Mittelpunkt und Lot herleiten, siehe Aufgabe 57.

Aufgabe 56 (Umkehrung der Strecken- und Winkeladdition)

Zeigen Sie:

(a) Sind $(P, Q, R), (S, T, U) \in \mathcal{L}$, dann folgt aus $\overline{PQ} \equiv \overline{ST}$ und $\overline{PR} \equiv \overline{SU}$ auch $\overline{QR} \equiv \overline{TU}$.

(b) Seien A_i, B_i, C_i, D_i Punkte einer Ebene E_i mit $D_i B_i^+ \setminus \{D_i\} \subseteq \text{Inn} \star A_i D_i C_i$ (für $i=1,2$). Dann folgt aus $\star A_1 D_1 B_1 \equiv \star A_2 D_2 B_2$ und $\star A_1 D_1 C_1 \equiv \star A_2 D_2 C_2$ auch $\star B_1 D_1 C_1 \equiv \star B_2 D_2 C_2$.

Lösungshinweis zu Teil (b)

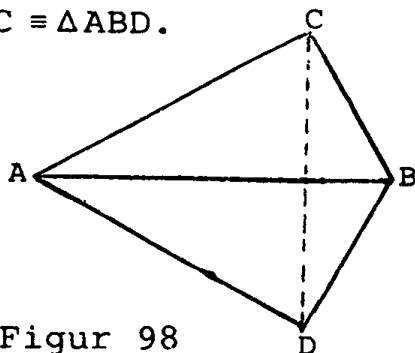
Wählen Sie o. B. d. A. A_1, B_1, C_1 mit $(A_1, B_1, C_1) \in \mathcal{L}$ und $\overline{D_1 A_1} \equiv \overline{D_2 A_2}$, $\overline{D_1 B_1} \equiv \overline{D_2 B_2}$, $\overline{D_1 C_1} \equiv \overline{D_2 C_2}$.

Suchen Sie dann kongruente Dreiecke und weitere kongruente Winkel. Benutzen Sie die Eindeutigkeit des Winkelantrags zum Nachweis der Kollinearität von A_2, B_2, C_2 und benutzen Sie die Aussage von Teil (a) zum Beweis von $\Delta B_1 C_1 D_1 \equiv \Delta B_2 C_2 D_2$.

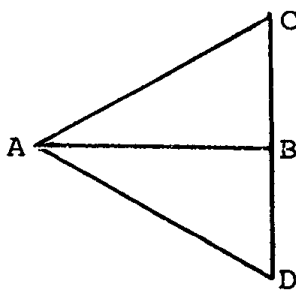
Aufgabe 57

Beweisen Sie (alternativ zu 9.17(ii)) folgenden Spezialfall des Kongruenzsatzes SSS, hier ohne Verwendung der Begriffe Mittelpunkt und Lot und deren Eigenschaften:

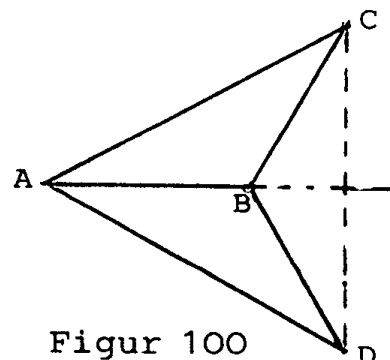
Satz vom Drachenviereck (Deltoid): Seien A, B, C, D vier Punkte einer Ebene derart, daß C und D in verschiedenen Halbebenen zu AB liegen und $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$, $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$ gilt. Dann ist $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$.



Figur 98



Figur 99



Figur 100

Lösungshinweis: Unterscheiden Sie drei Fälle (s. Figuren 98-100), beim letzten benutzen Sie die Aussage von Aufgabe 56(b)!