Kapitel II

Geordnete Geometrie

In vorigen Kapitel waren nur folgende *Grundbegriffe* eingeführt worden: *Punkte*, *Geraden*, *Ebenen und Inzidenz*. Den Begriff der Parallelität hatten wir darauf zurückgeführt.

In diesem Kapitel werden wir nun für jede Gerade eine Anordnung der Punkte einführen und damit die Begriffe Strecke und Strahl sowie eine Topologie des Raumes erklären. Man könnte versuchen, die Inzidenz auf eine Anordnung zurückzuführen; wir sehen jedoch davon ab.
Bei Euklid findet man keine Anordnungsaxiome; er benützt aber Schlüsse über Anordnungseigenschaften der Ebene und des Raumes, die ohne entsprechende Axiome nach heutiger Auffassung unbegründet sind. Hier stützt sich Euklid noch ganz auf die Anschauung. Vor Hilbert werden Anordnungsaxiome in den "Vorlesungen über neuere Geometrie" von Moritz Pasch behandelt.

Erinnerung: Unter einem *Inzidenzraum* verstehen wir weiterhin eine den Inzidenzaxiomen $(I\,1)$ - $(I\,4)$ genügende Struktur (P,G,E) und unter einem 3-dim affinen Raum einen zusätzlich die Axiome $(I\,5)$, $(I\,6)$ und (EP) erfüllenden Inzidenzraum.

§ 6. Geordnete Inzidenzräume

A) Axiome der Anordnung, Zwischenrelation

Von der reellen Zahlengeraden her sind wir gewohnt, daß ihre Punktmenge linear geordnet ist und daß durch diese Ordnung eine Zwischenbeziehung induziert wird.

(6.1) Erinnerung: Eine Menge M heißt *linear* (*total*) *geordnet*, wenn auf ihr eine Relation $\leq$ gegeben ist derart, daß für alle $A,B,C \in M$ gilt:

(a) $A \leq A$ (Reflexivität)

(b) $A \leq B \wedge B \leq A \Rightarrow A = B$ (Antisymmetrie)

(c) $A \leq B \wedge B \leq C \Rightarrow A \leq C$ (Transivität)

und

(d) Für je zwei Elementen $D,E \in M$ gilt $D \leq E$ oder $E \leq D$.
d.h.: Je zwei Elemente von $\mathcal{M}$ sind vergleichbar.

---

* Seitenzahlen eines älteren Skripts.

Für $A \leq B$ und $A \neq B$ schreiben wir $A \lneqq B$ oder $A < B$.
(Durch $\lneqq$ liegt umgekehrt $\leq$ fest).
Ist $\leq_1$ Ordnungsrelation auf M, so ist durch

$$A \leq_2 B :\Leftrightarrow B \leq_1 A$$

eine Ordnungsrelation definiert, die zu $\leq_1$ *entgegengesetzte Ordnungsrelation*.

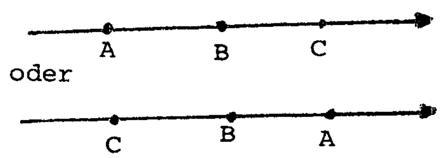
Wir betrachten im folgenden Inzidenzräume, bei der jede Gerade linear geordnet ist, also für jedes g eine lineare Ordnungsrelation $\leq_g$ existiert.

(6.2) Definition

Sind alle Geraden eines Inzidenzraumes linear geordnet, so lässt sich eine sogenannte *Zwischenrelation* Z definieren durch

(*) $(A,B,C) \in Z :\Leftrightarrow$ Es existiert ein $g \in G$ mit $A,B,C \in g$ und $(A \leq_g B \leq_g C$ oder $C \leq_g B \leq_g A)$ sowie $A \neq B \neq C$

(vgl. Figur 52). Wir nennen sie die induzierte Zwischenrelation.



Figur 52

M Hilbert ist bei seinen Axiomen von einer Zwischenrelation als neuem Grundbegriff ausgegangen. Es ist dann aber ein relativ komplizierter Beweis erforderlich, wenn man für jede Gerade die Existenz genau zweier Ordnungsrelationen mit (*) zeigen will. Wir nehmen daher die *Ordnungen der Geraden* als neue Grundbegriffe. M

(6.3) Definition

Sei $I = (P,G,E)$ ein Inzidenzraum. Auf jeder Geraden $g \in G$ sei eine Relation $\leq_g$ definiert. Dann heißt I (mit den Relationen $\leq_g$) *geordneter Inzidenzraum*, falls (mit der induzierten Zwischenrelation) gilt:

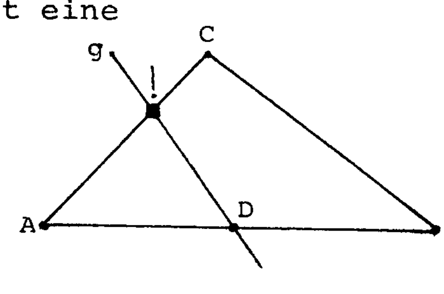
(OR 1) *Für jede Gerade g ~~ist~~ $\leq_g$ eine lineare Ordnung.*

(OR 2) *Zu je zwei verschiedenen Punkten* $A,B \in P$ *gibt es einen Punkt* $C \in P$ *derart, dass* B *zwischen* A *und* C *liegt.*

"Von A kommend gibt es (mindestens) einen Punkt C jenseits B."

(OR 3) (Axiom von Pasch)
Es seien $A,B,C \in P$ *drei nicht-kollineare Punkte und* g *eine nicht mit* A,B,C *inzidierende Gerade der Ebene durch* A,B,C. *Wenn* g *dann einen Punkt* D *enthält, der zwischen* A *und* B *liegt, so enthält* g *auch einen Punkt zwischen* A *und* C *oder einen Punkt zwischen* B *und* C.

Das Pasch-Axiom besagt also: Schneidet eine Gerade g eine Seite eines Dreiecks "im Inneren" und liegt g in der Ebene des Dreiecks, so schneidet g noch eine weitere Seite des Dreiecks im Inneren (vgl. Figur 53) oder geht durch eine Ecke.



Figur 53: Zum Pasch-Axiom

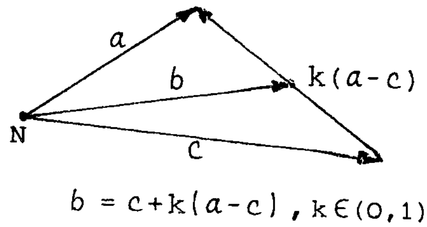
(6.4) Beispiele:

In AG(2,$\mathbb{R}$) bzw. AG(3,$\mathbb{R}$) definieren wir für die Gerade $g = p + \mathbb{R}m$ eine Ordnungsrelation $\leq_g$ durch

$$p + xm \leq_g p + ym \;:\Leftrightarrow\; x \leq y.$$

Aufgabe 29:

(a) Zeigen Sie, dass bei den Beispielen (6.4) die zugehörigen Zwischenrelationen durch $Z := \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit $a \neq c$ und $b = ka + (1-k)c$ und $0 < k < 1\}$ beschrieben wird. (vgl. Figur 54)



Figur 54

(b) Prüfen Sie bei den Beispielen (6.4) die Axiome (OR 1) bis (OR 3) nach!

(6.5) Anmerkung:

(a) Man beachte, dass der Übergang von einer gegebenen Ordnungsrelation $\leq_g$ zur entgegengesetzten Relation der Geraden g die Zwischenrelation und die Gültigkeit der Axiome der Anordnung nicht ändert.

(b) Sei I ein geordneter Inzidenzraum mit Zwischenrelation Z. Dann folgt aus (6.2) und (6.3) sofort

(**) Ist $(A,B,C) \in Z$, so sind A,B,C drei verschiedene kollineare Punkte und es gilt $(C,B,A) \in Z$ sowie $(A,C,B) \notin Z$

(c) Wir erwähnten schon, dass bei Hilbert die Zwischenrelation als Grundbegriff gewählt ist; statt (OR 1) ist dann (**) als Axiom gefordert.

(d) Falls klar ist, welche Gerade g gemeint ist, schreiben wir auch $\leq$ statt $\leq_g$.

Aufgabe 30:

Zeigen Sie, dass von drei verschiedenen kollinearen Punkten eines geordneten Inzidenzraums stets genau einer zwischen den beiden anderen liegt.

Wir leiten weitere Eigenschaften geordneter Inzidenzräume her:

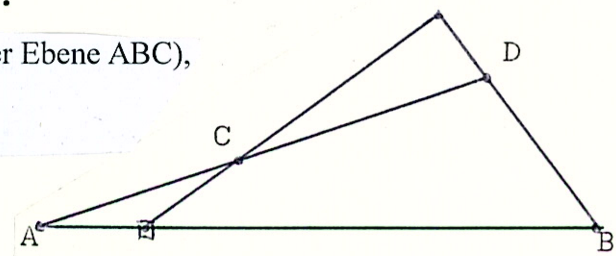
(6.6) <u>Hilfssatz</u>

Zwischen zwei verschiedenen Punkten A,B liegt stets ein dritter.

<u>Beweis:</u> Man wählt zunächst $C \notin AB$, dann D mit $(A,C,D) \in Z$, schließlich E mit $(B,D,E) \in Z$.

Nach (OR3), angewandt auf ΔABD (in der Ebene ABC), existiert der Schnittpunkt $EC \cap AB$ und liegt zwischen A und B

(s. Figur 55). □



Figur 55

(6.7) <u>Folgerung</u>

Zwischen je zwei verschiedenen Punkten einer Geraden liegen unendlich viele weitere Punkte. Insbesondere ist jede Gerade eine unendliche Menge.

<u>Beweis:</u> Seien $A,B \in P$ gegeben mit $g := AB$ und (o.B.d.A) $A \leq_g B$. Lägen zwischen A und B nur endlich viele Punkte auf g, so auch ein kleinster Punkt C mit $A \underset{\neq g}{\leq} C$. Zwischen A und C läge kein weiterer Punkt, im Widerspruch zu 6.6.

□

<u>Anmerkungen</u>
1.) Die letzte Aussage von (6.7) folgt auch schon direkt aus Axiom (OR2). (Beweis?)
2.) In der geordneten Geometrie gibt es also keine endlichen Modelle.

B) <u>Strecken und Halbgeraden</u>

Im folgenden sei $I = (P,G,E)$ stets ein geordneter Inzidenzraum.

(6.8) <u>Definition</u>

Seien $P,Q \in \mathcal{P}$. Dann nennen wir

(i) $]P,Q[\ := \{X \in \mathcal{P} \mid (P,X,Q) \in \mathcal{Z}\}$ das <u>*offene Intervall*</u> [1)]

(die *offene Strecke*) und

(ii) $\overline{PQ} := [P,Q] := \{P,Q\} \cup]P,Q[$ das *abgeschlossene Intervall*[1)] oder die (abgeschlossene) *Strecke* zwischen P und Q. Dabei heißen P und Q die *Randpunkte* von $[P,Q]$. Manchmal bezeichnet $\overline{PQ}$ auch nur das Punktepaar $\{P,Q\}$.
Achtung: Manche Autoren verwenden $\overline{PQ}$ für die Gerade durch P und Q, wir aber nicht.

(iii) Ist $P \neq Q$, so heißt ferner

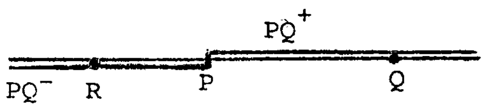
$p = \overrightarrow{PQ} := PQ^+ := [P,Q] \cup \{X \in \mathcal{P} \mid (P,Q,X) \in \mathcal{Z}\}$ eine

<u>*Halbgerade*</u> (ein <u>*Strahl*</u>, *Speer*) mit *Scheitel* P und

Trägergeraden PQ. Ist $R \in PQ \setminus PQ^+$, so verwenden wir

folgende Bezeichnung (vgl. Figur 56):

$p^- := PQ^- := PR^+$.



Figur 56

(6.9) <u>Anmerkung</u>:

Ist $P \neq Q$ und (o.B.d.A) $P \leq Q$, so gilt

$]P,Q[\ = \{X \in PQ \mid P \lneqq X \lneqq Q\}$

$[P,Q] = \{X \in PQ \mid P \leq X \leq Q\} = PQ^+ \cap QP^+$

$PQ^+ = \{X \in PQ \mid P \leq X\}$ und

$PQ^- = \{X \in PQ \mid X \leq P\}$.

(6.10) <u>Definition</u>

Unter einem *nicht-ausgearteten* <u>*Dreieck*</u> ΔABC verstehen

wir eine Menge von drei nicht-kollinearen Punkten $\{A,B,C\}$.

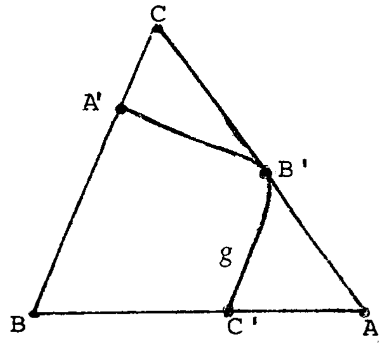
---

1) in Analogie zu entsprechenden Intervallen der reellen Zahlengeraden.

Meist werden auch die *Seiten* [AB], [BC], [AC] (bzw.]AB[etc.) mit in die Betrachtung von ΔABC mit eingeschlossen.

(6.11) Hilfssatz (Ergänzung zum Axiom von Pasch)

Keine Gerade schneidet alle drei Seiten $]A,B[$, $]B,C[$, $]A,C[$ eines nicht-ausgearteten Dreiecks ΔABC.

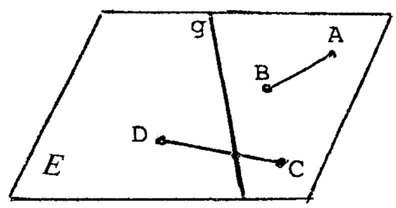


Figur 57

Beweis: Sei g eine Gerade mit $g \cap AB = C'$, $g \cap BC = A'$ und $g \cap AC = B'$ und $(A,B',C), (B,C',A), (C,A',B) \in Z$. Von den drei Punkten A', B', C' liegt einer, etwa B', zwischen den anderen (vgl. Aufg. 30). Das widerspricht dem Pasch-Axiom, angewandt auf das Dreieck $A'B\,C'$; die Gerade AC schneidet dieses nur in einer Seite; denn nach (6.5)b) liegt A nicht zwischen B und C' und C nicht zwischen A' und B (vgl. Figur 57). □

C) Seiteneinteilung

Wir wollen nun zeigen, daß jede Ebene $E \in \mathcal{E}$ durch eine Gerade in 2 "Seiten" eingeteilt wird.



Figur 58: $A \sim B$, $D \nsim C$

(6.12) Definitionen und Hilfssatz

(a) Sei $E \in \mathcal{E}$ und $g \in \mathcal{G}$ mit $g \subseteq E$.

Dann definieren wir für $A, B \in E \setminus g$ eine Relation "$\sim$" durch

$A \sim B :\Leftrightarrow [A,B] \cap g = \emptyset$ (vgl. Figur 58).

(b)

Die Relation "$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen.

(c) Jede der beiden Äquivalenzklassen heißt *offene Halbebene* von E mit Randgeraden g oder auch *Seite*.

(6.13) Folgerung

> Ist E eine Ebene eines geordneten Inzidenzraumes und g eine Gerade in E, so teilt g die Punktmenge $E \setminus g$ auf eindeutige Weise in zwei disjunkte offene Halbebenen derart, daß gilt: Zwei Punkte $A,B \in E \setminus g$ liegen genau dann in verschiedenen Halbebenen (Seiten) von g, wenn zwischen A und B ein Punkt C von g liegt.

Beweis von (6.12b):

(i) Offenbar gilt stets $A \sim A$ und $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. Zu zeigen, ist die Transitivität von $\sim$, also

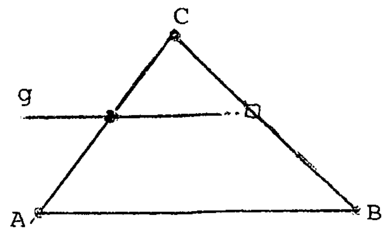
(*) $\quad A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C \quad$ für alle $A,B,C \in E \setminus g$.

Gelte daher $A \sim B$ und $B \sim C$.

1.Fall: Sind A,B,C nicht kollinear, so folgt $A \sim C$ aus dem Axiom von Pasch (s. Figur 59).

2.Fall: Seien also $A,B,C \in h$ und $h \in G$; wegen der Symmetrie von $\sim$ in $A \sim B$ und $B \sim C$ können wir o.B.d.A. $A \leq C$ voraussetzen; (andernfalls vertauschen wir A und C).

Als Fälle kommen in Frage: $B \leq A \leq C$ bzw. $A \leq B \leq C$ bzw. $A \leq C \leq B$, woraus wir dann $[A,C] \subseteq [B,C]$ bzw. $[A,C]=[A,B] \cup [B,C]$ bzw. $[A,C] \subseteq [A,B]$ erhalten.



Figur 59

Die Existenz von R mit $R \in \,]A,C[\, \cap g$ hätten damit stets $R \in [B,C]$ oder $R \in [A,B]$ zur Folge, ein Widerspruch zu $A \sim B$ und $B \sim C$.

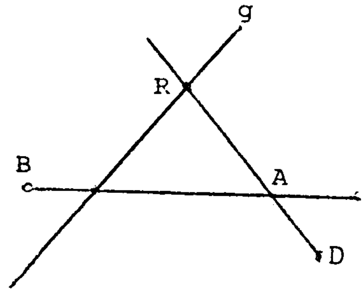
Damit ist bewiesen, daß "$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Es existieren mindestens 2 Äquivalenzklassen: Man wähle $A \in E \setminus g$ und $B \in g$; dann existiert ein C mit $(A,B,C) \in Z$. Es liegen dann A und C in verschiedenen Klassen.

Zum Nachweis des Vorliegens von genau 2 Äquivalenzklassen beweisen wir:

(**) $\quad A \not\sim B \wedge B \not\sim C \Rightarrow A \sim C.$

Im Fall $C \notin AB$ folgt das aus Hilfssatz (6.11). Im Fall $C \in AB$ sei $D \sim A$ und $D \notin AB$ (vgl. Figur 60). Solch ein Punkt D existiert: Man wählt $R \in g \setminus g \cap BC$; nach (OR 2) existiert ein D mit $(R,A,D) \in Z$. Dann ist $B \not\sim D$ (anderenfalls $A \sim B$ nach (*)), außerdem $C \sim D$ (weil (**) für nicht-kollineare Punkte gilt) und $A \sim C$ (erneut nach (*))

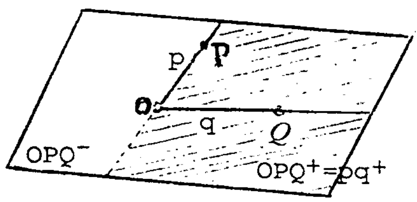


Figur 60

□

(6.14) <u>Bezeichnungen</u>: Mit OPQ^+ bezeichnen wir die offene Halbebenen der Ebene $E = OPQ$ mit Randgerade OP, in der Q liegt, mit OPQ^- die andere Halbebene zu OP in E. Ist $p = OP^+$ und $q = OQ^+$, so schreiben wir auch pq^+ statt OPQ^+ und pq^- für OPQ^- (s. Figur 61).

Figur 61



Ein analoger Satz gilt für die Punkte des Raumes:

(6.15) <u>Satz</u>

> Sei E Ebene eines geordneten Inzidenzraumes $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ mit I5 und I6. Dann teilt E die Punktmenge $\mathcal{P} \setminus E$ so in zwei Seiten H_1, H_2 (*offene Halbräume* genannt) ein, dass gilt:
>
> $H_1 \cup H_2 = \mathcal{P} \setminus E$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ und
>
> $(P \in H_1 \wedge Q \in H_2) \vee (P \in H_2 \wedge Q \in H_1) \Leftrightarrow [P,Q] \cap E \neq \emptyset$

<u>Aufgabe 31</u>:

Beweisen Sie Satz (6.15), indem Sie die Relation "≈" mit $A \approx B :\Leftrightarrow [A,B] \cap E = \emptyset$ auf die Relation aus (6.12) zurückführen.

(D) Winkel

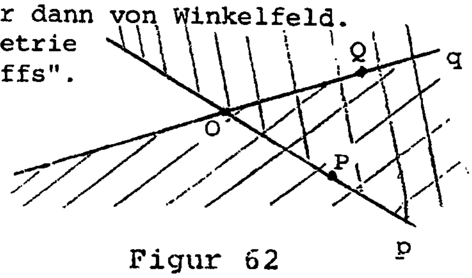
Was ist ein Winkel? Die Antworten auf diese Frage sind in der Literatur nicht einheitlich. Wir definieren:

(6.16) Definition (Winkel und Winkelfeld)

(a) Sei I ein geordneter Inzidenzraum. Unter einem *(orientierten) Winkel* verstehen wir ein geordnetes Paar $p = OP^+$, $q = OQ^+$ von nicht-kollinearen Strahlen (genannt *Schenkel*) mit demselben *Scheitel* O. Wir bezeichnen ihn mit $\sphericalangle\bullet(p,q)$ bzw. $\sphericalangle\bullet POQ$.

(b) Unter dem *unorientierten Winkel* $\sphericalangle(p,q)$ verstehen wir das ungeordnete Paar $\{p,q\}$. Ist $p = OP^+$ und $q = OP^-$, so spricht man von einem *gestreckten Winkel*, und ist $p = q$, so von einem *Nullwinkel*.

Anmerkung: Alternativ kann man unter dem Winkel $\sphericalangle POQ$ verstehen: den Durchschnitt zweier Halbebenen zu den Geraden OP und OQ (s. Fig. 62) oder deren Abschluss. Zur Unterscheidung sprechen wir dann von Winkelfeld.
Literaturhinweis: Choquet, Neue Elementargeometrie S. 79/80 "Die Schwierigkeiten des Winkelbegriffs".



Figur 62

(c) Jeder Winkel $\sphericalangle(p,q)$ (außer den gestreckten und den Nullwinkeln) teilt die Ebene E durch p und q (ohne OP, OQ) in 4 (offene) *Winkelfelder*: $pq^+ \cap qp^+$, $pq^+ \cap qp^-$, $pq^- \cap qp^+$, $pq^- \cap qp^-$. Dabei heißt $pq^+ \cap qp^+$ *inneres Winkelfeld*, Inn $\sphericalangle(p,q)$, die Vereinigung der übrigen 3 Winkelfelder einschließlich $p^- \cup q^- \setminus \{O\}$ *äußeres Winkelfeld* zum Winkel $\sphericalangle(p,q)$.

Anmerkung: Oft betrachtet man auch die entsprechenden abgeschlossenen Winkelfelder, z.B. Inn $\sphericalangle(p,q) \cup p \cup q$.

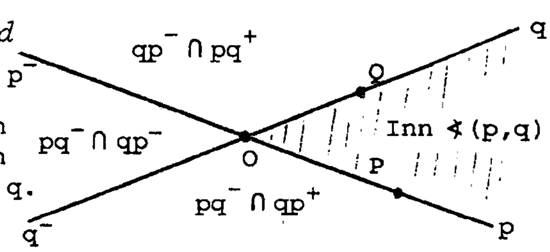


Fig. 63

(d) Ist E_1 Halbebene von E zur Geraden g und $P \in g$, so heißt E_1 *gestrecktes Winkelfeld* mit Scheitel P. Eine von P ausgehende Halbgerade heißt auch *Nullwinkelfeld*.

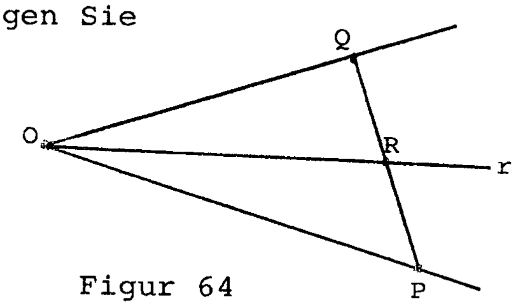
Aufgabe 32. Sei I ein geordneter Inzidenzraum und $E \in \mathcal{E}$ eine Ebene von I. Zeigen Sie:

(a) Ist $\sphericalangle POQ$ Winkel in E, so liegen $OQ^+ \setminus \{O\}$ und $OQ \setminus OQ^+$ in verschiedenen Halbebenen der Ebene E bzgl. der Geraden OP.

(b) Sei $\sphericalangle POQ$ Winkel in E. Zeigen Sie

$$\mathrm{Inn} \sphericalangle POQ = \bigcup_{R \in]P,Q[} OR^+ \setminus \{O\}$$

(vgl. Figur 64).



Figur 64

E.* Anhang:

Rechnen mit der Zwischenbeziehung *

In geordneten Inzidenzräumen kann man mit der Zwischenbeziehung und Seiteneinteilung auch rechnen. Wir beschränken uns diesbezüglich auf die Stellung zweier Aufgaben, für die wir folgende Schreibweise vereinbaren:

(6.17) Definition

(a) Für kollineare Punkte A,B,C sei

$$S(A,B,C) := \begin{cases} -1 & \text{falls } (A,B,C) \in Z \\ +1 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

(b) Für eine Ebene E, eine Gerade $g \subseteq E$ und Punkte $A,B \in E \setminus g$ sei

$$S(A,g,B) := \begin{cases} -1 & \text{falls } [A,B] \cap g \neq \emptyset \\ +1 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Die Zweckmäßigkeit der in 6.17 eingeführten Schreibweise sieht man leicht ein, wenn man ohne sie die Aussagen der folgenden beiden Aufgaben zu formulieren versucht.)

Aufgabe 33

Zeigen Sie für einen geordneten Inzidenzraum folgende Aussagen:

(i) Seien $E \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{G}$ mit $g \subset E$ und $A,B,C \in E \setminus g$. Dann gilt:

$$S(A,g.B)\cdot S(B,g,C)\cdot S(C,g,A) = 1 \quad .$$

(ii) Für vier verschiedene kollineare Punkte $A,B,C,D \in \mathcal{P}$ gilt stets: $S(A,D,B)\cdot S(B,D,C)\cdot S(C,D,A) = 1$.

Lösungshinweis: ad (i) Beachten Sie die Aussagen (*) und (**) im Beweis zu 6.12b).

ad (ii) Wählen Sie eine Gerade g durch D mit $A \notin D$ und zeigen Sie für $X,Y \in AB \setminus \{D\}$:

$$S(X,g,Y) = -1 \Leftrightarrow S(X,D,Y) = -1 .$$

Aufgabe 34*Δ

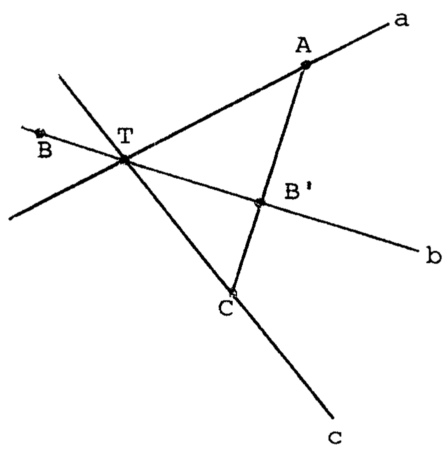
Seien a,b,c verschiedene Geraden einer Ebene $E \in \mathcal{E}$ mit gemeinsamem Punkt T; ferner seien $A \in a \setminus \{T\}$, $B \in b \setminus \{T\}$ und $C \in c \setminus \{T\}$ (vgl. Figur 65). Zeigen Sie

(i) Es existiert eine Gerade h mit $T \notin h$, die a,b und c schneidet.

(ii) Es gilt $S(A,b,C)\cdot S(B,c,A)\cdot S(C,a,B) = -1$.

Lösungshilfe: Führen Sie den Beweis zunächst unter der Einschränkung, daß A,B,C kollinear sind, und zwar unter Verwendung von Aufgabe 33 und

$$S(A,B,C)\cdot S(B,C,A)\cdot S(C,A,B) = -1 .$$



Figur 65