Einleitung

M*) Geometrie ist ursprünglich die Beschreibung einer mathematischen Struktur, die wesentliche Eigenschaften unseres *Erfahrungsraumes* mit guter Annäherung wiedergibt. Die im *Anschauungsraum bzw. der Zeichenebene empirisch* gewonnenen Aussagen sind nur im Rahmen von Fehlergrenzen und nur für den beobachteten Bereich gültig.

Die Schwächen der "Erfahrungsgeometrie" lassen sich in der Schule u.a. durch Eingehen auf Ungenauigkeit von Zeichnungen (z.B. Vergrößerung des Bildes eines "Schnittpunktes" dreier Geraden) oder auf Möglichkeiten optischer Täuschung andeuten.

In der *deduktiven (axiomatischen) Geometrie* wählt man geeignete Aussagen der Erfahrungsgeometrie als Axiome (unbewiesene Grundsätze) aus und zieht aus diesen logisch "exakt" Folgerungen.

Absolut genaue *Übereinstimmung* zwischen geometrischer Theorie und beobachteter Erfahrung ist dabei nicht zu erwarten: "Insofern sich Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit" (A. Einstein). Gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie ist z.B. die "euklidische Geometrie" nicht die am besten passende Beschreibung geometrischer Sachverhalte.

Das klassische Werk der Elementargeometrie wurde um 300 v.Chr. in griechischer Sprache geschrieben; es ist (neben arithmetischen Betrachtungen) enthalten in dem 13-bändigen Buch "Die Elemente" (altgriechisch: $\Sigma\tau o\iota\chi\epsilon\tilde{\iota}\alpha$), in dem EUKLID von Alexandria das mathematische Wissen seiner Zeit zusammengetragen hat und streng zu begründen versuchte. Es war zwei Jahrtausende lang das einflussreichste mathematische Lehrbuch.
Die "Elemente" zeigen den Versuch, bei rein logischem Aufbau aus einfachen scheinbar selbstverständlichen Axiomen einen höchsten Grad von Exaktheit zu erreichen. Dieses (bis 1900 nicht voll erreichte) Ziel färbte auch auf andere mathematische Disziplinen ab; es ist seither Ideal mathematischen Vorgehens.

Ein heutigen Ansprüchen an mathematische Strenge genügender Aufbau der euklidischen Geometrie aus (entsprechend abgewandelten) Axiomen von Euklid gelang *David HILBERT* in seinem berühmten

---

*) Mit M|M kennzeichnen wir Textpassagen, die der Motivation dienen sollen; bei diesen achten wir nicht immer auf strengen deduktiven Aufbau.

Buch "Grundlagen der Geometrie" (1899). Besonders zu erwähnen ist hier, dass Grundbegriffe wie Punkt, Gerade, Ebene usw. nicht definiert werden, insbesondere nicht als Punkte, Geraden, Ebenen des Anschauungsraumes gesehen werden (Loslösung von der sogenannten *"ontologischen Bindung"*). Durch die Axiome werden lediglich Beziehungen zwischen den Grundbegriffen festgelegt. Für alle Objekte, die diesem Axiomensystem genügen, (- auch solche, die nicht der Anschauung entnommen werden -) ist die entsprechende Theorie anwendbar (Beispiele s.u.).

Traditionell unterscheidet man in der Geometrie verschiedene *Klassen von Axiomen*. Diese betreffen:

I. Inzidenzaussagen, z.B. a) je zwei verschiedene Punkte liegen auf einer Geraden, b) zwei Ebenen haben keinen oder mehr als einen Punkt gemeinsam, c) eine gegebene Gerade schneidet eine Ebene usw.

II. Anordnungsaussagen, z.B. a) Der Punkt C liegt zwischen den gegebenen Punkten A und B (auf der Geraden g), b) die Punkte A und B liegen auf verschiedenen Seiten der betrachteten Ebene, c) der Punkt D liegt im Inneren des Dreiecks ABC usw.

III. Kongruenzaussagen, z.B. a) zwei gegebene Strecken sind gleich lang, b) zwei bestimmte Winkel haben gleiches Maß c) zwei gegebene Dreiecke sind kongruent usw.

IV. Aussagen über Parallelität z.B. a) zwei gegebene Geraden sind parallel (d.h. entweder identisch oder punktfremd und in einer Ebene gelegen) b) zwei bestimmte Ebenen sind parallel (d.h. identisch oder punktfremd).

Auch bei Klasse IV handelt es sich im Grunde um Inzidenzaussagen. Dass sie gesondert behandelt wird, hat historische Gründe. Das berühmt-berüchtigte Parallelenaxiom besagt (in moderner Fassung - bei Euklid steht es anders):

Zu jeder Geraden a und zu jedem Punkt B, der nicht auf a liegt, gibt es genau eine zu a parallele Gerade b durch B.

Die Geometer haben sich 2000 Jahre lang u.a. mit der Frage beschäftigt, ob sich dieses Axiom aus den übrigen Axiomen ableiten lässt, oder ob es wirklich benötigt wird. (Schon Euklid bemühte sich, möglichst viele Sätze ohne Verwendung des Parallelenaxioms zu beweisen.)
Dass das Parallelenaxiom von den anderen Axiomen unabhängig ist, wurde erst im 19. Jahrhundert von János BOLYAI und Nikolai LOBATSCHEWSKI bewiesen. Damit begründeten sie die Nichteuklidische Geometrtie. (Auch Carl Friedrich GAUSS hatte diese entwickelt, aber seine Arbeit nicht veröffentlicht). Gleichzeitig bedeutete diese Entwicklung, dass nun auch die Krümmung des Raumes berücksichtigt werden konnte (–die gerade Strecke nicht mehr als kürzeste Verbindung zweier Punkte–), eine Voraussetzung für den Wandel des Raumbegriffs in der modernen Physik, insbesondere im Rahmen der Relativitätstheorie.

V. Stetigkeitsaussagen

Hierunter fallen z.B. Aussagen über "archimedische Anordnung", "Intervallschachtelungen" etc., wie sie aus der Analysis bekannt sind.

Seit Hilbert und zum Teil schon vorher haben sich die Geometer bemüht, geometrische Sätze möglichst ohne Verwendung von Stetigkeitsaxiomen zu beweisen.

Nun ist die "komplizierte" Elementargeometrie nach Euklid und Hilbert nicht die einzige Möglichkeit, Geometrie zu betreiben. Z.B. besteht die Geometrie-Ausbildung in den Anfangssemestern der Universität aus der *analytischen Geometrie* (Anwendung der linearen Algebra) und Analysis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Für die Schule propagieren einige Didaktiker sogar eine Beschränkung auf diese Art, Geometrie zu betreiben (- Schlagwort: "Euclid must go").

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Hilbertschen sogenannten synthetischen Geometrie (mit den undefinierten Grundbegriffen Punkt, Gerade etc.) und der (neueren, von René DESCARTES begründeten) analytischen Geometrie ?

Im - der analytischen Geometrie zugrundeliegenden - *algebraischen Modell* (d.h. im $\mathbb{R}^3$ mit sinnvollen Definitionen von Punkt, Gerade, Ebene, Strecke, Strahl, Halbebene, Länge, Abstand, Winkel, Bewegung, Spiegelung, Kongruenz, Ähnlichkeit usw.) gelten die Axiome von Hilbert/Euklid. Die Frage, ob umgekehrt die Axiome "bis auf Isomorphie" auf das algebraische Modell führen, bzw. welche Teilsysteme des Gesamtaxiomensystems auf welche Modelle führen, ist das Hauptproblem der *Grundlagen der Geometrie*. Wir werden versuchen, einige Aspekte dieser Richtung in unsere Betrachtungen einzubeziehen.

Ein weiterer Ansatz, Geometrie zu begründen, verwendet Eigenschaften geeigneter geometrischer Abbildungen, insbesondere Spiegelungen. Diese Vorgehensweise war und ist (vor allem in der Geometrie der Ebene) sowohl auf wissenschaftlichem Niveau (vgl. BACHMANN), als auch in der Schulmathematik sehr erfolgreich. In Kapitel IV werden wir verstärkt auf elementare Schlußweisen der *Abbildungsgeometrie* eingehen.

M

Zur Entwicklung von geometrischen Beziehungen und Begriffen in der Schule siehe die Literatur zur Didaktik der Geometrie !