Axiome für den 3-dim euklidischen Raum

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ Inzidenzraum; o.B.d.A. $\mathcal{G},\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(\mathcal{P})$

Ebene Inzidenzaxiome (1.2)

$\mathcal{I}1$ Verbindungsaxiom

Zu je zwei verschiedenen Punkten $P,Q \in \mathcal{P}$ gibt es stets genau eine Verbindungsgerade, d.h. ein $g \in \mathcal{G}$ mit $P,Q \in g$.

$\mathcal{I}2$ Reichhaltigkeitsaxiom

Es gibt mindestens 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Auf jeder Geraden liegen mindestens 2 Punkte.

Räumliche Inzidenzaxiome (1.5)

$\mathcal{I}3$ Zu je drei nicht kollinearen Punkten A,B,C gibt es genau eine Verbindungsebene (, d.h. ein $E \in \mathcal{E}$ mit $A,B,C \in E$). In jeder Ebene liegt mindestens ein Punkt.

$\mathcal{I}4$ Wenn zwei Punkte einer Geraden g in einer Ebene E liegen, so liegen alle Punkte von g in E.

Dimensionsaxiome (1.8) & (1.13)

$\mathcal{I}5$ Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so haben sie mindestens einen weiteren Punkt gemeinsam.

$\mathcal{I}6$ Es gibt mindestens 4 Punkte, die nicht alle in derselben Ebene liegen.

Euklidisches Parallelenaxiom (2.3)

EP Zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $B \notin g$ gibt es genau eine Gerade h durch B, die zu g parallel ist (, d.h. g nicht schneidet und in einer Ebene mit g liegt.)

Anordnungsaxiome (6.3) (für die auf jeder Geraden erklärte Relation $\leq_g$ und die induzierte Zwischenrelation);

OR 1 Für jede Gerade g ist $\leq_g$ eine lineare Ordnungsrelation.

OR 2 Zu je zwei verschiedenen Punkten $A,B \in P$ gibt es mindestens *einen Punkt* $C \in P$ derart, dass B *zwischen* A und C liegt.

OR 3 Axiom von Pasch

Für je 3 nicht-kollineare Punkten $A,B,C \in P$ und jede nicht mit A,B,C inzidierende Gerade g der Ebene durch A,B,C gilt: Enthält g einen Punkt, der zwischen A und B liegt, so enthält g auch einen Punkt zwischen A und C oder einen Punkt zwischen B und C.

Kongruenzaxiome (für die Strecken- und Winkelkongruenz, hier etwas stärker, als im Text gefordert; s.(9.2)u.(9.3)

KO 2 & KO 4 (ii) Die Strecken- und Winkelkongruenz sind *Äquivalenzrelationen.*

KO 1 Axiom des Streckenabtragens

Zu jeder Strecke $\overline{PQ}$ mit $P \neq Q$ und jede Halbgerade RS^+ mit $R \neq S$ gibt es genau einen Punkt $T \in RS^+$ mit $\overline{PQ} \equiv \overline{RT}$

KO 3 Axiom der Streckenaddition

Liegt Q zwischen P und R und T zwischen U und S, dann folgt aus $\overline{PQ} \equiv \overline{ST} \wedge \overline{QR} \equiv \overline{TU}$ auch $\overline{PR} \equiv \overline{SU}$.

KO 4 (i) Axiom des Winkelantragens

Zu jedem Winkel $\measuredangle(p,q)$ *) und jeder Fahne (PQ^+, PQR^+) gibt es genau eine Halbgerade $s = PS^+$ mit $S \in PQR^+$ und $\measuredangle(p,q) \equiv \measuredangle(r,s)$. (*) Vor.: p,q nicht kollinear)

KO 5 Axiom der Dreieckskongruenz

Es gilt der Kongruenzsatz SWS, d.h. für je zwei Dreiecke gilt: Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel des ersten Dreiecks jeweils kongruent zu zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel des zweiten Dreiecks, so sind die beiden Dreiecke kongruent.

Für den *reellen 3-dim euklidischen Raum* werden zusätzlich gefordert: *Stetigkeitsaxiome* (Axiom des Messens und der Vollständigkeit s. § 12).

Vereinfachtes alternatives Axiomensystem für die desarguessche euklidische Ebene

Sei $E = (P, G)$ ein geordnete dearguessche affine Ebene, d.h. eine Inzidenzstruktur, für die gilt:

Verbindungsaxiom (I1) (s.o.)
Reichhaltigkeitsaxiom (I2)
Euklidisches Parallelaxiom (EP) (mit $g \parallel h \Longleftrightarrow g = h \vee g \cap h = \emptyset$)
Gültigkeit des Satzes von Desargues (s. (2.18))
Anordnungsaxiome (OR 1 - OR 3)

Den Koordinatenschiefkörper bezeichnen wir mit K. Zusätzlich fordern wir für die desarguessche euklidische Ebene.

<u>Streckenlängenaxiom</u>

Jeder Strecke $\overleftrightarrow{PQ}$ ist eine Länge $|\overrightarrow{PQ}| \in K_0^+$ zugeordnet derart, dass gilt:

(i) Additivität: $|\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{RQ}| = |\overrightarrow{PQ}|$ für alle $P, Q \in P$ und alle $R \in [PQ]$

(ii) Streckenabtragen: $\forall P, Q, R, S \in P \ \exists 1 \ T \in PQ^+ : |\overrightarrow{PT}| = |\overrightarrow{RS}|$.

(iii) Verhalten bei Streckungen: Ist σ zentrische Streckung mit Streckfaktor k, so gilt $|\overrightarrow{\sigma(P)\sigma(Q)}| = |k|\,|\overrightarrow{PQ}|$.

<u>Winkelgrößenaxiom</u>

Jedem Winkel $\measuredangle(p,q)$ ist eine Größe $|\measuredangle(p,q)|$ (aus einer linear geordneten Menge mit teilweise erklärter kommutativer Addition) zugeordnet derart, dass gilt

(i) Additivität und Monotonie: $|W_1| + |W_2| = |W| \geq |W_1|$, falls W die Summe von W_1 und W_2 ist.

(ii) Winkelabtragen: Für jede Fahne (p, H_1) und jeden Winkel W_1 existiert genau ein Winkel W mit Schenkel p und $W \subseteq H_1 \cup p$ sowie $|W| = |W_1|$.

<u>Axiom der freien Beweglichkeit</u>

Zu je zwei Fahnen F_1, F_2 gibt es genau eine Bewegung (d.h. streckenlängen- und winkelgrößentreue Kollineation), die F_1 auf F_2 abbildet.