## § 10 Streckenlängen und Winkelgrößen

Intuitiv haben wir die Vorstellung, dass zwei Strecken genau dann kongruent sind, wenn sie gleich lang sind. Bisher haben wir Längen von Strecken nicht eingeführt. Wir wollen sie zunächst über die Kongruenz definieren und erst später mit "Zahlen" in Verbindung bringen. Analog gehen wir bei Winkeln vor.

<u>Generalvoraussetzung</u>: Gegeben sei weiterhin ein Inzidenzraum, der den Anordnungsaxiomen und Kongruenzaxiomen genügt.

### A) Definitionen und erste Ergebnisse

(10.1) <u>Definition</u> (Länge von Strecken, Größe von Winkeln)

(a) Die Kongruenzklasse, zu der eine Strecke $\overline{PQ}$ gehört, heißt <u>Länge der Strecke $\overline{PQ}$</u>, in Zeichen $\ell(\overline{PQ})$. *) **)

Insbesondere gilt also $\boxed{\ell(\overline{PQ})=\ell(\overline{RS}) \Leftrightarrow \overline{PQ} \equiv \overline{RS}.}$

Die Mengen der Längen nennen wir $\mathcal{L}$. (Ihre Elemente bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben).

(b) Analog heißt die Kongruenzklasse, zu der der Winkel $\sphericalangle(p,q)$ gehört, die <u>Größe des Winkels</u> $\sphericalangle(p,q)$, in Zeichen $g(\sphericalangle(p,q))$.

Insbesondere gilt $\boxed{g(\sphericalangle(p,q))=g(\sphericalangle(r,s)) \Leftrightarrow \sphericalangle(p,q) \equiv \sphericalangle(r,s)}$.

Die Größe der Nullwinkel bezeichnen wir mit $O$, die der gestreckten Winkel mit $2R$ (zur Begründung siehe 10.5).

Die Menge der Winkelgrößen nennen wir $\mathcal{W}$. (Ihre Elemente bezeichnen wir meist mit kleinen griechischen Buchstaben.)

Wir wollen nun eine Ordnungsrelation und eine Addition auf $\mathcal{L}$ und $\mathcal{W}$ einführen. Dazu tragen wir Strecken und Winkel auf einem Bezugsstrahl bzw. in einer Bezugshalbebene ab.

(10.2) <u>Vergleich von Streckenlängen</u>

(a) <u>Definition</u>

Sei $p^* = O^*E^{*+}$ eine fest gewählte Halbgerade und $E^* > O^*$.

Für $a,b \in \mathcal{L}$ sei

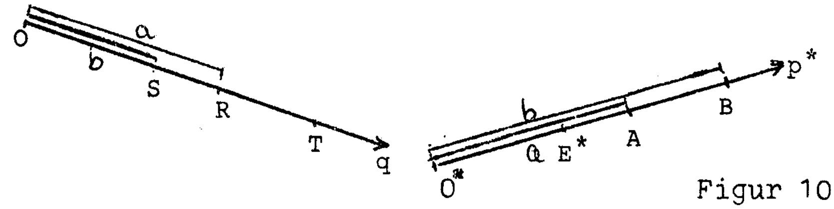
$a < b :\Leftrightarrow$ Für die (eindeutigen) Punkte $A,B \in p^*$ mit $\ell(\overline{O^*A}) = a$ und $\ell(\overline{O^*B}) = b$ gilt $A < B$ (s.Figur 101 ).

---

*) Wir unterscheiden zunächst zwischen der Länge $\ell(\overline{PQ})$ der Strecke $\overline{PQ}$ und der Maßzahl $|\overline{PQ}|$ der Länge. Entsprechend unterscheiden wir zwischen der Größe eines Winkels und seiner Maßzahl (später aber nicht mehr).

**) Wie in der Mathematik nicht unüblich, führen wir einen schwierig zu definierenden Begriff dadurch ein, dass wir charakteristische Eigenschaften zur Definition einer Äquivalenzrelation und der zugehörigen Äquivalenzklassen benutzen: Zwei Strecken heißen genau dann "gleich lang", wenn sie kongruent sind. Die zugehörige Äquivalenzklasse besteht dann aus Strecken gleicher Länge. Analog definiert man Winkel gleicher Größe.

(b) (i) Die Relation $\leq$ ist eine lineare Ordnungsrelation auf $L$; (ii) sie ist unabhängig vom Bezugsstrahl $p^*$.




Figur 101

Beweis

(i) Daß $\leq$ eine lineare Ordnungsrelation auf $L$ ist, folgt sofort aus der analogen Eigenschaft von $\leq|_{O^*E^{*+}}$

(ii) Seien $A,B \in p^*$ mit $\ell(\overline{O^*A})=a$, $\ell(\overline{O^*B})=b$ und $a<b$; seien ferner q eine weitere Halbgerade, O Scheitel von q und R,S Punkte aus q mit $\ell(\overline{OR})=a$, $\ell(\overline{OS})=b$ und $S>O$. Wir nehmen (entgegen der Behauptung) $S<R$ an. Es ist möglich, einen Punkt $T \in RS^-$ zu wählen, für den $\overline{AB} \equiv \overline{RT}$ gilt. Es folgt dann mit $\overline{OS} \equiv \overline{O^*B}$, $\overline{O^*A} \equiv \overline{OR}$ und $\overline{AB} \equiv \overline{RT}$ durch Streckenaddition $\overline{OS} \equiv \overline{O^*B} \equiv \overline{OT}$, im Widerspruch zum Axiom des Streckenabtragens.

□

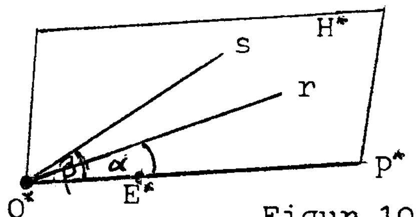
(10.3) Addition auf $L$

(a) Definition

Für $a,b \in L$ definieren wir $a+b$ folgendermaßen:
Seien $A,B \in p^*$ mit $A \leq B$, $\ell(\overline{O^*A})=a$, $\ell(\overline{AB})=b$; dann sei
$a+b := \ell(\overline{O^*B})$.

(b) Aufgrund des Streckenadditionsaxioms gilt dann für alle $Q \in [P,R]$ die Gleichung $\ell(\overline{PR})=\ell(\overline{PQ})+\ell(\overline{QR})$.

Wir vermerken ohne Beweis und Klärung der Begriffe, daß $(L,+,\leq)$ geordnete kommutative Halbgruppe ist.



Figur 102

## (10.4) Vergleich von Winkelgrößen

(a) Definition (vgl. Figur 102 !)

Sei $p^* = O^*E^{*+}$ Halbgerade und $H^*$ eine Halbebene mit Randgeraden $O^*E^*$. Für $\alpha, \beta \in \mathcal{W} \setminus \{O, 2R\}$ sei

$\alpha < \beta :\Leftrightarrow$ Für die (eindeutigen) Winkel $\measuredangle(p^*, r), (p^*, s)$ in $H^*$ mit

$$g(\measuredangle(p^*, r)) = \alpha \text{ und } g(\measuredangle(p^*, s)) = \beta \text{ gilt } r \subseteq \text{Inn } \measuredangle(p^*, s) \cup \{O^*\}.$$

Im Falle $g(\measuredangle(p,q)) < g(\measuredangle(r,s))$ sagt man auch: $\measuredangle(p,q)$ ist kleiner (oder hat kleinere Größe) als $\measuredangle(r,s)$.

(b) Die in (10.4)(a) definierte Relation ist eine lineare Ordnungsrelation auf $\mathcal{W}$; sie ist unabhängig von $p^*$ und $H^*$.

Aufgabe 58 Zeigen Sie Aussage (10.4 b).

Aufgabe 59 Zeigen Sie folgende Sätze der absoluten Geometrie:

a) In einem Dreieck ist jeder Außenwinkel größer als jeder nicht-anliegende Innenwinkel.

b) Der größeren Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.

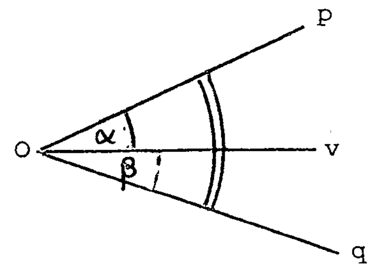
## (10.5) Anmerkung und Definition

(i) Versucht man ähnlich wie bei Streckenlängen eine Addition von Winkelgrößen zu definieren, stößt man auf das Problem daß eine Summe von Winkelgrößen größer als "zwei Rechte" sein kann. Man löst es z.B. durch Einführen orientierter Winkel oder durch eingeschränkte Definition der Winkeladdition. Wir wählen hier zunächst den 2. Weg.

(ii) Definition: Addition gewisser Winkelgrößen

$g(\sphericalangle(p,q)) = g(\sphericalangle(r,s)) + g(\sphericalangle(t,u))$ : $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Halbgerade v mit gleichem Scheitel O wie p und q derart, daß $v \subseteq \mathrm{Inn}\,\sphericalangle(p,q) \cup \{O\}$, $\sphericalangle(p,v) \equiv \sphericalangle(r,s)$ und $\sphericalangle(v,q) \equiv \sphericalangle(t,u)$ gilt (vgl. Figur 103).

Diese Definition ist nach Aufgabe 53 unabhängig von den Repräsentanten der Winkelgrößen.




$g(\sphericalangle(p,q)) = g(\sphericalangle(p,v)) + g(\sphericalangle(v,q))$

Figur 103

(iii) Nach Aufgabe 54 gibt es genau eine Kongruenzklasse *rechter Winkel.* Wir bezeichnen sie mit $R$ ; also

$$g(\sphericalangle(p,q)) = R :\Leftrightarrow \sphericalangle(p,q) \text{ ist ein rechter Winkel.}$$

(iv) Ausgehend von der Summe eines rechten Winkels und seines Nebenwinkels ordnen wir dem gestreckten Winkel $\sphericalangle(PQ^+, PQ^-)$ die Winkelgröße $2R$ zu; also:

$g(\sphericalangle(PQ^+, PQ^-)) := 2R.$ Damit gilt:

$$\boxed{g(\sphericalangle(p,q)) + g(\sphericalangle(p,q^-)) = 2R.}$$

Als weitere zentrale Resultate der absoluten Geometrie können wir nun folgende Sätze beweisen:

## B) 4. Kongruenzsatz, Dreiecksungleichung

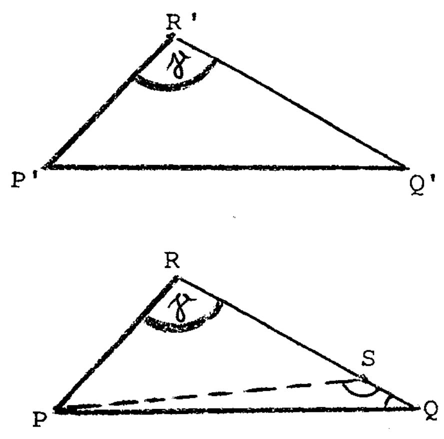
(10.6) Kongruenzsatz SsW

> Sind $\Delta PQR$ und $\Delta P'Q'R'$ Dreiecke mit $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$, $\overline{PR} \equiv \overline{P'R'}$ sowie $\ell(\overline{PQ}) > \ell(\overline{PR})$ und (für die "Gegenwinkel der längeren Seiten") $\sphericalangle PRQ \equiv \sphericalangle P'R'Q'$, dann gilt $\Delta PQR \equiv \Delta P'Q'R'$.

Beweis (vgl. Figur 104):

Wir zeigen $\ell(\overline{RQ}) = \ell(\overline{R'Q'})$.

Dazu wählen wir $S \in RQ^+$ mit $\overline{R'Q'} \equiv \overline{RS}$. Nach dem Kongruenzsatz SWS haben wir $\Delta P'Q'R' \equiv \Delta PSR$ und daher $\overline{PS} \equiv \overline{PQ}$. Sei also o.B.d.A. $P = P'$, $R = R'$ und $S = Q'$. Wir nehmen nun




Figur 104

$S \in ]R,Q[$ an; (der Fall $Q \in ]S,R[$ geht analog). Die Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks $\Delta PSQ$ wären dann kongruent: $g(\sphericalangle PSQ) = g(\sphericalangle PQS)$. Nach Aufgabe 59 folgte dann einerseits $g(\sphericalangle PRQ) > g(\sphericalangle PQS) = g(\sphericalangle PSQ)$ (Teil b), andererseits aber

$g(\sphericalangle PQS) = g(\sphericalangle PSQ) > g(\sphericalangle PRQ)$ (Teil a), ein Widerspruch. Dies zeigt $Q = S$, woraus die Behauptung folgt.

□

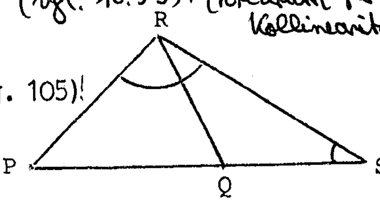
In der Analysis versteht man unter einem Abstand (einer Metrik) auf einer Menge $\mathcal{P}$ eine Funktion d: $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ mit (i) $d(P,Q) \geq 0$ und $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$, (ii) $d(P,Q) = d(Q,P)$ und (iii) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ (für alle $P,Q,R \in \mathcal{P}$). Es liegt nun nahe, in der absoluten Geometrie $d(P,Q) := \ell(\overline{PQ})$ zu definieren, (obwohl $\ell(\overline{PQ})$ nicht aus $\mathbb{R}$ ist.) Wir untersuchen Ungleichung (iii) und zeigen (vgl. auch 10.3b):

(10.7) Satz (*Dreiecksungleichung*)

| |
|---|
| Für jedes (nicht ausgeartete!) Dreieck $\Delta PQR$ gilt<br>(*) $\ell(\overline{PR}) < \ell(\overline{PQ}) + \ell(\overline{QR})$ |

Gleichheit statt < gilt in (*) genau dann, wenn P,Q,R kollinear sind und Q zwischen P und R liegt (vgl. 10.3b)! (Kriterium für Kollinearität).

Beweis




Sei $S \in QP^-$ mit $\ell(\overline{QS}) = \ell(\overline{QR})$ (s. Fig. 105)!

Dann gilt nach (10.4a):

$g(\sphericalangle PRS) > g(\sphericalangle QRS) = g(\sphericalangle QSR) = g(\sphericalangle PSR)$.

Figur 105

Aus Aufgabe 59b), angewandt auf $\Delta PSR$, folgt nun

$\ell(\overline{PQ}) + \ell(\overline{QR}) = \ell(\overline{PQ}) + \ell(\overline{QS}) > \ell(\overline{PR})$.

□

Anmerkung: Definitionsgemäß gilt auch die "Symmetrie" $\ell(\overline{PR}) = \ell(\overline{RP})$ für alle $P,R \in \mathcal{P}$. Die "strenge Positivität" $\ell(\overline{PQ}) \geq 0$ und $\ell(\overline{PQ}) = 0 \Leftrightarrow P = Q$ ist bei geeigneter Definition von $0 \in L$ ebenfalls ableitbar. Jedoch bleibt die Frage, ob $L \cong \mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ angenommen werden darf.
Mit der Beziehung zwischen Kongruenzaxiomen und Eigenschaften des Koodinatenschiefkörpes eines 3-dimensionalen affinen Raums beschäftigen wir uns u.a. im nächsten Paragraphen.