Aufgabe 38

Sei AG(3,K) affiner Raum über einem geordneten Schiefkörper K. Zeigen Sie, dass die beiden Halbräume mit Rand-Ebene $H = \{(x_1,x_2,x_3) \in K^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i h_i = c\}$, kurz $H = \{x \in K^3 \mid x \cdot \mathfrak{h} = c\}$ geschrieben, durch $H^+ = \{x \in K^3 \mid x \cdot \mathfrak{h} > c\}$ und $H^- = \{x \in K^3 \mid x \cdot \mathfrak{h} < c\}$ gegeben sind.

Lösungshinweis: Sei $a \in H^+$, $b \in H^-$. Setzen Sie $a \cdot \mathfrak{h} = c + c_a$ und $b\mathfrak{h} = c - c_b$ und betrachten Sie $ka + (1-k)b$ für $k = c_b(c_a + c_b)^{-1}$.

§ 8.* Weitere Begriffsbildungen der geordneten Geometrie

A) Konvexität

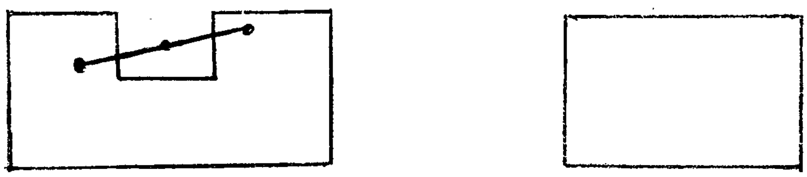
Gegeben sei ein geordneter Inzidenzraum.

(8.1) Definition

Eine Punktmenge M heißt konvex, falls gilt

$$A,B \in M \Rightarrow [A,B] \subseteq M$$

Anschauliche Beispiele: s. Figur 70.



nicht-konvex konvex

Figur 70

In einem konvexen Museumsraum ist jede Stelle von jeder anderen zu überschauen.

(8.2) Satz

(a) In einem geordneten Inzidenzraum sind die offenen und abgeschlossenen Strecken, die Strahlen, die Geraden, die offenen Halbebenen, die Ebenen konvexe Mengen. In einem 3-dim affinen Raum sind die Halbräume zu einer Ebene konvex.

(b) Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Punktmengen, die leere Menge und die einpunktigen Mengen sind konvex.

Beweis ....

Aufgabe 39:

Zeigen Sie: In einem geordneten Inzidenzraum ist jede offene und jede abgeschlossene Halbebene, jedes innere Winkelfeld und jedes abgeschlossene innere Winkelfeld konvex.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 32 a).

(8.3) Hilfssatz und Definition (konvexe Hülle)

Jede Punktmenge $L \subseteq P$ ist in einer kleinsten konvexen Menge $\mathrm{conv}(L)$ enthalten, nämlich in

$$\mathrm{conv}(L) = \bigcap\{B \mid L \subseteq B \subseteq P \wedge B \text{ konvex}\},$$

$C = \mathrm{conv}(L)$ heißt die *konvexe Hülle* von L und L heißt *konvexes Erzeugendensystem* von C.

Beweis .....

Beispiel:

$\mathrm{conv}\,\{A,B\} = [A,B]$.

Aufgabe 40:

Zeigen Sie: In $AG(3,K)$ (mit angeordnetem Schiefkörper K) ist $\mathrm{conv}(L) = \{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \mid x_1,\dots,x_n \in L,\ k_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} k_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\}$.

B)* Ordungstopologie

(8.4) Definition

Gegeben sei ein geordneter 3-dim affiner Raum mit Punktmenge P

(a) Eine Teilmenge von P heißt *offen*, falls sie Durchschnitt endlich vieler Halbräume oder beliebige Vereinigung solcher Durchschschnitte ist.

Die so definierte Menge aller offenen Teilmengen von P heißt *(An)-Ordnungstopologie*.

(b) *Abgeschlossene Mengen* sind nach Definition die Komplementärmengen offener Mengen. Die *abgeschlossene Hülle* $\mathrm{cl}(A)$ einer Teilmenge A ist definiert als $\bigcap\{H \mid H \supseteq A \text{ und } H \text{ abgeschlossen}\}$. Der *Rand* von A ist definiert als $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(P \setminus A)$.

Aufgabe 41*

Zeigen Sie, daß es zu je zwei Punkten $A, B \in P$ offene Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gibt mit $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. (Hausdorffsche Trennungseigenschaft)

Aufgabe 42*

Beweisen Sie, daß in $AG(3,\mathbb{R})$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Ordnung die Anordnungstopologie mit der aus der Analysis gewohnten Topologie (in welcher die offenen Mengen die Vereinigung beliebig vieler offener Kugeln sind) übereinstimmt.

Aufgabe 43*

Zeigen Sie, daß der Rand eines (offenen) Halbraumes zur Ebene E gleich E ist.

Ergänzende Aufgaben zu Kapitel II

Aufgabe 44: (Anwendung des Pasch-Axioms)

Zeigen Sie für einen geordneten Inzidenzraum: Sind O,A,B drei nicht-kollineare Punkte und $A' \in\,]O,A[$, $B' \in\,]O,B[$, dann gilt $]O,D[\, \cap\,]A',B'[\, \neq \emptyset$ für alle $D \in\,]A,B[$. (Vgl. Aufgabe 32b).)

Aufgabe 45 (Zur Konvexität)

Zeigen Sie für einen geordneten Inzidenzraum mit Hilfe von Aufgabe 41:

Ist $H \subseteq P$ konvex, so auch $\bigcup_{X \in H}\,]O,X[$

Aufgabe 46 (Nochmal zur Konvexität)

Zeigen Sie: Ist $F \subseteq M \subseteq P$ (in einem geordneten Inzidenzraum) und besitzt $M \setminus F$ eine Zerlegung in zwei konvexe Teilmengen M_1 und M_2 derart, daß gilt $P \in M_1 \wedge Q \in M_2 \Rightarrow\,]P,Q[\, \cap F \neq \emptyset$, so sind M_1 und M_2 (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Aufgabe 47 ("Links" einer gerichteten Geraden)

Sei K ein geordneter Körper und $A = AG(2,K)$ analog zu (7.15) bzw. Aufgabe 37 mit einer Ordnung versehen. Zu $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ und $C = (c_1, c_2)$ definiert man:

C liegt links von der gerichteten Geraden $\overrightarrow{AB}$, d.h. von $(AB, \leq)$ mit $A < B$, wenn gilt

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Zeigen Sie, daß die Menge der Punkte C, die links von $\overrightarrow{AB}$ liegen, eine der Halbebenen mit Randgeraden AB bilden.

Aufgabe 48$^{\Delta *}$ ("Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene)

Literaturhinweise: H. Lenz: Nichteuklidische Geometrie, Mannheim 1967
F. Reinhardt, H. Soeder: DTV-Atlas zur Mathematik Bd.I München 1974

Wie definieren (P,G,E) durch

$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

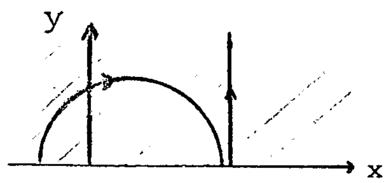
G: alle Mengen der Form $\{(x,y) \in P \mid (x-a)^2 + y^2 = r^2\}$ zu $a, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ und der Form $\{(x,y) \in P \mid x = a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$ (vgl. Figur 71 !)

$E := \{P\}$

P wird lexikographisch geordnet, d.h.

$(x,y) < (x_1, y_1) :\Leftrightarrow x < x_1 \vee (x = x_1 \wedge y < y_1)$.

Jede "Gerade" sei dann mit der eingeschränkten Ordnung versehen.



Figur 71

Zeigen Sie, daß die Inzidenzaxiome $(I1)$ - $(I5)$ und die Anordnungsaxiome (OR 1) - (OR 3), nicht aber das Parallelaxiom erfüllt sind.

Aufgabe 49$^{\Delta *}$ (Ableitung einer "Möbiusebene")

(Literatur: Scheid, Powarzynski: Math. f. Lehramtskand. III, p. 35ff)

Mit $N = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ und einem Objekt P_∞ mit $P_\infty \notin \mathbb{R}^2$ definieren wir

$\mathcal{P} := \mathbb{R}^2 \cup \{P_\infty\} \setminus \{N\}$

$\mathcal{G}$: (i) Alle Mengen der Form $\{(x,y) \in \mathcal{P} \mid y = ax\} \cup \{P_\infty\}$ zu $a \in \mathbb{R}$

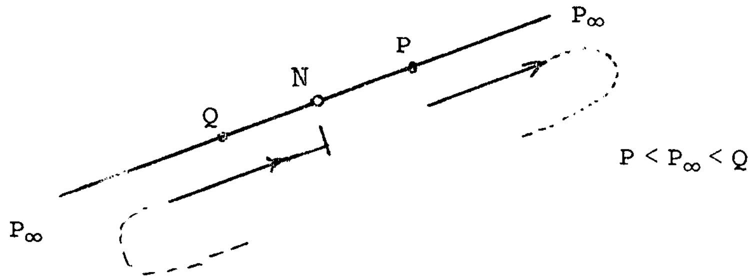
(ii) die Menge $\{(x,y) \in \mathcal{P} \mid x = 0\} \cup \{P_\infty\}$

und

(iii) Alle Kreislinien der Form $\{(x,y) \in \mathcal{P} \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2\}$ zu $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (durch N ohne den Punkt N)

$\mathcal{E} = \{\mathcal{P}\}$

Die Punkte einer Geraden vom Typ (i) oder (ii) seien wie in Figur 72 angedeutet geordnet:



Figur 72

Die Punkte der Geraden vom Typ (iii) seien wie folgt geordnet:

$$(q_1, q_2) < (p_1, p_2) \;:\Leftrightarrow\; \det \begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix} > 0.$$

(Diese Ordnung stimmt mit einer der beiden intuitiv auf der Kreislinie gegebenen Ordnungen weitgehend überein.)

Untersuchen Sie, inwieweit Inzidenz- und Anordnungsaxiome erfüllt sind.