§ 7 Geordnete affine Räume

Generalvoraussetzung:

In diesem Paragraphen betrachten wir nur geordnete 3-dim affine Räume, also Inzidenzräume mit $I5$, $I6$, EP und OR 1 - OR 3. Wir wollen das Verhalten der Zwischenrelation unter Parallelprojektionen und die Folgen für die Koordinatisierung untersuchen.

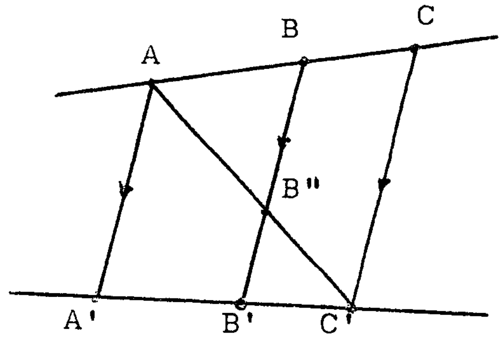
A) Ordnung und Parallelprojektion

(7.1) Hilfssatz

> In einem geordneten (3-dim) affinen Raum bleibt bei einer Parallelprojektion (bzw. einer Translation) einer Geraden auf eine andere die Zwischenrelation erhalten.

Beweisskizze:

Man wendet das Pasch-Axiom auf die Situation der Figur 66 an: Aus $(A,B,C) \in Z$ folgt $(A,B'',C') \in Z$ und daraus $(A',B',C') \in Z$. $\square$



Figur 66

Anmerkung: Wie nach dem Beweis zu (3.4) erwähnt, induziert eine Translation eine Parallelprojektion einer Geraden auf ihr Bild.

(7.2) Folgerung

> Seien g und h verschiedene Geraden eines geordneten (3-dim) affinen Raumes und π eine Parallelprojektion von g auf h (oder eine Translation, die g auf h abbildet). Dann gilt entweder
>
> $$A \leq_g B \Longleftrightarrow \pi(A) \leq_h \pi(B) \quad \text{für alle } A,B \in g$$
>
> oder
>
> $$A \leq_g B \Longleftrightarrow \pi(B) \leq_h \pi(A) \quad \text{für alle } A,B \in g.$$

Beweis:

Es gelte $R \leq_g S$ und $\pi(R) \leq_h \pi(S)$ für zwei feste Punkte $R,S \in g$. (Anderenfalls betrachtet man statt $\leq_h$ die zu $\leq_h$ entgegengesetzte Ordnungsrelation).

Nach 7.1 folgt für alle Punkte $X,Y,Z \in g$ aus $X \leq_g Y \leq_g Z$ sofort $\pi(X) \leq_h \pi(Y) \leq_h \pi(Z)$ oder $\pi(Z) \leq_h \leq \pi(Y) \leq_h \pi(X)$.

Ist nun $A \leq_g B$, so wählt man $(X,Y,Z) = (B,R,S)$; dann entspricht wegen $\pi(R) \leq_h \pi(S)$ die Anordnung von $\pi(B)$, $\pi(R)$, $\pi(S)$ derjenigen von B,R und S. Der gleiche Schluss mit $(X,Y,Z) = (A,B,R)$ zeigt nun $\pi(A) \leq_h \pi(B)$. Die Umkehrung ergibt sich durch Verwendung von π^{-1}.

□

7.3) Anmerkung

Zwei beliebige Geraden g und h eines 3-dim affinen Raumes kann man durch geeignete hintereinandergeschaltete Parallelprojektionen aufeinander abbilden, nämlich g auf eine Hilfsgerade k und k auf h. (Man wählt z.B. k als Durchschnitt einer g enthaltenden Ebene mit einer h enthaltenden Ebene.)

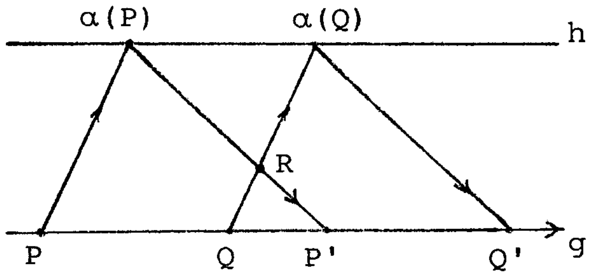
Das zeigt, dass $\leq_h$ durch $\leq_g$ schon bis auf den Übergang zur entgegengesetzten Ordnungsrelation festgelegt ist.
Der erwähnte Übergang ist dabei stets möglich, da die Zwischenrelation dadurch nicht geändert wird (vgl. Anm. 6.5 a) und sich die anderen Begriffe der geordneten Geometrie auf die Zwischenrelation zurückführen lassen.

Auf jeder Geraden g haben wir damit zwei mögliche Orientierungen, nämlich $\leq_g$ und $\geq_g$, die zu $\leq_g$ entgegengesetzte Ordnungsrelation. Diese beiden wollen wir im weiteren als gleichberechtigt ansehen.

Aufgabe 35

Zeigen Sie: Seien g und h verschiedene parallele Geraden eines geordneten 3-dim affinen Raumes. Ist dann α eine Parallelprojektion (bzw. Translation) von g auf h und β eine Parallelprojektion (bzw. Translation) zurück auf g, so erhält $\beta \circ \alpha$ die Orientierung von g.

Lösungshinweis: Sei $P \in g$ mit $P < P' = \beta \circ \alpha(P)$. (Der Fall $P > P'$ geht analog). Nach 7.2. erhält $\beta \circ \alpha$ die Orientierung von g oder dreht sie um. Daher genügt es, einen Punkt $Q \neq P$ zu finden, dessen relative Ordnung zu P erhalten bleibt. Wählen Sie Q mit $(P,Q,P') \in Z$. (vgl. Figur 67)

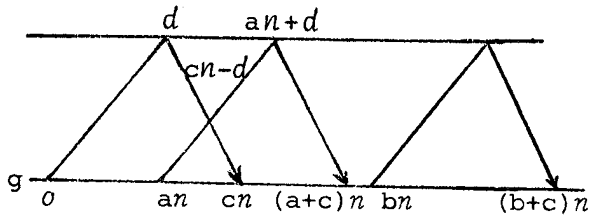


Figur 67: zu Aufgabe 35

B)* Koordinaten

Die Ordnung des affinen Raumes spiegelt sich naturgemäß im Koordinatenbereich wider:

Sei $A = (P,G,E)$ mit einer Ordnung versehen und $A \cong AG(3,K)$. Nach Auszeichnung eines Nullpunktes N identifizieren wir wieder Punkte und Ortsvektoren. Es sei $n \neq 0$ ein Ortsvektor und g die Gerade Kn. Wir ordnen g so, daß $n > 0$ gilt. Wir definieren eine Relation $\leq_K$ auf K durch $a \leq_K b :\Leftrightarrow an \leq_g bn$. Offenbar ist $\leq_K$ eine lineare Ordnungsrelation auf K mit $0 <_K 1$. (Auch für diese Relation schreiben wir $\leq$). Die Translation $w \longrightarrow w + cn$, eingeschränkt auf g, lässt sich aus zwei Parallelprojektionen zusammensetzen (s. Figur 68). Nach Aufgabe 35 wird dabei die Ordnung auf g erhalten. Also gilt für alle $a,b,c \in K$



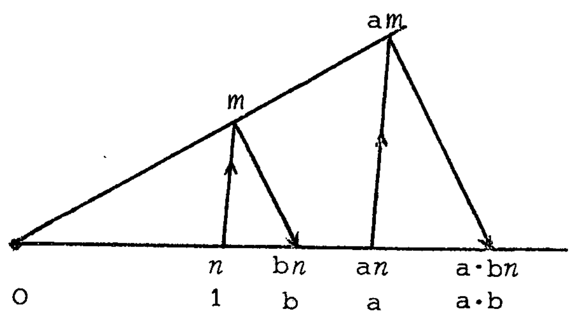
Figur 68

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \text{(für alle } a,b,c \in K).$$

Wir wollen weiter zeigen, daß aus $a > 0$ und $b > 0$ auch $a \cdot b > 0$ folgt. Dazu setzen wir die Multiplikation mit a (Ausführung einer eigentlichen Dehnung) und b mit zwei Parallelprojektionen in Beziehung (s. Figur 69).

Nach 7.2 erhalten die beiden Parallelprojektionen die Ordnung auf g oder drehen sie um.

Wegen $0 < 1$ und $b \cdot 0 = 0 < b = b \cdot 1$ bleibt die Ordnung erhalten.
Damit folgt aus $0 < a$ auch $0 < a \cdot b$, was wir zeigen wollten. □



Figur 69

Definition

Ein Schiefkörper $(K,+,\cdot)$ heißt *geordneter Schiefkörper*, falls auf K eine lineare Ordnungsrelation definiert ist derart, dass für alle $x,y,z \in K$ gilt

(i) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ und

(ii) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

Anmerkung: Man kann zeigen, daß in einem geordneten Schiefkörper gilt:

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \quad \text{(insbesondere } 1 > 0)$$

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

Wir haben also damit den ersten Teil folgenden Satzes gezeigt:

Satz

Ist $A \cong AG(3,K)$ mit einer Ordnung versehen, so kann der Schiefkörper K so geordnet werden, dass für jede Gerade $g = \mathfrak{p} + Km$ die eine der beiden Ordnungsrelationen wie folgt beschrieben wird:

(*) $\mathfrak{p} + am < \mathfrak{p} + bm :\Longleftrightarrow a < b$

Den zweiten Teil der Aussage haben wir für die Gerade g mit $a = o$ und $m = n$ schon bewiesen. Ist $h = Km$ eine weitere Nullpunktgerade, so betrachten wir die Abbildung $f : g \longrightarrow h$ mit $f(xn) = xm$. Auch diese ist eine Parallelprojektion und erhält nach 7.1 die Zwischenrelation. Ist nun g beliebige Gerade der angegebenen Form, so erhalten wir g aus h durch eine Translation. Wieder nach 7.1 bleibt die Zwischenrelation erhalten. Also $x < y < z$ oder $z < y < x \Leftrightarrow (xn,yn,zn) \in Z \Leftrightarrow (xm,ym,zm) \in Z \Longleftrightarrow (a + xm, a + ym, a + zm) \in Z$. Hieraus folgt (*) wie im Beweis zu 7.2. $\square$

(7.5) Anmerkung

Ist umgekehrt K ein geordneter Schiefkörper, dann wird AG(3,K) durch (7.4)(*) zu einem geordneten affinen Raum, (vgl. auch 6.4 und Aufgabe 29).

(Beweis wie zu Aufgabe 29b)

Aufgabe 36*

Sei $A \cong AG(3,K)$ ein geordneter 3-dim affiner Raum. Zeigen Sie analytisch, dass bei einer zentrischen Streckung die Zwischenrelation erhalten bleibt und vorgegebene Ordnungen (Orientierungen) von Geraden entweder alle belassen oder alle umgedreht werden.

Aufgabe 37

Sei $A = AG(3,K)$ affiner Raum über einen geordneten Schiefkörper K. Dann können wir die Ordnung von K auf K^3 übertragen:

$$(x_1,x_2,x_3) < (y_1,y_2,y_3) :\Leftrightarrow x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \vee$$
$$(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3)$$

(sogenannte lexikographische Ordnung).

Zeigen Sie, dass die durch Einschränkung der lexikographischen Ordnung auf die Geraden definierte Ordnung auf jeder Geraden (bis auf mögliches Umdrehen) mit der in (7.5) gegebenen Ordnung übereinstimmt.

Aufgabe 38

Sei AG(3,K) affiner Raum über einem geordneten Schiefkörper K. Zeigen Sie, dass die beiden Halbräume mit Rand-Ebene $H = \{(x_1,x_2,x_3) \in K^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i h_i = c\}$, kurz $H = \{x \in K^3 \mid x\cdot\mathfrak{h} = c\}$ geschrieben, durch $H^+ = \{x \in K^3 \mid x\cdot\mathfrak{h} > c\}$ und $H^- = \{x \in K^3 \mid x\cdot\mathfrak{h} < c\}$ gegeben sind.

Lösungshinweis: Sei $a \in H^+$, $b \in H^-$. Setzen Sie $a\cdot\mathfrak{h} = c + c_a$ und $b\mathfrak{h} = c - c_b$ und betrachten Sie $ka + (1-k)b$ für $k = c_b(c_a+c_b)^{-1}$.

§ 8*. Weitere Begriffsbildungen der geordneten Geometrie

A) Konvexität

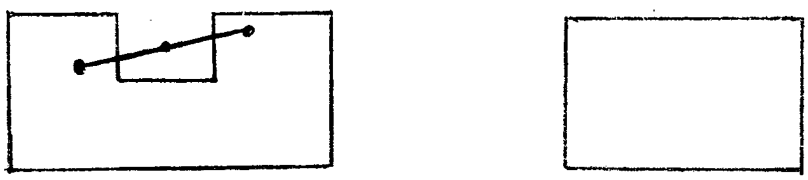
Gegeben sei ein geordneter Inzidenzraum.

(8.1) Definition

Eine Punktmenge M heißt konvex, falls gilt

$$A,B \in M \Rightarrow [A,B] \subseteq M$$

Anschauliche Beispiele: s. Figur 70.



nicht-konvex konvex

Figur 70

In einem konvexen Museumsraum ist jede Stelle von jeder anderen zu überschauen.

(8.2) Satz

(a) In einem geordneten Inzidenzraum sind die offenen und abgeschlossenen Strecken, die Strahlen, die Geraden, die offenen Halbebenen, die Ebenen konvexe Mengen In einem 3-dim affinen Raum sind die Halbräume zu einer Ebene konvex.