## § 5* Projektive Ebenen und Räume

M Da die projektive Auffassung - sie ist seit Anfang des 19. Jahrhunderts klassisch - auch in der "modernen" Geometrie eine wesentliche Rolle spielt, sei hier erneut auf den Übergang von affiner zu projektiver Darstellung eingegangen. Wir beginnen mit einer weiteren Motivation für die Einführung uneigentlicher Elemente in affinen Ebenen und Räumen.

### A) Zentralprojektionen und uneigentliche Elemente

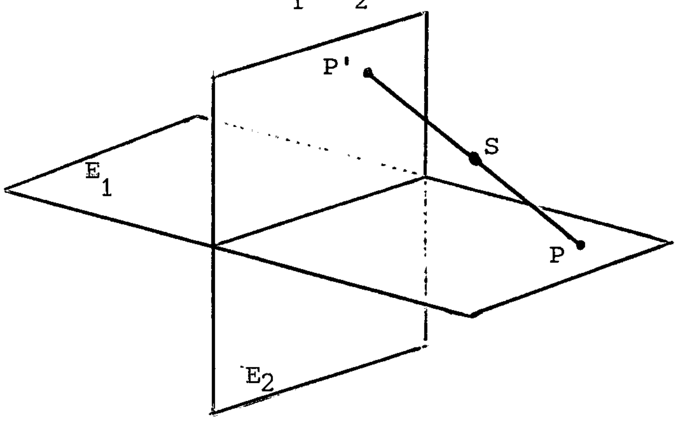
Im 3-dimensionalen affinen Raum über einem Schiefkörper K (bzw. einem Modell unseres bisherigen Axiomensystems oder auch nur im Anschauungsraum) betrachten wir eine "zentrale Projektion" $\sigma$ einer Ebene $E_1$ auf eine diese schneidene Ebene $E_2$; Projektionszentrum (Augenpunkt) sei $S \notin E_1 \cup E_2$. Die $\sigma$ beschreibende Zuordnungsvorschrift ist dabei

$P \mapsto P' = PS \cap E_2$

für $P \in E_1$ und, falls existent,

$P' \in E_2$ (s. Figur 44).

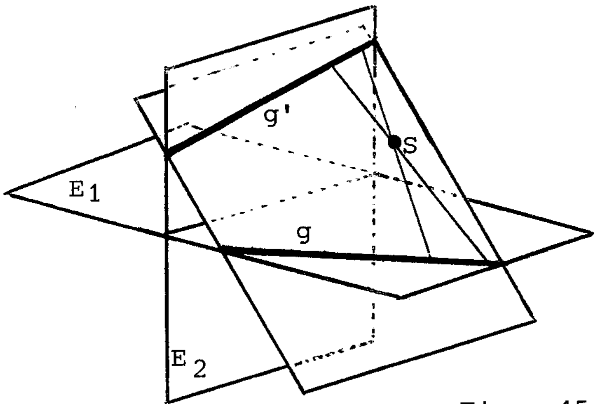
PS heißt *Projektionsgerade*.




Figur 44

Bei $\sigma$ läßt sich i.a. jeder Geraden g von $E_1$ eine Gerade g' in $E_2$ zuordnen; hierbei ist g' gleich dem Schnitt der von g und S aufgespannten Ebene mit $E_2$ (Fig.45).

Aber: Nicht jeder Punkt von g besitzt i.a. einen Bildpunkt und nicht jeder Punkt von g' einen Urbildpunkt.

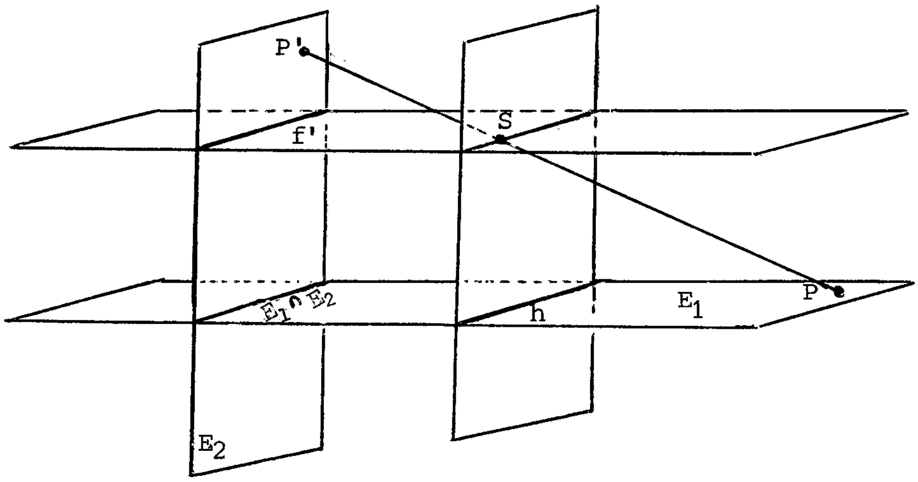



Figur 45

Welche Punkte von $E_1$ haben nun keine Bildpunkte (bzw. welche von $E_2$ keine Urbildpunkte)? Es sind solche, für die $PS \cap E_2 = \emptyset$, also $PS \parallel E_2$ ist (bzw. $P'S \cap E_1 = \emptyset$, also $P'S \parallel E_1$).

Sei h die Schnittgerade der Ebene $E_1$ mit der zu $E_2$ parallelen Ebene durch das Projektionszentrum S. (Es gilt $h \parallel E_1 \cap E_2$). (S. Figur 46).

Sei ferner f' die Schnittgerade der Ebene $E_2$ mit der zu $E_1$ parallelen Ebene durch S. (Es gilt auch $f' \parallel E_1 \cap E_2$).




Figur 46

M

Nun können wir präziser definieren:

(5.1) Definition

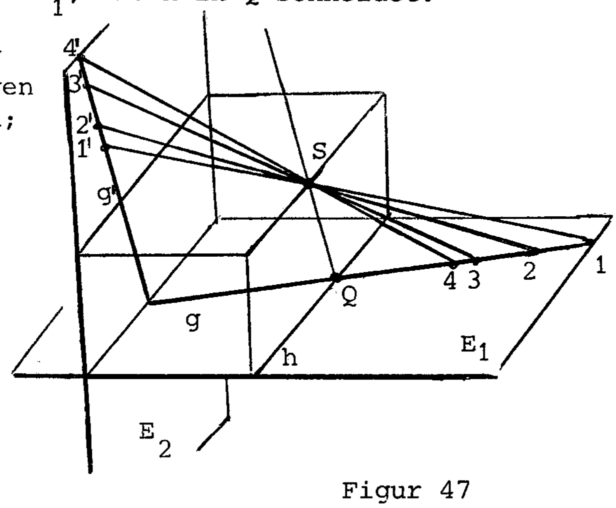
(a) Unter der *Zentralprojektion* von $E_1$ auf $E_2$ (mit $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1 \nparallel E_2$) mit *Projektionszentrum* $S \notin E_1 \cup E_2$ versteht man die Bijektion $E_1 \setminus h \to E_2 \setminus f'$ mit $P \mapsto P' = PS \cap E_2$ ; hierbei bezeichnet h bzw. f' die Schnittgerade der zu $E_2$ (bzw. $E_1$) parallelen Ebenen durch S mit $E_1$ (bzw. $E_2$).

(b) Die Punkte von h haben keinen Bildpunkt (da der Projektionsstrahl parallel zu $E_2$ verläuft); h heißt *Verschwindungsgerade*, die Punkte von h *Verschwindungspunkte*. Die Punkte von f' haben keine Urbildpunkte. f' heißt *Fluchtgerade*, ihre Punkte *Fluchtpunkte*.

Anmerkung: Bei der Zentralprojektion eines Halbraumes auf eine Ebene (vgl. die Lochkamera, s. S. 4) liegen ähnliche Verhältnisse vor. Jedoch hängt die Fluchtgerade f' von der betrachteten Urbildebene ab, und Verschwindungspunkte sind alle Punkte der Ebene durch S und h. Literaturhinweis:
F. Rehbock: Geometrische Perspektive, Berlin etc. 1980, 2.1 - 2.4).

M

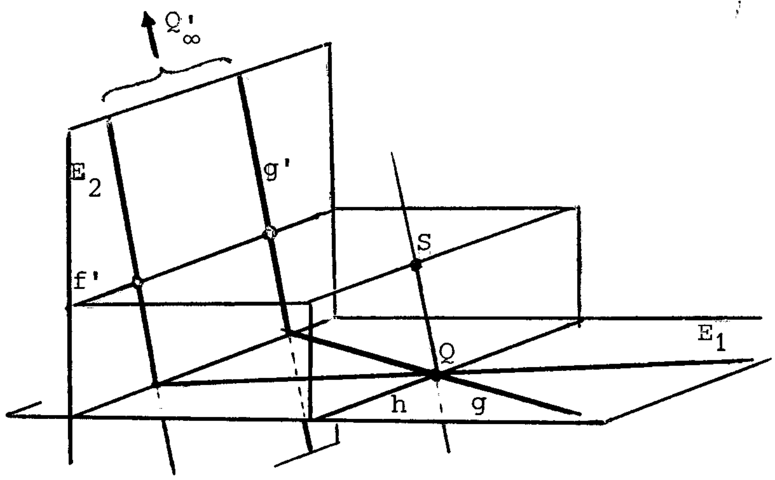
Betrachten wir nun eine Gerade g in $E_1$, die h in Q schneidet. Im Anschauungsraum können wir uns vorstellen, dass bei Annäherung an den Punkt Q auf h die zugehörigen Bildpunkte ins "Unendliche" rücken; (dabei setzt man natürlich eine Ordnung auf g und g' voraus).




Figur 47

Daher weisen wir allgemein dem Verschwindungspunkt Q den *"uneigentlichen"* *Punkt* $Q'_\infty$ auf g' zu (*Fernpunkt* von g')
(und analog den Urbildpunkten von f' Urbild-Fernpunkte).

Zwei Geraden, die sich in Q schneiden (und damit Q repräsentieren) haben parallel Bildgeraden
(s. Figur 48).




Figur 48

Dies stimmt überein mit der Auffassung, dass $Q'_\infty$ ein allen Geraden der Parallelenschar zu $g'$ gemeinsamer (neuer) Punkt ist.
Den Punkten von $h$ entsprechen nun genau die Geraden-Parallelenscharen von $E_2$.
Analog gehören zu den Punkten von $f'$ die uneigentlichen Punkte von $E_1$: die Bilder paralleler Geraden von $E_1$ schneiden sich auf der Fluchtgeraden, dem "Horizont".

M

(5.2) Die zentrale Projektion $\sigma$ läßt sich nun fortsetzen zu einer Bijektion $\hat{\sigma}$ der Menge der eigentlichen und uneigentlichen Punkte von $E_1$ auf diejenige von $E_2$. Bei $\hat{\sigma}$ wird eine eigentliche Gerade $g \neq h$ von $E_1$ zusammen mit ihrem Fernpunkt auf eine eigentliche Gerade von $E_2$ vereinigt mit deren uneigentlichem Punkt abgebildet sowie h einschließlich Fernpunkt von h auf die uneigentliche Gerade von $E_2$.

B Übergang zu homogenen Koordinaten

M

Wir erläutern nun, inwiefern die projektive Erweiterung von AG(n,K) sich durch PG(n,K) geeignet beschreiben läßt, und zwar der Einfachheit wegen zunächst für $n = 2$ und $K = \mathbb{R}$.
Bei der zentralen Projektion $\hat{\sigma}$ werden die eigentlichen und uneigentlichen Punkte von $E_1$ über Projektionsgeraden auf die eigentlichen und uneigentlichen Punkte von $E_2$ abgebildet. Die dabei verwandte Zuordnung von Punkten einer Ebene und den Geraden durch das Projektionszentrum wird zu einer bequemeren Darstellung der projektiven Erweiterung $\hat{E}$ von $E = AG(2,\mathbb{R})$ ausgenutzt. O.B.d.A. wählen wir als E die oben benutzte Ebene $E_1$.

Jedem eigentlichen Punkt von $E$ entspricht dann vermöge $\hat{\sigma}$ genau eine zu E nicht-parallele Gerade durch S und umgekehrt. Jedem uneigentlichen Punkt von E wird genau eine zu E parallele Gerade durch S zugeordnet.

Zu jeder eigentlichen (um den Fernpunkt erweiterten) Geraden von E gehört genau eine (zu E nicht parallele) Ebene, zur uneigentlichen Geraden von E die zu E parallele Ebene durch S (vgl. Figur 49).

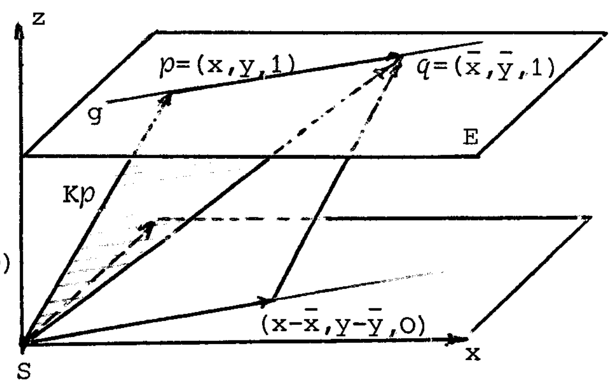
*Dies zeigt, daß* $\hat{E}$ *isomorph zu* $\mathcal{P}$=PG($\mathbb{R}^3$) ist(s. Def. 1.4(f)), also eine Bijektion der Menge der eigentlichen und uneigentlichen Punkte von E auf die Punktmenge von $\mathcal{P}$ existiert, die die Geradenmenge von $\hat{E}$ bijektiv auf die von $\mathcal{P}$ abbildet.
Um den Übergang auch für höhere Dimensionen leisten zu können, benützen wir Koordinaten. Wählen wir S = (0,0,0) und E als die Ebene $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ (s. Figur 49).

Folgende Zuordnungen sind dann motiviert: für die eigentlichen Punkte P = (x,y,1), Q = ($\bar{x}$,$\bar{y}$,1) :

P $\mapsto$ K(x,y,1) (Gerade durch S und P)

g = PQ $\mapsto$ K(x,y,1) + K($\bar{x}$,$\bar{y}$,1) (Ebene durch S,P und Q)

Fernpunkt von g = PQ $\mapsto$ K(x − $\bar{x}$,y − $\bar{y}$,0) (Gerade in der zu E parallelen Ebene durch S),




Figur 49

M Statt der letzten Komponente kann man auch die erste Komponente als Indikator für eigentliche bzw. uneigentliche Punkte hinzunehmen,s.u. Eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen $n$ und beliebige Schiefkörper $K$ geht analog; also:

(5.3) (a) Definition für $n = 2$
Ist $P = (x,y)$ Punkt von AG$(2,K)$, so ordnen wir ihm den Punkt $K(1,x,y)$ aus PG$(K^3)$ zu. (Jedes Tripel aus $K(1,x,y)$ heißt homogenes Koordinatentupel von $P$). Ist $R$ der Fernpunkt der Geraden $PQ$ mit $P = (x,y)$ und $Q = (\bar{x},\bar{y})$, so ordnen wir $R$ den Punkt $K(0,x-\bar{x},y-\bar{y})$ von PG$(K^3)$ zu.
(b) Definition für $n = 3$:
Ist $P = (x,y,z)$ Punkt von AG$(3,K)$, so ordnen wir ihm den Punkt $K(1,x,y,z)$ aus PG$(K^4)$ zu. (Jedes Quadrupel aus $K(1,x,y,z)$ heißt homogenes Koordinatentupel von $P$). Ist $R$ der Fernpunkt der Geraden $PQ$ mit $P = (x,y,z)$ und $Q = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, so ordnen wir $R$ den Punkt $K(0,x-\bar{x},y-\bar{y},z-\bar{z})$ von PG$(K^4)$ zu.

(5.4) Anmerkungen
a) Auf diese Weise ist eine Bijektion zwischen der Punktmenge des projektiven Abschlusses von AG$(2,K)$ (bzw. AG$(3,K)$) auf diejenige von PG$(K^3)$ (bzw. PG$(K^4)$) definiert; diese Abbildung ist inzidenzerhaltend, d.h. sie bildet Geraden - einschließlich ihrer Fernpunkte - auf Geraden ab (und Ebenen einschließlich ihrer uneigentlichen Elemente auf Ebenen), und Urbilder von Geraden (und Ebenen) sind ebenfalls Geraden (bzw. Ebenen).
b) In Anlehnung an die Schreibweise AG(3,K) schreiben wir nun, wie schon angekündigt, PG(3,K) statt PG($K^4$). Allgemein definieren wir PG(n,K) := PG($K^{n+1}$), (wobei die "geometrische Dimension" n von der Vektorraumdimension um 1 abweicht !)

Aufgabe 28*

Führen Sie den Beweis zu (5.4)a) aus; zeigen Sie also, dass die angegebene Abbildung ein Isomorphismus (inzidenzerhaltende Bijektion der Punktmengen) des projektiven Abschlusses von AG(3,K) (d.h. von AG(3,K) zusammen mit den uneigentlichen Elementen und naheliegender Erweiterung der Inzidenz) auf PG(3,K) ist.

Aufgabe 29*

Zeigen Sie, dass die Translation von AG(3,K):

$$\tau : K^3 \longrightarrow K^3 \text{ mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

in PG(3,K) durch eine lineare Abbildung beschrieben wird:

$$\hat{\tau} : K^4 \longrightarrow K^4 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(Koordinaten jeweils bzgl. der kanonischen Basis). Betrachten Sie auch die uneigentlichen Punkte !

(5.5) Anmerkungen

Die Vorteile der Darstellung in PG(3,K) sind, soweit wir sie schon behandelt haben, die folgenden:

1. Zwischen parallelen und sich schneidenden Ebenen bzw. Geraden braucht nicht mehr unterschieden werden.
2. Statt affiner Unterräume (von $K^3$) kann man (lineare) Unterräume (von $K^4$) betrachten.
3. Die wichtigen Translationen sind nun durch lineare Abbildungen beschreibbar (s. Aufgabe 29). Durch lineare Abbildungen induzierte Abbildungen von AG(3,K) lassen sich weiterhin durch lineare Abbildungen induzieren:

   Statt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ haben wir (jeweils bzgl. kanonischer Basis)

$$K \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto K \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hinzu kommen noch folgende Vereinfachungsmöglichkeiten:

4. Sind $P_o, \ldots, P_4$ fünf Punkte von PG(3,K), von denen keine 4 in einer Ebene liegen. Seien $P_i = Kp_i$. Dann bilden $p_1, \ldots, p_4$ eine Basis von $K^4$ und es existieren $k_1, \ldots, k_4 \in K \setminus \{0\}$ mit $p_o = \sum_{i=1}^{4} k_i p_i$. Wir setzen $\hat{p}_i :\doteq k_i p_i$.
   Wegen $k_i \neq 0$ gilt daher auch $P_i = Kk_i p_i = K\hat{p}_i$. Wählen wir nun $\mathcal{B} = \{\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_4\}$ als neue Basis, so haben die Punkte $P_o, \ldots, P_4$ folgende Darstellung:

$$P_o = K\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}_B{}^{1)},\quad P_1 = K\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}_B,\quad P_2 = K\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_B,\quad P_3 = K\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}_B,\quad P_4 = K\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}_B .$$

Wir können also den 5 Punkten $P_o,\dots,P_4$ entsprechend feste Koordinaten zuordnen.
In AG(3,K) hätten wir (durch Koordinatentransformationen) jedoch nur den Nullpunkt und 3 Einheitspunkte vorgeben können.

Analog zur Situation in PG(3,$K$) kann man in PG(2,$K$) *vier* Punkte, von denen keine drei kollinear sind, durch

$$K\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad K\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad K\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{und } K\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad \text{beschreiben.}$$

5) Da die Ebenen von PG(3,K) (bzw. Geraden von PG(2,K)) Unterräume der Codimension 1 sind, lassen sie sich (in Koordinaten) als Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} x_i a_i = 0 \qquad (\text{für } n=3 \text{ bzw. } 2)$$

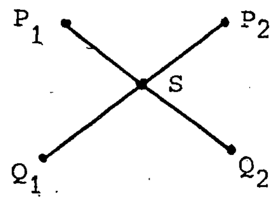
darstellen, also durch die zur Unterscheidung von den Punktkoordinaten mit eckigen Klammern geschrieben Koeffiziententupel $\begin{bmatrix}a_o\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ beschreiben; letztere sind ebenfalls nur bis auf skalare Vielfache bestimmt, sodass sich mindestens eine von 0 verschiedene Komponente als 1 wählen läßt. Die Ebenen (bzw. Geraden) sind also durch $\begin{bmatrix}a_o\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\cdot K$ beschreibbar.

Beispiel zur Verwendung von Punkt- und Geradenkoordinaten:

Seien $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ vier Punkte von PG(2,K), von denen keine 3 kollinear sind. Wir setzen $P_1 = K\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_2 = K\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $Q_1 = K\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und $Q_2 = K\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und berechnen die Koordinaten des "Diagonalschnittpunktes" $S = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$ (Figur 50). Die Gerade $P_1Q_2$ hat die Geradenkoordinaten

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}K,\ \text{da}\quad (100)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = 0 = (111)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\quad \text{gilt.}$$

Die Gerade $P_2Q_1$ hat die Koordinaten $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}K$.



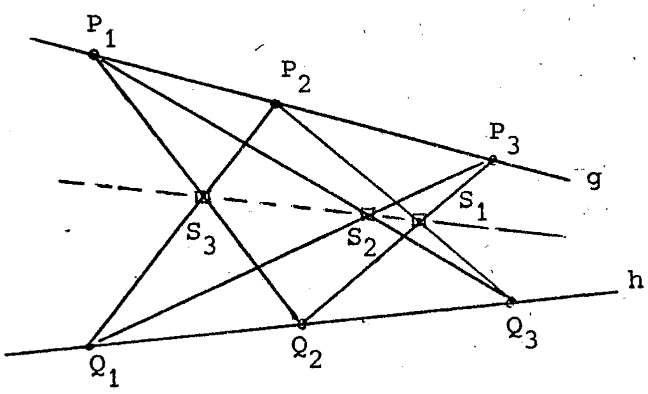

Figur 50

1) Hierbei bezeichnet $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}_B$ den Vektor, dessen Koordinaten bzgl. der Basis $B = \{p_1,\dots,p_n\}$ gerade $x_1,\dots,x_n$ sind, also den Vektor $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Wegen $(0\ 1\ 1)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = 0 = (0\ 1\ 1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, folgt $S = K\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 30*

Zeigen Sie: Ist K kommutativ, so gilt in PG(2,K) der Schließungssatz von Pappos: Für jedes Paar verschiedener Geraden g und h und jede Wahl von paarweise verschiedenen Punkten $P_i, Q_i$ mit $P_i \in g$, $Q_i \in h$, $P_i, Q_i \neq g \cap h$ (i=1,2,3) sind die Punkte $S_1 = P_2Q_3 \cap Q_2P_3$, $S_2 = P_1Q_3 \cap Q_1P_3$ und $S_3 = P_1Q_2 \cap Q_1P_2$ kollinear. (Vgl. Figur 51).




Figur 51 : Skizze zum Satz von Pappos

*Anmerkung:* Gilt in PG(2, $K$) umgekehrt der Satz von Pappos, so ist $K$ kommutativ.