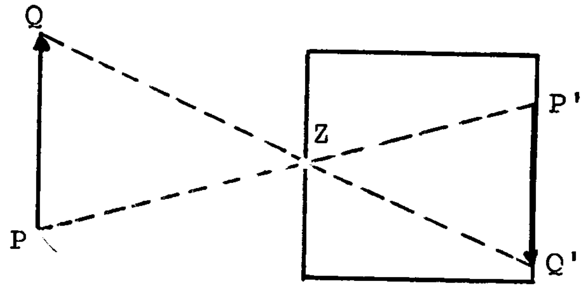
KAPITEL I

Inzidenzgeometrie

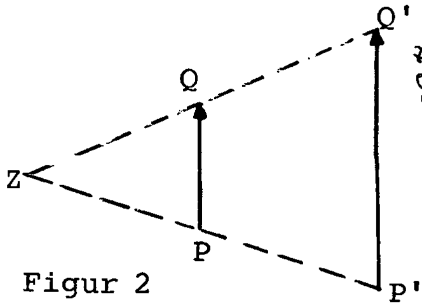
M Als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen wir einige Themen aus der geometrischen Optik !
Bei der Lochkamera (ein geschlossener Kasten, dessen Vorderwand eine kleine Öffnung besitzt) wird ein Gegenstand auf die Rückwand abgebildet (Figur 1). Wegen der gradlinigen Ausbreitung (?) des Lichts entspricht einem Punkt P des Gegenstandes ein Bildpunkt P', den man als Schnittpunkt der Geraden PZ durch P und die Öffnung Z mit der Ebene der Rückwand findet.



Lochkamera

Figur 1

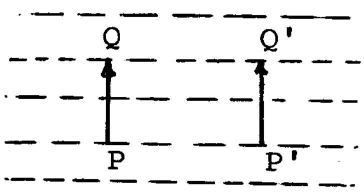
Neben dieser Projektion mit "Zentrum" Z, die auch zur vereinfachten Darstellung einer Dia-Projektion herangezogen werden kann (Figur 2), spielt auch die sogenannte Parallelprojektion eine Rolle, bei der die Gegenstands- und Bildpunkt verbindenden Geraden parallel verlaufen (Figur 3).



zentrale Diaproj.

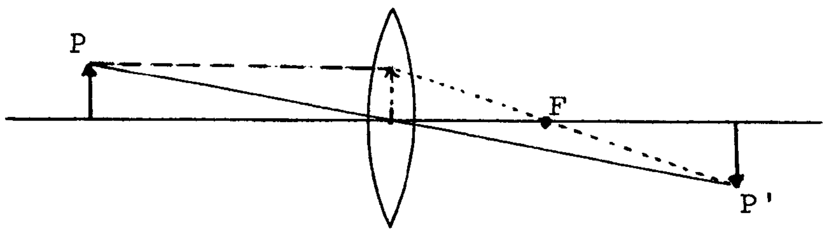
Figur 2

Eine Kombination aus beiden Projektionen wendet man bei der zeichnerischen Konstruktion des Bildes eines Gegenstandes unter Abbildung mit einer optischen Linse an (Figur 4).



Parallelproj.

Figur 3



Figur 4

Von Interesse sind in diesem Zusammenhang Fragen nach der Existenz (Bildausschnitt) und Eindeutigkeit (Schärfe !) der Bildpunkte, nach der Verzerrung (werden gerade Strecken wieder auf solche abgebildet ?) und nach den Größenverhältnissen.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Verbindungsgeraden*) zweier Punkte und des Schnittpunkts einer Geraden mit einer nicht-parallelen Ebene wird bei der Behandlung solcher Probleme oft unreflektiert aus der Anschauung übernommen. Bei der zeichnerischen Konstruktion "löst sich" die Frage nach der Verbindungsgeraden meist durch Anlegen des Lineals oder Zeichendreiecks.

Bei einem exakten Aufbau der Geometrie muss man sich der unbewiesenen Voraussetzungen jedoch bewußt sein.
Schwierigkeiten bereiteten zunächst auch Begriffe wie "Punkt" etc. Bei Euklid steht die (für uns unzureichende) Definition: "Ein Punkt ist, was keine Teile hat". Eine Errungenschaft der axiomatischen Geometrie ist die Verwendung der Begriffe "Punkt" und "Gerade", "Ebene", "Inzidenz", als Grundbegriffe, d.h. als undefinierte, nur durch Axiome eingeschränkte und damit variable Begriffe.

---

*) Zur Bildung des Begriffes "Gerade" schon in der Primarstufe s.z.B. Franke 2000, p.60: "Konstruktion der projektiven Geraden" (besser hieße es: Geraden mittels Projektion).

§ 1 Inzidenz-Axiome

(1.1) Erste Grundbegriffe

Gegeben seien drei paarweise disjunkte Menge, $\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E}$, deren Elemente wir *Punkte*, *Geraden* bzw. *Ebenen* nennen, sowie eine Relation (sogenannte *Inzidenzrelation*) *zwischen Punkten und Geraden* [1] (der Punkt A "liegt auf" der Geraden a, die Gerade a "geht durch" den Punkt A oder "enthält" den Punkt A, und davon abgeleitet: zwei Geraden a,b schneiden sich in A, falls A auf a und b liegt usw.) ferner eine *(Inzidenz-) Relation zwischen Punkten und Ebenen.* [1]
Die Mengen $\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E}$ und die beiden Inzidenzrelationen sollen Axiomen genügen, auf die wir im folgenden weiter eingehen werden.

Bemerkung: Die Axiome sind so gefaßt, dass man die Geraden und Ebenen als Punktmengen auffassen kann; jedoch ist das keineswegs notwendig.

Zunächst behandeln wir Axiome, bei denen nur Punkte, Geraden und deren Inzidenz eine Rolle spielen.

A) Ebene Inzidenzaxiome

(1.2) Verbindungs- und Reichhaltigkeitsaxiom (Inzidenz Punkte-Geraden)

Geraden-Grundsatz

I 1 *Zu je zwei (verschiedenen)* [2] *Punkten* $P,Q \in \mathcal{P}$ *gibt es stets genau eine Gerade* $g \in \mathcal{G}$, *mit der* P *und* Q *inzidieren.*

I 2 *Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

1) Die beiden Inzidenzrelationen können z.B. durch Angabe der Mengen I_1 bzw. I_2 der inzidierenden Paare festgelegt werden; also durch I_1, I_2 mit
$$I_1 \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G} \quad \text{bzw.} \quad I_2 \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{E}.$$

2) Nach der Bedeutung von "zwei" bezeichnet "zwei Punkte" schon 2 verschiedene Punkte; bei beliebig gegebenen Punkten P,Q ist zunächst $P \neq Q$ zu prüfen; daran soll "verschieden" erinnern.

(1.3) Bemerkungen

a) Die nach $(I\ 1)$ eindeutig bestimmte Gerade durch P und Q bezeichnen wir mit PQ.

b) Wegen $(I\ 2)$ enthält jede Gerade g mindestens zwei Punkte P,Q und ist wegen $(I\ 1)$ schon durch "ihre" Punktmenge $\overline{g} = \{R \mid R$ inzidiert mit $g\}$ bestimmt. Wir können daher g durch $\overline{g}$ ersetzen und o.B.d.A. die Geraden als Punktmengen und die Inzidenz als $\in$ (Element-Menge-Beziehung) wählen.

c) Die Punkte $P,Q,R,\ldots$ heißen kollinear, falls es eine mit ihnen inzidierende Gerade g gibt. Die Geraden $g,h,k,\ldots$ heißen kopunktal, falls es einen mit ihren inzidierenden Punkt P gibt.

M d) Wie oben erwähnt, können Möglichkeiten der Verwendung von Zeicheninstrumenten als Motivation für einige unserer Axiome dienen: So führt das Anlegen des Lineals zu dem "Geradengrundsatz" $I\,1$. (Ähnlich motiviert die Verwendung einer Reißschiene das Parallelenaxiom, des Zeichendreiecks den Senkrechtengrundsatz, des Steckzirkels Kongruenz-
M axiome etc. , s.u.)

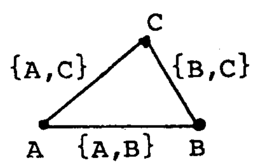
(1.4) Beispiele

(a) Einfachstes Modell

Man überzeugt sich leicht, daß folgendes Beispiel (P,G,E) den Axiomen $(I\ 1)$ und $(I\ 2)$ genügt (also ein Modell für $(I\ 1)$ und $(I\ 2)$ ist) und unter all solchen Modellen eine minimale Punktezahl besitzt.

$P = \{A,B,C\}$; $G = \{\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\}\}$; Inzidenz: $\in$; $E = \emptyset$

symbolische Darstellung in der Zeichenebene, s. Fig. 5.



Figur 5

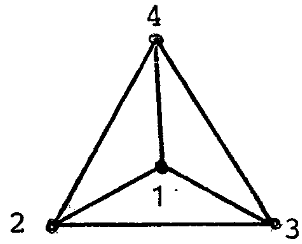
(b) "Vier-Punkte-Ebene"

Auch bei der Wahl

$P = \{1,2,3,4\}$

$G = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

$E = \{P\}$; Inzidenz jeweils: $\in$



sind die Axiome I 1 und I 2 erfüllt, (vgl. Figur 6).

Figur 6

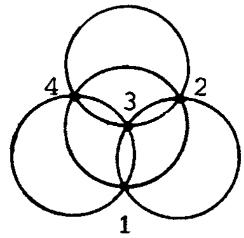
(c) Beispiel, das kein Modell für das Axiomensystem (I 1), (I 2) ist:

Seien $P = \{1,2,3,4\}$, E beliebig und

$G = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$

Inzidenz zwischen Punkten und Geraden: $\in$.

Diese Struktur erfüllt nicht Axiom I 1 : Die geforderte Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden ist verletzt.



Figur 7

(d) Zur Beschreibung der "Anschauungs"- bzw. "Zeichenebene" dient in der Analytischen Geometrie die reelle affine Ebene In dieser werden z.B. die Punkte als die Elemente von $\mathbb{R}^2$ gewählt und die Geraden als diejenigen Punktmengen, die durch eine Gleichung der Form

$$y = mx + b \quad \text{oder der Form} \quad x = c$$

bestimmt sind. Die Geraden haben also die Darstellung (unter Verwendung vektorieller Schreibweise):

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\} = \{(x, mx+b) \mid x \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(0,b) + x(1,m) \mid x \in \mathbb{R}\} = (0,b) + \mathbb{R}(1,m)$$

bzw.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c\} = \{(c,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = (c,0) + \mathbb{R}(0,1)$;

zusammenfassend geschrieben sind die Geraden von der Form

$$a + \mathbb{R}b := \{a + rb \mid r \in \mathbb{R}\}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}^2, b \neq o$, also

1-dim affine Unterräume von $\mathbb{R}^2$ (d.h. Nebenklassen nach 1-dim Unterräumen, also 1-dim Unterräume und deren Bilder unter Parallelverschiebungen $\rightarrow$ Lineare Algebra).

Wir setzen daher hier:

$P = \mathbb{R}^2$

$G = \{g \mid g = a + \mathbb{R}b \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ und } b \neq 0\}$

$E = \{\mathbb{R}^2\}$

Inzidenz jeweils: $\in$

Bezeichnung: reelle affine Ebene, kurz AG(2, $\mathbb{R}$) oder AG($\mathbb{R}^2$).

Anmerkung:

Die reelle affine Ebene erfüllt die Axiome $I1$ und $I2$:

Beweis:

Seien $P = p \neq Q = q$; dann gilt $P, Q \in p + \mathbb{R}(q - p)$.

(vektorielle 2-Punkte-Form der Geradengleichung!)

Dies ist auch die einzige Gerade durch P und Q: Denn aus $P, Q \in a + \mathbb{R}b$ folgt $p = a + r_1 b$ und $q = a + r_2 b$, also $\mathbb{R}(q-p) = \mathbb{R}(r_2 - r_1)b = \mathbb{R}b$ und $a + \mathbb{R}b = p - r_1 b + \mathbb{R}b = p + \mathbb{R}(q-p)$.

Dies zeigt Axiom $I\,1$.

Auf jeder Geraden liegen unendlich viele Punkte, und aus Dimensionsgründen gibt es mindestens eine Gerade und einen Punkt außerhalb dieser Geraden.

Beispiel (d) ist ein Spezialfall der folgenden Standardbeispiele (e):

(e) "AG(V)" (Affine Geometrie des K-Vektorraums V; affiner Raum über K):

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim_K V \geq 2$

$P = V$

$G = \{$Menge aller 1-dim affinen Unterräume von V (d.h. von Mengen der Form $a + Kb \subseteq V$ mit $b \neq 0$)

$E = \{$Menge aller 2-dim affinen Unterräume von V (d.h. von Mengen der Form $a + Kb + Kc \subseteq V$ mit linear unabhängigen Vektoen b, c).

Inzidenz jeweils $\in$.

Anmerkungen

(i) Für AG(V) sind die Axiome ($\mathfrak{I}1$) und ($\mathfrak{I}2$) erfüllt. (Beweis ähnlich wie unter (d), s. auch Aufg.3).

(ii)* Ist $\dim_K V = n < \infty$, so gilt ja $V \cong K^n$. Statt AG(V) betrachtet man dann oft AG(n,K):=AG(K^n). Ist K =GF(q) endlicher Körper, so schreibt man auch AG(n,q) statt AG(n,K).

(iii) AG(3,$\mathbb{R}$) :=AG($\mathbb{R}^3$), der 3-dim reelle Raum, dient in der Analytischen Geometrie zur Beschreibung des "Anschauungsraums". Er ist das "Zielmodell", also das Modell, das schließlich als (im Wesentlichen) einziges Modell die obigen und die im Weiteren aufgeführten Axiome erfüllt.

(f)* Wir betrachten nun Unterräume des Vektorraums K^3 über dem Körper K. Auch hier finden wir Beispiele für ($\mathfrak{I}1$) und ($\mathfrak{I}2$):

$\mathcal{P}$ = Menge aller Geraden durch den Nullpunkt N von K^3 (d.h. aller 1-dim Unterräume des Vektorraums K^3)

$\mathcal{G}$ =Menge aller Ebenen durch N (d.h. aller 2-dim Unterräume von K^3)

$\mathcal{E} = \{\mathcal{P}\}$ $\quad I_1 : \subseteq \quad I_2 : \in$

Wir nennen dieses Beispiel **projektive Ebene** über K und bezeichnen es mit PG(K^3) oder PG($2,K$) (Zur Bezeichnung siehe §5).

Variation im Spezialfall $K = \mathbb{R}$:

Schnitte mit der Einheitskugel $\mathcal{K}$ um den Mittelpunkt N, also:

$\hat{\mathcal{P}}$ = Menge antipodaler Punktepaare (Schnitte der Geraden durch N mit $\mathcal{K}$)

$\hat{\mathcal{G}}$ = Menge der Großkreise von $\mathcal{K}$ (Schnitte der Ebenen durch N mit $\mathcal{K}$)

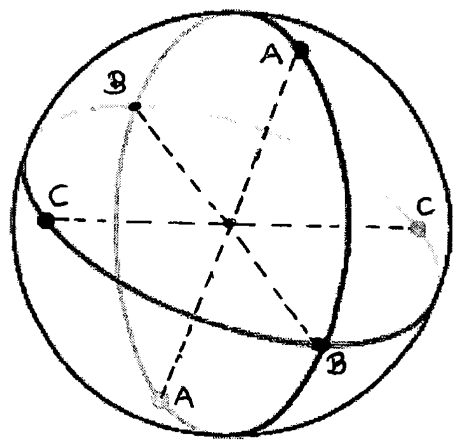
$I_1 : \subseteq$

Eigenschaft des Modells:

Je zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Bezeichnung einer solchen Geometrie:

elliptische Geometrie.

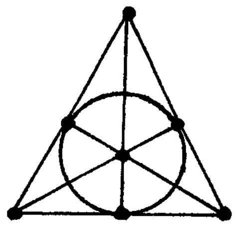


Figur 8a

Beispiele antipodaler Punktepaare und Großkreise

Aufgabe 1*

Zeigen Sie, dass für $K = GF(2)$ (i) die Struktur $AG(2,K)$ als Vier-Punkte-Ebene aufgefaßt werden kann und (ii) die Struktur $PG(K^3)$ folgende symbolische Darstellung hat:



Figur 8

(Dabei bezeichnet $GF(2)$ den Körper mit 2 Elementen, also die Menge $\{0,1\}$ mit den folgenden Verknüpfungen:

$$\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Aufgabe 2*

Weisen Sie für $PG(K^3)$ (und beliebigen Körper K) die Axiome $I\,1$ und $I\,2$ sowie folgende Aussagen nach:

(1) Auf jeder Geraden liegen mindestens 3 Punkte.

(2) Je zwei Geraden schneiden sich (d.h. haben einen Punkt gemeinsam).

Anmerkung zu 1.4f und Aufgabe 2:
Eine Struktur, die die Axiome $I\,1$, $I\,2$ und (1),(2) aus Aufgabe 2 erfüllt, heißt *projektive Ebene*. Daher nennen wir $PG(K^3)$ die "projektive Ebene über K". Neben diesen Ebenen über Körpern K sind weitere Modelle von projektiven Ebenen bekannt.

M Die Theorie dieser Ebenen ist in den letzten Jahrzehnten sehr aufgeblüht (vgl. etwa D. Hughes & F. Piper: Projective Planes, New York etc. 1973). Ein Teil ihrer Bedeutung liegt darin begründet, daß die projektive Betrachtungsweise (die erst in § 5 erläutert werden kann) wesentliche Rechen- und Argumentationsvereinfachungen mit sich bringt.

Anmerkung: Die Anführung endlicher Modelle soll u.a. helfen, Begriffe und Beweise von der Anschauung zu lösen (Verfremdungseffekt). Bei nicht zu großer Punktzahl sind die endlichen Beispiele auch
M als Versuchspläne (in der Statistik) von Relevanz.

Aufgabe 3

Bei einer psychologischen Untersuchung sollen 25 Testpersonen einer Reihe von Tests unterzogen werden. Um nicht jede Person allen Tests unterwerfen zu müssen, sollen zu einer Testklasse jeweils 5 disjunkte Gruppen zu 5 Personen gebildet werden. Während der ganzen Versuchsreihe sollen zudem je zwei Personen höchstens einmal gemeinsam in einer Gruppe sein.
Zeigen Sie, daß unter diesen Bedingungen insgesamt 30 Testgruppen gebildet, also 6 Testklassen vorgesehen werden können.
(Hinweis: Man bedenke, dass es einen Körper mit 5 Elementen gibt.)

(g) Modell einer sogenannten "<u>hyperbolischen Ebene</u>" $\mathcal{H}$:
Bevor wir dieses Modell näher beschreiben können, geben wir eine vorläufige Definition der "<u>reellen euklidischen Ebene</u>". Unter diesem Begriff verstehen wir die reelle affine Ebene $AG(2,\mathbb{R})$, in der zusätzlich ein Skalarprodukt (→ Lineare Algebra) definiert ist, z.B.

$$(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)=x_1y_1+x_2y_2.$$

Durch dieses Skalarprodukt wird u.a. eine Metrik induziert: Als <u>Abstand</u> zwischen zwei Punkten $x=(x_1,x_2)$ und $y=(y_1,y_2)$ erhält man

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \quad (=\sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}\,).$$

Das <u>Innere eines Kreises</u> (mit Radius r und Mittelpunkt y) ist dann definiert als $\mathring{k}=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d(x,y)<r\}$.

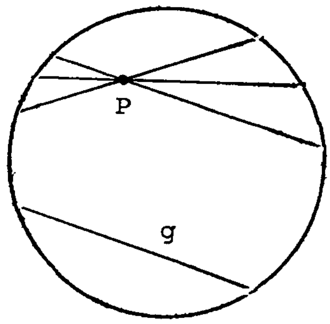
Als <u>Sehnen</u> (ohne Endpunkte) von $\mathring{k}$ bezeichnen wir hier diejenigen Schnitte der Geraden von $AG(2,\mathbb{R})$ mit $\mathring{k}$, die mindestens zwei Punkte enthalten.

Nun können wir $\mathcal{H}$ definieren:

$\mathcal{P}$ = Menge aller Punkte im Inneren eines Kreises (mit Radius größer 0) der "reellen euklidischen Ebene".

$\mathcal{G}$ = Menge aller Sehnen (ohne Endpunkte), $\mathcal{E}=\{\mathcal{P}\}$
Inzidenz: von der euklidischen Ebene induziert d.h.: Ein Punkt inzidiert mit einer Geraden von $\mathcal{H}$ genau dann, wenn er mit der zugehörigen Geraden von $AG(2,\mathbb{R})$ inzidiert; jeder Punkt inzidiert mit der (einzigen) Ebene $\mathcal{P}$.

Man kann zeigen, dass $\mathcal{H}$ die Axiome (I 1) und (I 2) erfüllt.



Figur 9

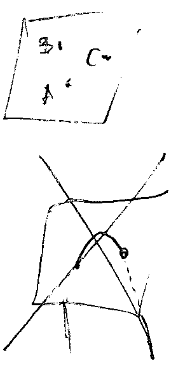
$\mathcal{H}$ (mit einer veränderten Abstandsfunktion) heißt "Kleinsches (Kreisscheiben-) Modell" der hyperbolischen Ebene.

Anmerkung: Beachten Sie, dass es in $\mathcal{H}$ zu einer Geraden g und einem Punkt P mit $P\notin g$ unendlich viele g nicht schneidende Geraden durch P gibt (s. Figur 9).

B) <u>Räumliche Inzidenzaxiome, Inzidenzraum</u>

Im Folgenden führen wir zusätzlich Axiome ein, die die Inzidenz von Punkten mit Ebenen betreffen. (Statt "P inzidiert mit E" sagen wir auch "P liegt auf E".)

(1.5) Axiome I3 und I4 (Inzidenz Punkte-Ebenen)



I 3 :	*Zu je drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkten A,B,C ∈ $\mathcal{P}$ gibt es genau eine Ebene F ∈ $\mathcal{E}$, mit der A,B und C inzidieren. Zu jeder Ebene F ∈ $\mathcal{E}$ gibt es mindestens 3 auf ihr liegende nicht-kollineare Punkte.*
I 4 :	*Wenn zwei Punkte einer Geraden g ∈ $\mathcal{G}$ in einer Ebene F ∈ $\mathcal{E}$ liegen, so liegt jeder Punkt von g in dieser Ebene.*

Anmerkungen

1. Bei Axiom $\mathcal{I}\,3$ könnte man die Letzte Forderung abschwächen zu: "Jede Ebene $F \in \mathcal{E}$ enthält mindestens einen Punkt". Nach Hinzunahme der Dimensionsaxiome (s.u.) ließe sich dann die Existenz dreier nicht-kolinearen Punkte in jeder Ebene herleiten. Der Beweis dieser (im Anschauungsraum offensichtlichen Tatsache) ist jedoch so kompliziert, dass wir (aus didaktischen Gründen) darauf verzichten, das Axiom möglichst "schwach" zu wählen. (Meist erst auf relativ hohem Niveau lässt das Bedürfnis nach möglichst schwachen und unabhängigen Axiomen auch komplizierte Beweise in Kauf nehmen).
2. Die eindeutige Ebene durch drei nicht-kolineare Punkte A,B,C bezeichnen wir mit ABC.
3. Jede Ebene $F \in \mathcal{E}$ ist nach $\mathcal{I}\,3$ durch ihre Punktmenge
$$\bar{F} = \{R \in \mathcal{P} \mid R \text{ inzidiert mit } F\}$$
bestimmt. Wir können (analog zum Fall der Geraden) daher F durch $\bar{F}$ ersetzen und o.B.d.A. die Ebenen als gewisse Punktmengen und die Inzidenz zwischen Punkten und Ebenen als die Element-Menge Beziehung $\in$ (Enthaltensseinsrelation) auffassen.

(1.6) Beispiele

Die Vier-Punkte-Ebene, AG(V) für dim V ≥ 2, PG(K^3) und $\mathcal{H}$ (s. (1.4)(b),(e),(f),(g)) sind Modelle des Axiomensystems $\mathcal{I}\,1$ - $\mathcal{I}4$. Beweis ... (s. auch Aufgabe 4).

(1.7) Definition: Erfüllen $\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E}$ und die beiden Inzidenzrelationen die Axiome ($\mathcal{I}1$) bis ($\mathcal{I}4$), so nennen wir $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ einen Inzidenzraum (bzgl. der beiden Inzidenzrelationen).

Aufgabe 4 : Zeigen Sie, daß AG(V) für jeden Körper K und jeden Vektorraum V mit $\dim_K V \geq 2$ ein Inzidenzraum ist.

Da für jede "Dimension" n ein affiner Raum AG(n,K) existiert, wir aber auf den 3-dim Raum abzielen, wollen wir die (bisher noch nicht allgemein definierte) Dimension einschränken.

C) Dimensionsaxiome

(1.8) Axiom I 5:

> *Wenn zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam haben, so enthalten sie mindestens einen weiteren gemeinsamen Punkt.*

Zumindest für affine Räume ist damit die Dimension eingeschränkt

(1.9) Anmerkungen:

a) **In AG(V) gilt Axiom (I 5) genau dann, wenn dim V ≤ 3 ist.**

Beweis

Seien E,F Ebenen von AG(n,K) und p gemeinsamer Punkt von E und F. Durch die Abbildung $V \longrightarrow V$ mit $\mathfrak{r} \longmapsto \mathfrak{r} - p$ gehen E und F in Nullpunktebenen $\hat{E}$ und $\hat{F}$ über, also in Unterräume der dim 2 von V. Ist $n = \dim V \leq 3$, so folgt aus der Dimensionsformel für Unterräume eines Vektorraums ($\to$Lineare Algebra):

$$4 = \dim \hat{E} + \dim \hat{F} = \dim(\hat{E} + \hat{F}) + \dim(\hat{E} \cap \hat{F}) \leq 3 + \dim(\hat{E} \cap \hat{F}).$$

Daraus ergibt sich $\dim(E \cap F) \geq 1$, also die eine Richtung von 1.9a). Ist $n > 3$, so existieren 2 Nullpunktebenen mit Durchschnitt $\{o\}$. □

b) Die Existenz von Modellen, in denen Axiom(I 1) -(I 4), aber nicht (I 5) gelten (s. Aufgabe 4 und 1.9.a) zeigt die *Unabhängigkeit* dieses Axioms von(I 1) -(I 4). Es kann nicht aus diesen bewiesen werden.

Über (I 5) hinausgehend gilt folgender Hilfssatz:

(1.10) **Erfüllt ein Inzidenzraum das Axiom (I 5), so haben je zwei verschiedene Ebenen entweder keinen Punkt gemeinsam oder (genau) alle Punkte einer Geraden.**

Beweis:

Besitzen F,H $\in \mathcal{E}$ einen gemeinsamen Punkt P, so gemäß I 5 noch einen weiteren Punkt Q. Nach I 4 liegt PQ ganz in F und H. Existierte ein F und H gemeinsamer Punkt R außerhalb PQ, so gingen durch die nicht auf einer Geraden liegenden Punkte P,Q,R zwei Ebenen, im Widerspruch zu I 3.

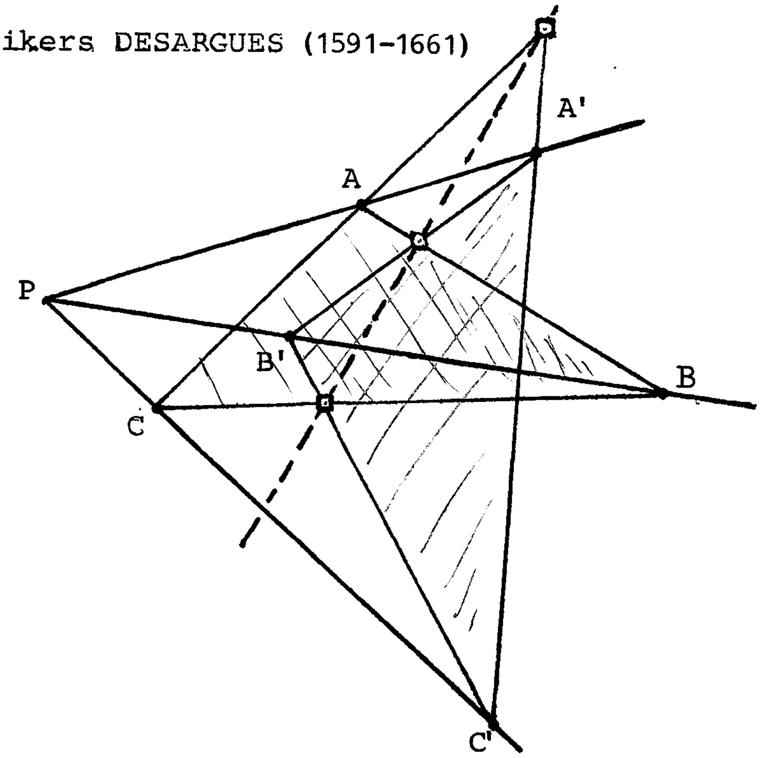
(1.11) Hilfssatz (s. Figur 10)

Sei $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ ein Inzidenzraum, in dem ($\mathcal{I}$ 5) gilt. Seien ferner PA, PB, PC drei nicht in einer Ebene gelegene Geraden. Sind dann $A' \in PA$, $B' \in PB$, $C' \in PC$ von P verschiedene Punkte mit $AB \neq A'B'$, $AC \neq A'C'$ und $BC \neq B'C'$ und existieren die Schnittpunkte $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ und $BC \cap B'C'$, so sind diese Schnittpunkte kolinear.

Beweis

Die drei Schnittpunkte liegen in den Ebenen durch A,B,C bzw. A',B',C'. Diese Ebenen sind verschieden (warum ?) und schneiden sich daher nach 1.10 in einer Geraden. □

Hilfssatz 1.11 ist eine Variante des berühmten Satzes des Mathematikers DESARGUES (1591-1661)



Figur 10

(1.12) Anmerkungen

(a) Wenn man die vorherige Figur nicht räumlich, sondern als Teil der Ebene auffaßt, so scheint die Behauptung immer noch zu gelten; jedoch ist der Beweis nicht übertragbar. Tatsächlich ist eine entsprechende Aussage nicht aus ($\mathcal{I}$1)-($\mathcal{I}$5) beweisbar, wenn P,A,B und C in einer Ebene liegen (auch nicht bei Hinzunahme des Axioms (EP), s.u.)), Es gibt nämlich Ebenen, in denen die Schnittpunkte nicht mehr kollinear sind, sogenannte nicht-desarguessche Ebenen:

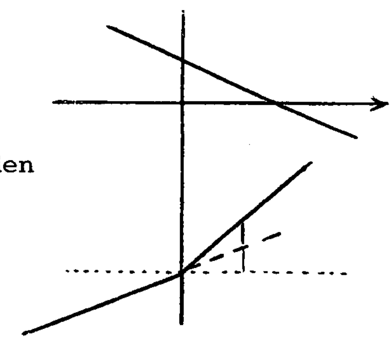
(b) Beispiel einer *nicht-desarguesschen Ebene.*

$\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$

$\mathcal{G}$: 1. Alle Geraden der reellen eukidischen Ebene, die parallel zu einer der Achsen sind oder negative Steigung haben , d.h. Geraden mit einer Gleichung der Form x=a, y=c oder $y=mx+b$ mit $m<0$.

2. "Moulton-Geraden" mit positiver Steigung, die sich im Punkt (0,b) aus 2 euklidischen Halbgeraden positiver Steigung so zusammensetzen, dass die Steigung der Halbgeraden in der rechten Halbebene doppelt so groß ist wie die der entsprechenden Halbgeraden in der linken Halbebene:
Geradengleichung $y = mx + b$ für $x \leq 0$ und $y = 2mx + b$ für $x > 0$ mit $m > 0$ (s. Figur 11).

Diese Ebene heißt *MOULTON Ebene.*



Figur 11

Aufgabe 5*[1)]

Zeigen Sie, daß die Moulton-Ebene eine nicht-desarguessche Ebene ist.

(c) Man kann (durch Rechnen mit Koordinaten) beweisen, dass für jeden Körper K in der Ebene AG(2,K) die Folgerung des Hilfssatzes (1.11) für je drei Geraden PA, PB, PC dieser Ebene gilt. (Wählen Sie ein Koordinatensystem derart, daß P,A,B die Koordinaten (0,0), (1,0), (0,1) haben !) Ein Beweis ist jedoch im Rahmen der projektiven Ebene (s.u.) leichter zu führen, sodass wir ihn vorerst übergehen.

(d) Mehr über den Satz von Desargues bringt der nächste Paragraph, in dem wir auf das Parallelenaxiom und auf Parallelprojektionen eingehen.

Bisher haben wir noch nicht ausgeschlossen, dass die Punkte unseres Inzidenzraumes alle in einer Ebene liegen. Diesen Fall - und damit auch AG(2,K), PG(K^3) - schliessen wir nun durch das folgende Axiom aus; dadurch werden Ebenen zu echten "Unterstrukturen".

*) Der Stern hinter einer Nummer deutet an, daß die entsprechende Aufgabe oder Passage übergangen werden kann.

(1.13) Axiom $I6$ (Ausschluss der Ebenen als Gesamtraum)

> *Es gibt vier Punkte, die nicht alle in derselben Ebene liegen.*

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass in jedem Modell des Axiomensystems (I 1) -(I 6) mindestens 4 Ebenen existieren.

(b) Geben Sie ein minimales Modell an (4 Punkte, 6 Geraden, 4 Ebenen)!

(1.14) Beispiele von Modellen der Axiome (I 1)-(I 6)

(a) AG(3,K), der 3-dim affine Raum über dem Körper K.

Wiederholung der Definition:

$\mathcal{P} \;=\; K^3$

$\mathcal{G} \;=\;$ Menge der 1-dim affinen Unterräume des Vektorraums K^3:
$g = \vec{a} + \vec{b}K$ (mit $\vec{a}, \vec{b} \in K^3$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$)

$\mathcal{E} \;=\;$ Menge der 2-dim affinen Unterräume des Vektorraums K^3:
$E = \vec{a} + \vec{b}K + \vec{c}K$ (mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in K^3$ und $\vec{b} \notin \vec{c}K \neq \{\vec{0}\}$)

(b) P : irgendeine offene Teilmenge (im Sinne der Analysis) von $\mathbb{R}^3$; Geraden, Ebenen, Inzidenzen geeignet definiert (wie ?).

Aufgabe 7*

Wir definieren die sogenannte projektive Geometrie $PG(K^{n+1})$ (aus später zu behandelnden Gründen auch als PG(n,K) geschrieben) des Vektorraums K^{n+1} der Dimension $n + 1$ über K (für $n \geq 2$, K Körper) folgendermaßen: Punkte von $PG(K^{n+1})$ sind die 1-dim, Geraden die 2-dim und Ebenen die 3-dim Unterräume von K^{n+1}. Inzidenz ist jeweils "$\subseteq$". Zeigen Sie, dass $PG(K^{n+1})$ ein Inzidenzraum ist! Prüfen Sie, für welche n die Axiome ($I5$) bzw. ($I6$) gültig sind!

M Anmerkung: Wir sind also noch weit von einem kategorischen Axiomensystem (als einem, zu dem es bis auf "Isomorphie" nur
M ein Modell gibt,) entfernt.

(1.15) Vereinbarung: Im folgenden werden wir (falls nicht anders erwähnt) stets Inzidenzräume betrachten, die den Axiomen $I1$ bis $I6$ genügen; dabei fassen wir Geraden und Ebenen als Punktmengen und die Inzidenzrelationen als die Enthaltenseinsrelation "$\in$" auf.

§ 2 Parallelität

A) Affine Geometrie: Definition und erste Eigenschaften der Parallelität

M Zunächst wollen wir definieren, was wir unter Parallelität von Geraden bzw. Ebenen verstehen. Dabei ist etwas Vorsicht geboten, da die entsprechenden Definitionen von der Dimension des betrachteten Raumes abhängen können. In der ebenen affinen Geometrie z.B. heißen Geraden parallel, falls sie gleich oder disjunkt sind. Im Höherdimensionalen könnte eine solche Definition jedoch nicht sinnvoll aufrechterhalten werden: Es existieren auch "windschiefe" Geraden dieser Eigenschaft. Oft wird "Parallelität" daher als nicht weiter definierte Grundrelation eingeführt. Wir
M jedoch vereinbaren im Hinblick auf den 3-dim Fall (für einen beliebigen Inzidenzraum mit $I5$):

(2.1) Definition (Parallelität)

(a) Zwei *Geraden* heißen *parallel*, wenn sie entweder gleich sind oder in einer Ebene liegen und disjunkt sind (d.h. keinen Punkt gemeinsam haben).

(b) Zwei *Ebenen* heißen *parallel*, wenn sie entweder gleich oder disjunkt sind.

(c) Eine *Gerade* g und eine *Ebene* E heißen *parallel*, wenn entweder $g \subseteq E$ oder $g \cap E = \emptyset$ gilt.

(d) Für die Parallelität verwenden wir das Zeichen "$\|$" z.B. $g \| h$, $E \| F$, $g \| E$, für die Negation jeweils "$\nparallel$" (nicht-parallel).