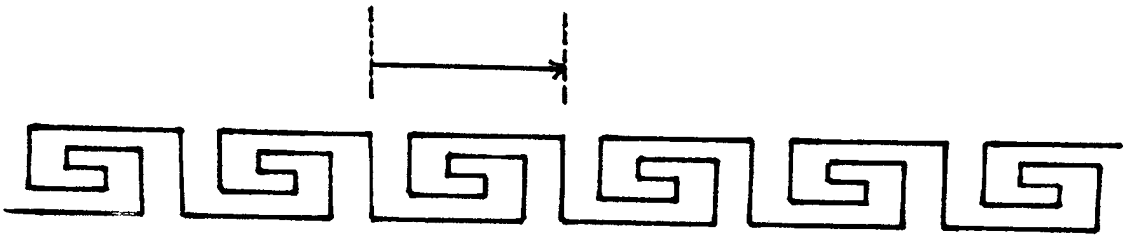
§ 3 Translationen und zentrische Streckungen; Ortsvektoren

A) Dehnungen

M Betrachtet man die Figuren 22 und 23 zum affinen Satz von Desargues (2.18) genauer, so fällt auf, dass die beiden Dreiecke A,B,C und A',B',C' durch eine zentrische Streckung bzw. eine Parallelverschiebung (Translation) aufeinander abgebildet werden können. Tatsächlich besteht hier eine enge Verbindung.

Die innermathematische Bedeutung dieser beiden Abbildungstypen liegt zum Teil daran, dass die Existenz genügend vieler Streckungen und Translationen zu einer leicht handbaren Koordinatisierung genutzt werden kann (s. §4).

Außerdem gestatten es Translationen, von der Auszeichung eines Ursprungs unabhängig zu werden.
Translationen spielen auch eine gewisse Rolle in Kunst und Natur (Bandornamente, Bsp. s. u.; Translationssymmetrie.) Literaturhinweise: H. Weyl: Symmetrien, Basel & Stuttgart, 1955. Die Welten des M.C. Escher, Herrsching (Orig. Amsterdam 1971).



M Figur 26: Bandornament

> Generalvoraussetzung: Die Struktur (P,G,E) erfülle die Axiome $(I1)$ bis $(I6)$ und (EP), sei also 3-dim affiner Raum. Falls nicht anders vermerkt, sind mit "Punkten" nur die eigentlichen Punkte also die Elemente von P, gemeint.
> (Wir weisen darauf hin, dass sich folgende Definitionen und Untersuchungen analog auf desarguessche affine Ebenen übertragen lassen und zu ähnlichen Ergebnissen führen.)

M Die oben angesprochenen Abbildungen haben die Eigenschaft, dass
M jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet wird.

(3.1) Definition

Eine Bijektion $\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ heißt *Dehnung (Dilatation, affin-axiale Kollineation)* falls für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$ gilt: $\varphi(A)\varphi(B) \parallel AB$.

Eine Dehnung φ heißt *zentrische Streckung (eigentliche Dehnung)*, falls sie mindestens einen Fixpunkt Z besitzt, d.h. einen Punkt $Z \in \mathcal{P}$ mit $\varphi(Z) = Z$.

Eine Dehnung heißt *Translation* (Parallelverschiebung), falls sie fixpunktfrei oder die Identität ist.

(3.2) Beispiele

In AG(3,K) wird zu $p \in K^3$ und $k \in K\setminus 0$ durch

$$\sigma_{p,k} : K^3 \longrightarrow K^3 \quad \text{mit } x \longmapsto k(x-p)+p$$

eine eigentliche Dehnung (zentrische Streckung) und durch

$$\tau_p : K^3 \longrightarrow K^3 \quad \text{mit } x \longmapsto x+p$$

eine Translation (Parallelverschiebung) definiert.

Beweis ... (s. Aufgabe 18a weiter unten!)

(3.3) Eigenschaften

(i) Mit φ_1 und φ_2 sind auch φ_1^{-1} und $\varphi_1 \circ \varphi_2$ Dehnungen. Die Menge der Dehnungen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe $\mathcal{D}$.

(ii) Jede Dehnung bildet kollineare Punkte auf kollineare Punkte (und damit Geraden bijektiv auf Geraden) ab.

Beweis zu (i): ....

Beweis zu (ii) : Seien A,B,C verschieden und kollinear und φ Dehnung. Aus $AB = AC$ folgt $\varphi(A)\varphi(B) \parallel AB \parallel AC \parallel \varphi(A)\varphi(C)$, also $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(A)\varphi(C)$. Die übrige Behauptung folgt aus der Existenz von φ^{-1} (s. (i)).

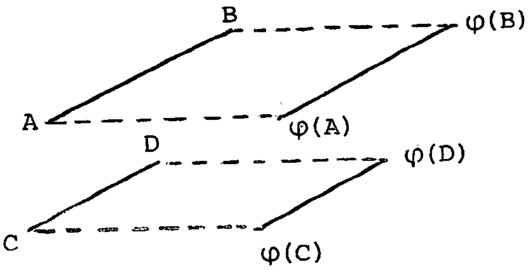
(iii) Für jede Dehnung φ und beliebige Punkte $A,B,C,D \in \mathcal{P}$ mit $A \neq B$, $C \neq D$ gilt $AB \parallel CD \Rightarrow \varphi(A)\varphi(B) \parallel \varphi(C)\varphi(D)$.

Dehnungen erhalten also die Parallelität von Geraden.

(iv) Jede Dehnung bildet komplanare Punkte auf komplanare Punkte (und damit jede Ebene $H \in \mathcal{E}$ bijektiv auf eine Ebene) ab.

Beweis zu (iii):

$\varphi(A)\varphi(B) \parallel AB \parallel CD \parallel \varphi(C)\varphi(D)$.
(vgl. Figur 27). □



Figur 27

Beweis zu (iv): Sei $A,B,C,D \in H$ und φ Dehnung. 1. Fall: Gilt $AB \parallel CD$, so nach (iii) auch $\varphi(A)\varphi(B) \parallel \varphi(C)\varphi(D)$; die Bildpunkte liegen also in einer Ebene. 2. Fall: Schneiden sich jedoch AB und CD, so auch $\varphi(A)\varphi(B)$ und (nach (iii)) $\varphi(C)\varphi(D)$, woraus ebenfalls die Behauptung folgt.

□

(v)* Unter einer Dehnung bleiben uneigentliche Punkte und Geraden (elementweise) fest.

Beweis: Nach Definition 3.1 wird jede Gerade auf eine Parallele abgebildet, daher jeder uneigentliche Punkt auf sich.

□

Aufgabe 18*

a) Weisen Sie nach, dass die in (3.2) angegebenen Abbildungen tatsächlich Dehnungen sind !

b) Zeigen Sie (unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes), dass es außer den in (3.2) angegebenen Beispielen keine weiteren Dehnungen in $AG(3,K)$ gibt!

(3.4) Hilfssatz

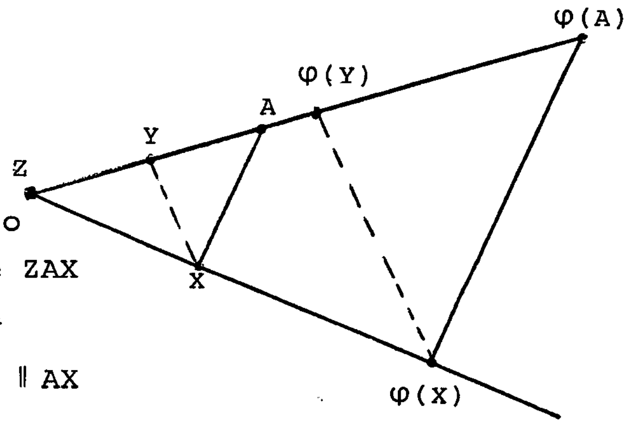
(a) Sei φ eine Dehnung mit Fixpunkt $Z=\varphi(Z)$. Dann ist φ durch einen Punkt $A \neq Z$ und seinen Bildpunkt $\varphi(A)$ eindeutig bestimmt. Es gilt $\varphi(X) \in ZX$ für jeden Punkt $X \in P$ mit $X \neq Z$.

(b) Sei τ eine Translation. Dann ist τ durch einen Punkt A und seinen Bildpunkt eindeutig bestimmt. Ist τ nicht die Identität, so gilt ferner $X\tau(X) \parallel Y\tau(Y)$ für je zwei Punkte $X,Y \in P$; und für jedes $X \in P$ ist $X\tau(X)$ Fixgerade von τ.

Anmerkung: Die Existenz einer Dehnung mit Fixpunkt Z, welche einen gegebenen Punkt $A \neq Z$ auf einen gegebenen Punkt A' mit $A' \in AZ \setminus \{Z\}$ abbildet (bzw. einer Translation, die A auf A' abbildet), wird (noch) nicht behauptet. (Sie kann übrigens nicht ohne Hilfe des Axioms (I6) oder die Voraussetzung des Satzes von Desargues bewiesen werden).

Beweis von (3.4) (s. Figuren 28a und 28b)

(a)(i) Wir zeigen zunächst: $\varphi(X) \in ZX$ (für einen beliebigen Punkt $X \neq Z$):
$ZX \parallel \varphi(Z)\varphi(X) = Z\varphi(X)$,
also $\varphi(X) \in ZX = Z\varphi(X)$.



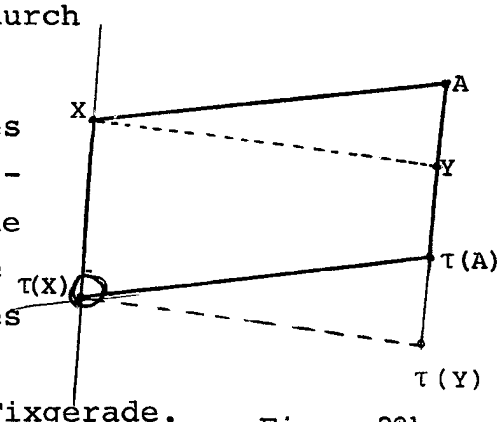
Figur 28 a

(ii) Seien nun A und $\varphi(A)$ gegeben. Ist $X \notin ZA$, so ist $\varphi(X)$ in der Ebene ZAX durch die Bedingungen

$\varphi(X) \in ZX$ und $\varphi(A)\varphi(X) \parallel AX$

festgelegt. Ist $Y \in ZA$, so schließt man ebenso, wobei $A, \varphi(A)$ nun durch $X, \varphi(X)$ mit $X \notin ZA$ ersetzt wird.

(b)(i) Wir zeigen, daß $X\tau(X)$ für jedes $X \in P$ Fixgerade unter der Translation $\tau \neq id_P$ ist: τ bildet die Gerade $X\tau(X)$ auf die parallele Gerade $\tau(X)\tau^2(X)$ ab. Wegen des gemeinsamen Punktes $\tau(X)$ gilt $X\tau(X) = \tau(X\tau(X))$; also ist $X\tau(X)$ Fixgerade.



Figur 28b

(ii) Wir betrachten nun die sogenannten "Spuren" $X\tau(X)$:
Infolge $XY \parallel \tau(X)\tau(Y)$ liegen (für verschiedene Punkte $X,Y \in P$) die Punkte $X,Y,\tau(X),\tau(Y)$ in einer Ebene. Die Fixgeraden $X\tau(X)$ und $Y\tau(Y)$ sind daher entweder parallel oder schneiden sich in einem Fixpunkt; der letzte Fall ist nur für $\tau = id_P$ möglich.

(iii) Seien nun A und $\tau(A)$ gegeben und $A \neq \tau(A)$, d.h. $\tau \neq id$. Ist $X \notin A\tau(A)$, so legen die Eigenschaften $AX \parallel \tau(A)\tau(X)$ und $X\tau(X) \parallel A\tau(A)$ den Bildpunkt $\tau(X)$ eindeutig fest (Parallelogrammkonstruktion). Für $Y \in A\tau(A)$ wird die Konstruktion von $\tau(Y)$ über einen Hilfspunkt X ausgeführt (ähnlich wie bei a).

Anmerkung:
Ist τ Translation, so ist $\tau|_{g\to\tau(g)}$ nach 3.4b für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ eine Parallelprojektion.

Wir erwähnten schon, dass für beliebige (nicht-desarguesche) Ebenen nicht alle nach (3.4) möglichen Dehnungen zu existieren brauchen. Jedoch gilt:

(3.5) Satz (Existenz von Dehnungen)

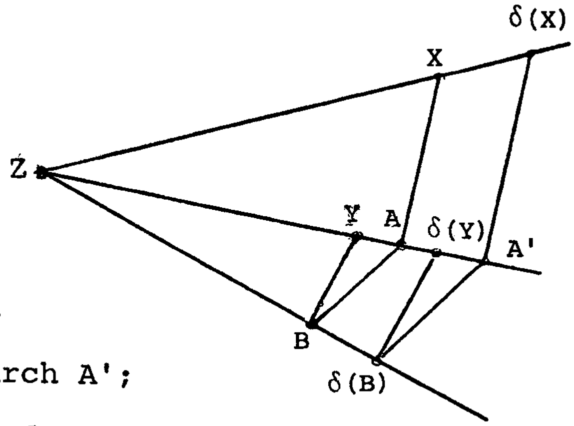
Für einen 3-dim affinen Raum (P,G,E) gilt:

(a) Zu gegebenen Punkten Z,A,A' einer Geraden $g \in G$ mit $Z \neq A,A'$ gibt es (genau) eine zentrische Streckung δ, welche Z fest lässt und A auf A' abbildet.

(b) Zu zwei Punkten $A,A' \in P$ gibt es (genau) eine Translation τ, welche A auf A' abbildet. (Wir bezeichnen sie mit $\tau_{AA'}$).

Beweis-Skizze: Die Eindeutigkeit der beschriebenen Dehnungen ergibt sich aus 3.4; zu zeigen ist hier also die Existenz.

(a) Wir wählen einen Hilfspunkt $B \notin ZA$ beliebig und definieren eine Abbildung $\delta : P \longrightarrow P$ wie folgt (s. Figur 29):

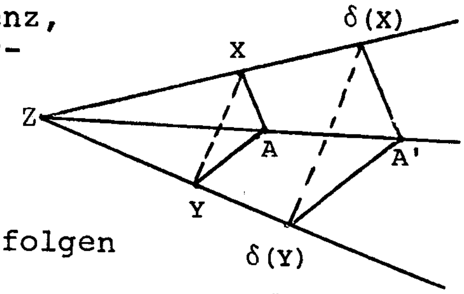


Figur 29

$\delta(Z) := Z$; $\delta(A) := A'$;
für jeden Punkt X mit $X \notin ZA$ (insbesondere für $X = B$) sei $\delta(X)$ der Schnittpunkt von ZX mit der Parallelen zu AX durch A';
für $Y \in ZA \setminus \{Z\}$ sei $\delta(Y)$ der Schnittpunkt von ZA mit der Parallelen zu BY durch $\delta(B)$.
Nun ist δ eine Bijektion mit Fixpunkt Z. Zu zeigen bleibt

$$\delta(X)\delta(Y) \parallel XY \quad \text{für alle Punktepaare } (X,Y) \text{ mit } X \neq Y.$$

Der Beweis dieser Tatsache erfordert in einigen Fallunterscheidungen die (z.T. mehrfache) Anwendung des affinen Satzes von Desargues (2.18). Wir behandeln hier nur einen Fall und verweisen bzgl. der weiteren Einzelheiten auf das Buch: H. Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik.



Figur 30

1. Fall
Seien $X,Y \in P$ mit $X,Y \notin ZA$, $X \notin ZY$; (s. Fig. 30); dann folgen laut Konstruktion von δ die Beziehungen $AX \parallel A'\delta(X)$ und $AY \parallel A'\delta(Y)$. Nach (2.18) ist dann auch $XY \parallel \delta(X)\delta(Y)$.
2. Fall X,Y,Z kollinear Bew. ... 3. Fall $Y \in ZA$ (A durch B ersetzen!)

(b) Der Beweis verläuft analog zu Teil a); nur ist jetzt (im Falle $A \neq A'$) Z als der uneigentliche Punkt der Geraden AA' zu wählen. (Im Falle $A = A'$ ist $\tau = id_P$).

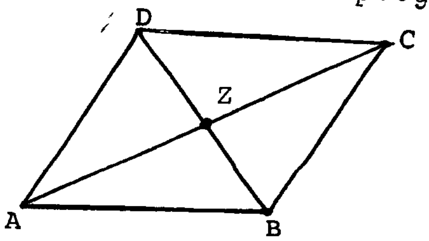
□

<u>Aufgabe 19*</u>

(a) In einem 3-dim affinen Raum (bzw. einer desarguesschen affinen Ebene) sei (A,B,C,D) ein Parallelogramm mit (eigentlichem) Diagonalenschnittpunkt $Z = AC \cap BD$ (s. Fig. 31).

Die Dehnung δ mit Fixpunkt Z und $\delta(A) = C$ heißt *Punktspiegelung.*

(Beachten Sie, dass z.B. in AG(3,GF(2)) der Punkt Z und damit δ nicht existiert.)



Figur 31

a) Beweisen Sie, dass jede Punktspiegelung δ involutorisch ist, das heißt, dass $\delta \neq \delta^2 = \mathrm{id}$ gilt.

b) Beweisen Sie in Umkehrung zu Teil a), dass eine involutorische zentrische Streckung eine Punktspiegelung ist.

c) Zeigen Sie, dass eine Punktspiegelung schon durch ihren Fixpunkt Z bestimmt ist, also nicht von der speziellen Wahl von A,B,C,D abhängt. <u>Lösungshinweis</u>: Nehmen Sie an, es gäbe verschiedene Parallelogramme (A,B,C,D) und (A,B,C',D') mit gleichem Diagonalschnittpunkt Z und wenden Sie den kleinen affinen Satz von Desargues an !

<u>Aufgabe 20</u> *

Zeigen Sie, daß das Produkt zweier Punktspiegelungen (vgl. Aufgabe 19) stets eine Translation ist.

M Wie wir vielleicht noch aus dem Schulunterricht wissen, lassen sich die Punkte der Ebene bzw. des Raumes (nach Auswahl eines Ursprungs) durch (Orts-) Vektoren beschreiben. (s. auch Teil B dieses Paragraphen). Das Abtragen eines Vektors hängt eng mit der Ausführung einer Translation zusammen. Der Addition von Vektoren entspricht dabei die Hintereinanderausführung von Translationen. Im folgenden Satz untersuchen wir daher die Verknüpfung von Translationen untereinander und mit zentrischen Streckungen. M

(3.6) <u>Satz</u> (Eigenschaften der Translationsgruppe)

> (a) Die Translationen von $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ bilden einen Normalteiler $\mathcal{T}$ von $\mathcal{D}$, d.h. eine Untergruppe $\mathcal{T}$ von $\mathcal{D}$ mit
>
> $$\delta^{-1}\circ\mathcal{T}\circ\delta \subseteq \mathcal{T} \text{ für alle } \delta\in\mathcal{D} .$$
>
> (b) Die Gruppe $\mathcal{T}$ der Translationen von $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{E})$ ist kommutativ (abelsch), d.h. es gilt
>
> $$\tau_1\circ\tau_2 = \tau_2\circ\tau_1 \quad \text{für alle } \tau_1,\tau_2\in\mathcal{T} .$$

<u>Beweis:</u>

(a) Ist $\tau \neq id$ eine Translation, so auch τ^{-1} (Dehnung nach 3.3; fixpunktfrei wie τ). Sind τ_1,τ_2 Translationen, so ist es auch $\tau_1\circ\tau_2$; denn $\tau_1\circ\tau_2$ ist Dehnung; habe $\tau_1\circ\tau_2$ den Fixpunkt Z; dann folgt aus $\tau_1\circ\tau_2(Z) = Z$ sofort $\tau_2(Z) = \tau_1^{-1}(Z)$ und daraus nach (3.4) sogar $\tau_2 = \tau_1^{-1}$, also $\tau_1\circ\tau_2 = id$. <u>Also ist $\mathcal{T}$ Untergruppe von</u> $\mathcal{D}$.

Sicher ist für $\delta\in\mathcal{D}$ auch $\delta^{-1}\circ\mathcal{T}\circ\delta\subseteq\mathcal{D}$. Sei also Z ein Fixpunkt von $\delta^{-1}\circ\tau\circ\delta$; dann ergibt sich

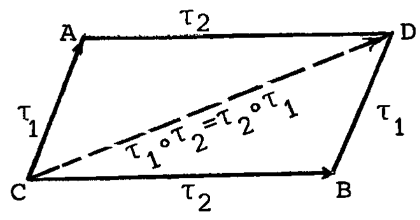
$\tau\circ\delta(Z) = \delta(Z)$; die Translation τ hat in diesem Fall den Fixpunkt $\delta(Z)$, was $\tau = id$ und $\delta^{-1}\circ\tau\circ\delta = id$ bedingt. Also ist $\delta^{-1}\circ\tau\circ\delta$ Translation für alle $\tau\in\mathcal{T}$ und alle $\delta\in\mathcal{D}$.

(b) Seien $\tau_1 = \tau_{CA}$ und $\tau_2 = \tau_{CB}$ (für $C\in\mathcal{P}$ fest gewählt). (Erinnerung: τ_{XY} bezeichnet die Translation, die X auf Y abbildet, vgl. 3.5.b).

Wir unterscheiden zwei Fälle.

<u>Fall 1</u>: A,B,C liegen nicht auf einer Geraden (Figur 32).

Sei D der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch B mit der Parallelen zu BC durch A.



Figur 32

Gemäß der Parallelogramm-Konstruktion gilt wegen $\tau_1(C) = A$ auch $\tau_1(B) = D$ und wegen $\tau_2(C) = B$ auch $\tau_2(A) = D$.

Insgesamt ergibt sich

$\tau_1 \circ \tau_2 (C) = \tau_1 (B) = D = \tau_2 (A) = \tau_2 \circ \tau_1 (C)$.

Nun sind $\tau_1 \circ \tau_2$ und $\tau_2 \circ \tau_1$ beides Translationen mit übereinstimmendem Bildpunkt zu C. Aus (3.4) erhält man

$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1$.

Fall 2:* A,B,C sind kollinear.

In diesem Fall wählen wir einen Hilfspunkt $H \notin AC$. Unter Verwendung des 1. Falles schließen wir wir folgt:

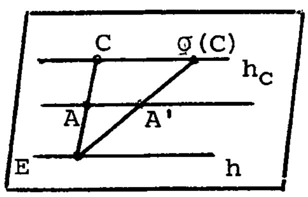
$$\begin{aligned}
\tau_{CB} \circ \tau_{CA} &= \tau_{CB} \circ (\tau_{HA} \circ \underbrace{\tau_{AH}) \circ \tau_{CA}} \\
&= (\tau_{CB} \circ \tau_{HA}) \circ \tau_{CH} \underset{1.F.}{=} (\tau_{HA} \circ \tau_{CB}) \circ \tau_{CH} \\
&= \tau_{HA} \circ (\tau_{CB} \circ \tau_{CH}) \underset{1.F.}{=} \underbrace{\tau_{HA} \circ (\tau_{CH}} \circ \tau_{CB}) \\
&= \tau_{CA} \circ \tau_{CB}
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 21 [A]

Seien E Ebene in einem 3-dim affinen Raum, h Gerade in E und $A, A' \in E \setminus h$ verschiedene Punkte mit $AA' \| h$.

Nach Wahl eines Hilfspunktes $B \in E$ mit $B \notin h \cup AA'$ definieren wir eine Abbildung $\sigma : E \longrightarrow E$ durch



Figur 33a

$\sigma(A) := A'$

$\sigma(P) := P$, falls $P \in h$,

$\sigma(C) := (AC \cap h)A' \cap h_C$, falls $C \notin h \cup AA'$,

wobei h_C die Parallele zu h durch C bezeichnet (vgl. Figur 33a), und

$\sigma(D) := (BD \cap h)\sigma(B) \cap AA'$ für $D \in AA'$ (vgl. Figur 33b)!

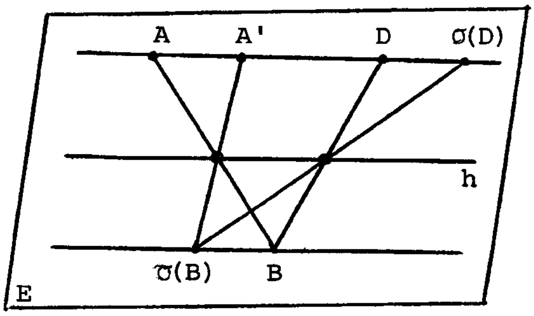
Wir nennen σ eine *Scherung* von E mit Achse h.

Zeigen Sie:

(i) σ ist eine Bijektion von E auf sich.

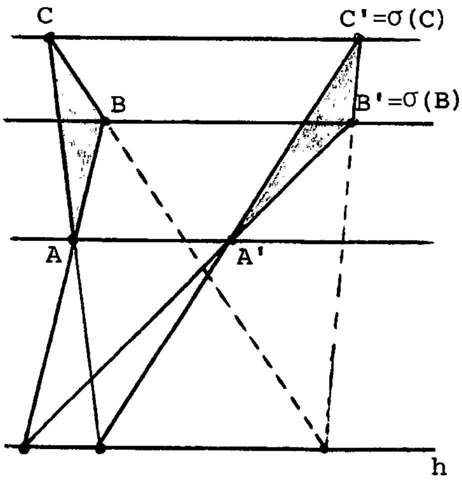
(ii) σ hängt nicht von der Wahl des Hilfspunktes B ab.

(iii) σ und σ^{-1} bilden kollineare Punkte auf kollineare Punkte ab.

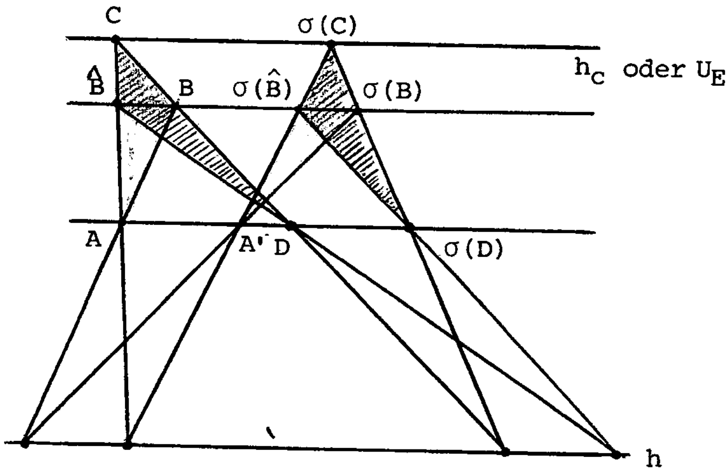


Figur 33b

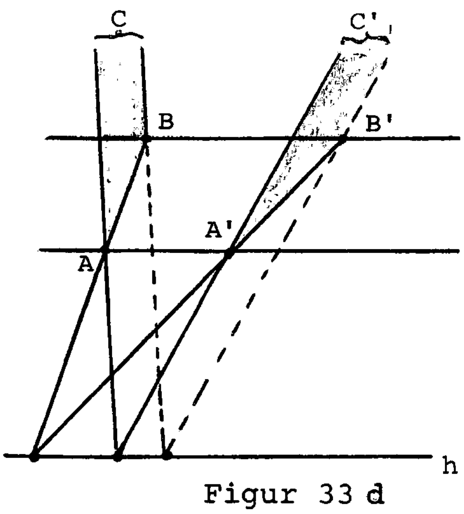
Lösungshinweis: Falls Sie Satz(2.22) übergangen haben, benutzen Sie folgende spezielle Version des Satzes von Desargues (vgl. Figur 33c):
Sind AA', BB' und CC' verschiedene parallele Geraden von E oder sind AA', BB' verschiedene parallele Geraden und C,C' verschiedene uneigentliche Punkte von E, liegen ferner die eigentlichen Schnittpunkte $AB \cap A'B'$ und $AB \cap A'C'$ auf einer Geraden h mit $h \parallel AA'$, so folgt: $BC \cap B'C' \in h$ (s. Figuren 33c,d). Vgl. auch Figur 33e!



Figur 33c



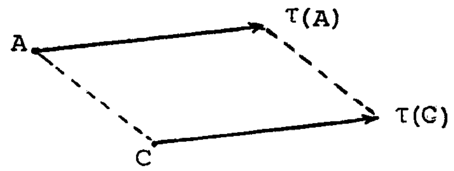
Figur 33e



Figur 33 d

B) (Orts-) Vektoren

M Ein *Pfeil* in der Zeichenebene oder im Anschauungsraum ist durch seinen Anfangspunkt A, seinen Endpunkt B und seine "Orientierung" (von A nach B) festgelegt. Wir bezeichnen daher (etwas abstrakter) ein geordnetes Punktepaar (A,B) als *Pfeil*. Betrachtet man eine Parallelverschiebung τ, so sind alle Pfeile $(A,\tau(A))$ vom Urbild zum Bildpunkt parallel, von gleicher "Orientierung" und gleicher Länge. Man nennt solche Pfeile *vektorgleich* oder *parallelgleich*. Parallelgleichheit läßt sich auch ohne die Begriffe "Orientierung" und "Länge" mit Hilfe von Parallelogrammen definieren. (Wie ? Vgl. Fig. 34). Parallelgleichheit von Pfeilen ist dabei eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Vektoren*. Jeder Vektor ist also eine (maximale) Menge parallelgleicher Pfeile. Zu jeder Parallelverschiebung gehört ein eindeutig bestimmter Vektor, und umgekehrt erhält man aus einem Vektor v eine Parallelverschiebung, indem man jedem Punkt A den "Endpunkt" B des Pfeiles (A,B) aus v mit Anfangspunkt A zuordnet (Abtragen des Vektors v im Punkt A). Auch in einem unserem Axiomensystem genügenden Modell könnten wir Vektoren mit Hilfe von Pfeilen und Parallelogrammen erklären. Einfacher ist es jedoch, bei der Definition von Vektoren auf die Translationen (wie wir die Parallelverschiebungen jetzt nennen) zurückzugreifen: Beachtet man, daß eine Abbildung τ von P in P durch den Relationsgraphen $\{(A,\tau(A))\,|\,A \in P\}$ beschrieben wird und dies für eine Translation die Menge der Pfeile eines Vektors ist, so braucht man den Begriff "Vektor" nicht neu zu definieren, sondern kann die Bezeichnungen "Translation" und "Vektor" synonym benutzen! M



Figur 34

(3.7) Vereinbarung

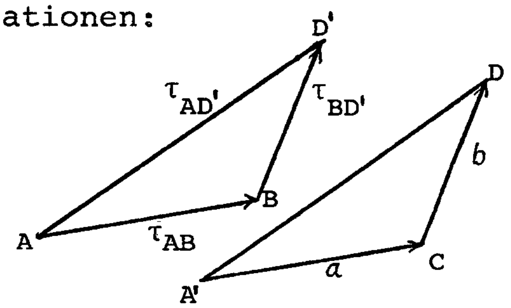
Translationen bezeichnen wir ab jetzt auch als *Vektoren*. Durch je zwei Punkte $A,B \in P$ ist dann genau ein Vektor bestimmt, nämlich $a = \tau_{AB}$. Umgekehrt gehört zu jedem Vektor a eine Klasse von Punktepaaren (Pfeilen): $\{(A,a(A))\,|\,A \in P\}$. [1)]

Als *Summe der Vektoren* $a = \tau_{AB}$ und $b = \tau_{CD}$ bezeichnen wir die Komposition der entsprechenden Translationen:

$$b + a := \tau_{CD} \circ \tau_{AB}$$

Die Identität heiße nun *Nullvektor* ($o = \mathrm{id}_P$).

Durch unser Vorgehen ist sofort klar, dass die Summe $b + a$ unabhängig



Figur 35

1) Je zwei dieser Pfeile bilden, wenn sie nicht auf einer Geraden liegen, ein Parallelogramm (vgl. Figur 34), könnten also parallelgleich genannt werden.

<u>von den Repräsentanten</u> (A,B) von a

bzw. (C,D) von b ist; zur direkten Angabe von $b+a$ ist es allerdings hilfreich, statt (C,D) mit beliebigem C den Repräsentanten ($\underline{\underline{B}}$,D') für b zu wählen (mit $D' = b(B)$), (Aneinandersetzen der Pfeile 2), s. Figur 35, sog. Spitze-Fuß-Regel)

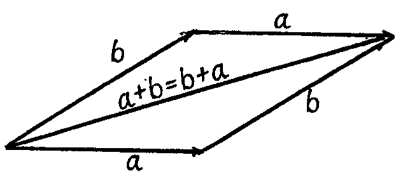
$$b + a = \tau_{\underline{B}D'} \circ \tau_{A\underline{B}} = \tau_{AD'} \; .$$

M Beachten Sie, dass wir nur Bezeichnungen und unsere Vorstellung geändert haben: $(T,+)$ ist weiterhin das Objekt $(T,\circ)$, nur sprechen wir nun von der Vektorengruppe und schreiben die Verknüpfung additiv.

Die neue Interpretation verdeutlicht auch einige Zusammenhänge zwischen geometrischen Figuren, geometrischen Abbildungen und algebraischen Operationen mit Vektoren. So hängen das Kommutativgesetz der Translations- und damit Vektorengruppe

$\forall a,b \in T : a+b = b+a$ (vgl. Satz (3.6)b)

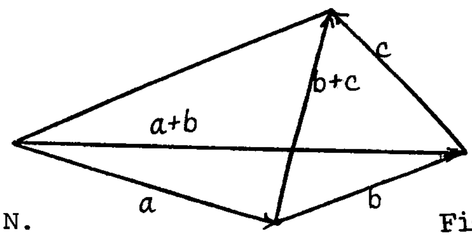
mit Parallelogrammen zusammen, s. Fig. 36,



Figur 36

M und das Assoziativgesetz mit folgender Figur 37.

Um nun P durch Vektoren beschreiben zu können, zeichnen wir einen Punkt aus. Wir nennen ihn <u>Ursprung</u>, Koordinatenanfangspunkt oder <u>Nullpunkt</u>. Zur besseren Unterscheidung vom Nullvektor und evtl. von der Null des Körpers bezeichnen wir ihn nicht wie üblich mit O, sondern mit N.



Figur 37

(3.8) <u>Definition und Zuordnung von Ortsvektoren</u>

(a) Nach Auszeichung eines Punktes $N \in P$ als <u>*Ursprung*</u> lässt sich nun jedem Punkt P der Vektor $p = \tau_{NP}$ zuordnen; er heißt <u>*Ortsvektor*</u> des Punktes P.

(b) Die Zuordnung $P \longrightarrow T$, die jedem Punkt P seinen Ortsvektor zuordnet, ist eine *Bijektion*.

Man kann, muss aber nicht, die Punkte mit ihren Ortsvektoren identifizieren.

2) Der Definition der Komposition von Abbildungen folgend wird hier zuerst der Pfeil des zweiten Summanden, dann der des ersten abgetragen. Dieser Unterschied zum schulüblichen Vorgehen ist aber wegen der Kommutativität der Translationsgruppe nicht wesentlich.

<u>Beweis von (b)</u>

Zu $P \in \mathcal{P}$ existiert nach (3.5) genau eine Translation, die N auf P abbildet; damit existiert $p = \tau_{NP}$ und ist eindeutig bestimmt. Umgekehrt gehört zu jeder Translation τ der Punkt $\tau(N)$.

□

(3.9) <u>Anmerkung</u>

Die Existenz und Eindeutigkeit von Ortsvektoren hängt also mit der <u>scharfen Transitivität (Regularität) von $\mathcal{T}$</u> zusammen. Dabei heißt eine Permutationsgruppe G von Ω *transitiv* auf Ω, falls gilt: $\forall a,b \in \Omega \; \exists g \in G : g(a) = b$; sie heißt *scharf transitiv (regulär)*, falls gilt:

$$\forall a,b \in \Omega \; \exists 1 g \in G : g(a) = b.$$

<u>Aufgabe 22*</u>

Zeigen Sie

(a) Ist G eine transitive Permutationsgruppe von Ω, so ist G genau dann scharf transitiv, wenn alle $g \in G - \{id\}$ fixpunktfrei sind.

(b) Ist G eine scharf transitive Permutationsgruppe von Ω und $\omega_o \in \Omega$ fest gewählt, so ist $\alpha : G \to \Omega$ mit $g \mapsto g(\omega_o)$ eine Bijektion.

(3.10) <u>Anmerkung</u>

Gehen wir von den Punkten von $\mathcal{P}$ nach Auswahl eines Ursprungs N zu ihren Ortsvektoren über, so hat eine Translation τ die Darstellung: $\tilde{\tau} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ mit $x \longmapsto \tau + x$. Zum Beweis beachten wir folgendes Schema:

$$\begin{array}{lcll} \tau : X \longmapsto \tau(X) & = & \tau \circ \tau_{NX}(N) & \quad \text{Punkte} \\ \updownarrow & & \updownarrow & \\ \tilde{\tau} : \tau_{NX} \longmapsto & & \tau + \tau_{NX} & \quad \text{Ortsvektoren} \end{array}$$

Umgekehrt wird für $p \in \mathcal{T}$ durch $x \longmapsto x + p$ eine Translation beschrieben. (Vgl. auch (3.2)).

Aufgabe 23

Beweisen Sie, dass jede Translation eine beliebige Ebene aus $\mathcal{E}$ auf eine zu ihr parallele Ebene abbildet.

Aufgabe 24

Zeigen Sie für nicht-kollineare Punkte $N,P,Q \in \mathcal{P}$

a) τ_{NP} lässt die Gerade NP und jede Ebene durch NP fest.

b) $\tau_{NP} \circ \tau_{NQ}$ lässt die Ebene NPQ fest.

Aufgabe 25

Zeigen Sie, dass nach Auszeichnung eines Ursprungs N bei der Zuordnung der Punkte zu ihren Ortsvektoren den Geraden und Ebenen durch N Untergruppen von $\mathcal{T}$ entsprechen (und damit Geraden und Ebenen allgemein Nebenklassen nach diesen Untergruppen).

Lösungshinweis: Betrachten Sie diejenigen Elemente von $\mathcal{T}$, die die betrachtete Gerade bzw. Ebene fest lassen (vgl. Aufgabe 24a))!