§ 20. Vermischte Aufgaben zur ebenen euklidischen Geometrie

Generalvoraussetzung: E reelle euklidische Ebene

Aufgabe 104

Zeigen Sie für beliebige Geraden g,h von E

$$\gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_g \circ \gamma_{h'} \quad \text{für} \quad h' = \gamma_g(h).$$

Lösungshinweis: Finden Sie zwei Fixpunkte von $\gamma_{h'} \circ \gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_g$.
Wieso folgt schon daraus leicht die Behauptung?

Aufgabe 105

(i) Zeigen Sie den Kongruenzsatz SSS (vgl. 9.17) mit Hilfe von Eigenschaften von Bewegungen und den Resultaten von (14.6) über Lot und Winkelhalbierende.

(ii) Folgern Sie, daß 2 verschiedene Kreise der Ebene höchstens 2 Schnittpunkte haben.

Aufgabe 106

Zeigen Sie, daß keine von der Identität verschiedene Translation von E eine endliche Punktmenge in sich abbildet.

Aufgabe 107

Es sei ρ eine Gleitspiegelung, die keine Geradenspiegelung ist.
Zeigen Sie:

(i) ρ ist fixpunktfrei

(ii) Aus $\rho = \gamma_a \circ \gamma_b \circ \gamma_g$ mit $a \perp g \perp b$ folgt $\rho = \gamma_g \circ \gamma_a \circ \gamma_b$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ρ^n eine Gleitspiegelung, die keine Achsenspiegelung ist, oder eine nicht-triviale Translation.

Aufgabe 108

Bestimmen Sie die Höchstzahl von Symmetrieachsen, die eine Menge M von n Punkten von E besitzen kann.

Lösungshinweis: Beachten Sie, dass es im Falle $2 \leq n < \infty$ einen Punkt von M gibt, durch den höchstens eine Symmetrieachse von M verläuft, und dass es zu $P, Q \in M$, $P \neq Q$, höchstens eine Spiegelung gibt, die P auf Q abbildet.

Aufgabe 109

Sei M eine endliche, nicht-leere Punktmenge von E. Zeigen Sie:

(i) Die Symmetriegruppe von M besteht aus Drehungen und Spiegelungen.

(ii) Besitzt M mehrere Symmetrieachsen, so schneiden sich alle Symmetrieachsen in einem gemeinsamen Punkt.

Lösungshinweis: Beachten Sie Aufgaben 106 & 107!

Aufgabe 110

Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck Δ mit Seitenlänge 6 [cm] und beschreiben Sie ihm ein gleichseitiges Dreieck ein, dessen Seiten auf denen von Δ senkrecht stehen.

Aufgabe 111

Zeigen Sie: (i) Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ΔABC von E ist Mittelpunkt eines Inkreises, d.h. eines alle drei Seiten von ΔABC berührenden Kreises.

(ii) Der Inkreis eines Dreiecks ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 112

Zeigen Sie für E:

(i) Zwei verschiedene Kreise haben höchstens zwei Punkte gemeinsam.

(ii) Es gibt genau einen Kreis, der drei gegebene nicht-kolineare Punkte enthält.

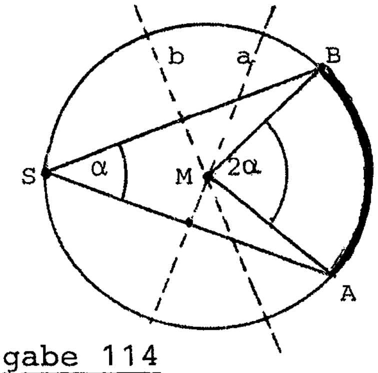
(iii) Haben zwei Kreise mit Mittelpunkt M_1 bzw. M_2 (mit $M_1 \neq M_2$) die Punkte A und B (mit $A \neq B$) gemeinsam, so gilt $M_1M_2 \perp AB$.

Aufgabe 113 (Winkel über einen Kreisbogen)

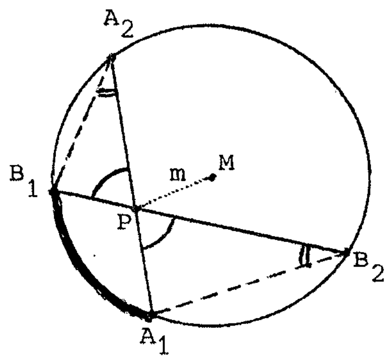
Sei $\mathfrak{k}$ Kreis von E und M der Mittelpunkt von $\mathfrak{k}$, ferner A,B,S, S' verschiedene Punkte von $\mathfrak{k}$ mit $S, S' \notin \mathrm{Inn}\sphericalangle AMB$. Beweisen Sie den sogenannten Randwinkelsatz*) (Peripheriewinkelsatz, Umfangswinkelsatz): $|\sphericalangle ASB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AMB| = |\sphericalangle AS'B|$. (Insbesondere haben in einem Kreis je zwei Winkel über dem gleichen Bogen die gleiche Größe).

*) Die erste Gleichheit ist die Aussage des Zentriwinkelsatzes (Mittelpunktswinkelsatzes)

Lösungshinweis:[1] Betrachten Sie die Drehung δ um M, die A in B überführt und stellen Sie δ als Produkt zweier Spiegelungen $\gamma_b \circ \gamma_a$ dar, wobei a die Mittelsenkrechte von $\overline{AS}$ bezeichne (s. Figur 198).



Figur 198

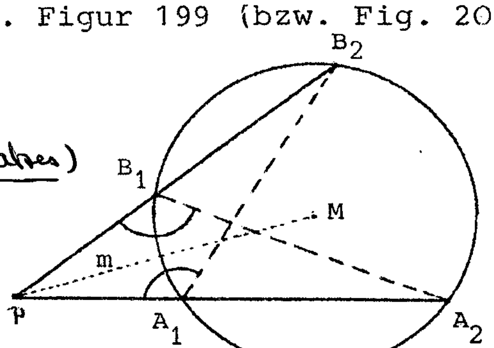


Figur 199

Aufgabe 114

Beweisen Sie für E den folgenden Potenzsatz[2] am Kreis: Sind durch einen inneren (bzw. äußeren) Punkt P eines Kreises mit Radius r und Mittelpunkt M und $|\overline{MP}| = m$ Sehnen (bzw. Sekanten) gelegt, die den Kreis in den Punkten A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 schneiden, s. Figur 199 (bzw. Fig. 200), so gilt $|\overline{PA_1}| \cdot |\overline{PA_2}| = |\overline{PB_1}| \cdot |\overline{PB_2}| = |m^2 - r^2|$ $= |\overline{PT}|^2$ für den Berührpunkt T der Tangente durch den äußeren Punkt P (Aussage des Sekanten-Tangentensatzes)

Lösungshinweis: Beachten Sie Aufgabe 113!



Figur 200

---

2) Auch Sehnen-Sekantensatz genannt.

1) Alternativ: Beweis mittels Vierseitensatz: Für jedes einem Kreis einbeschriebene Viereck gilt: Die Summe der Maße gegenüberliegender Winkel ist π.

Aufgabe 115

Durch Interpretation der komplexen Zahlen als Vektoren von $\mathbb{R}^2$ wird $\mathbb{C}$ zu einer reellen (euklidischen) Ebene E. (Gauß'sche Zahlenebene!)

a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation der Elemente von $\mathbb{C}$ mit einem festen $z_o \in \mathbb{C}$ einer Drehstreckung mit Zentrum O, die Addition von z_o einer Translation entspricht und umgekehrt.

b) Zeigen Sie, dass

$S^1 := \{z \mid |z| = 1\}$ mit der auf S^1 eingeschränkten Multiplikation eine Gruppe bildet, die zur Gruppe der Drehungen von E um O isomorph ist.

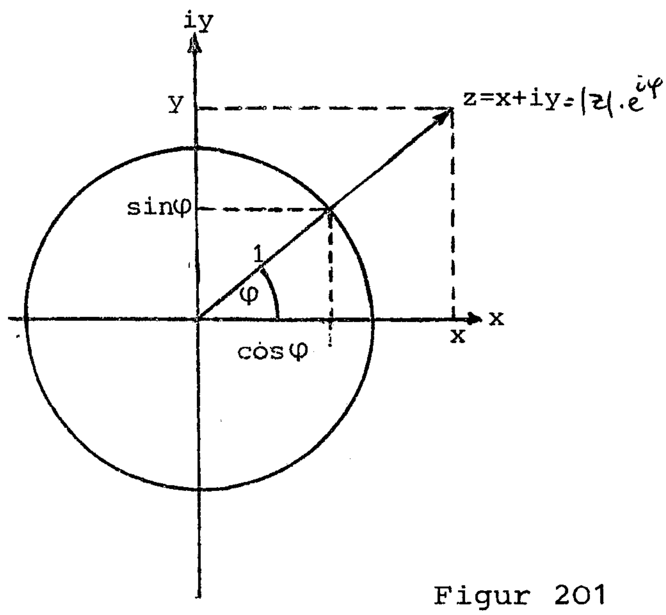
Lösungshinweis: Sie dürfen ohne Beweis die Darstellung

$z = x + iy = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

mit $\varphi = |\measuredangle(1,0,z)|$ und

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ verwenden.

(s. Figur 201).



Figur 201

Aufgabe 116:

Konstruieren Sie mit einer Geometriesoftware (Z.B. Cinderella oder Geogebra) mittels virtuellem Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Fünfeck!
(Konstruktion eines Fünfecks s.auch im Internet).

Aufgabe 117:

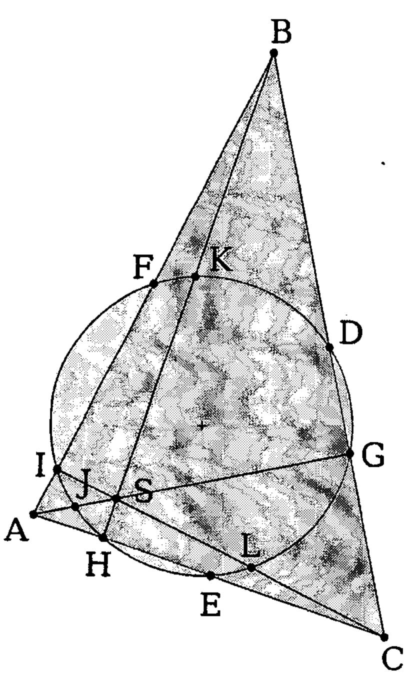
(a) Gegeben sei (in Cinderella oder Geogebra o. ä.) ein Kreis und ein Punkt *P* außerhalb des Kreises (bzw. eine Sekante). Konstrieren Sie eine Tangente an den Kreis durch *P* (bzw. eine Tangente parallel zur Sekante).
(b) Exportieren Sie die Konstruktion als Übungsaufgabe. (Es sollte dazu eine vernünftige Auswahl an Werkzeugen getroffen werden, und mit Tipps sollte der Anwender Schritt für Schritt zum Ziel geführt werden.)

Aufgabe 118

Verifizieren Sie mittels einer Geometrie-Software:

(a) In einem Dreieck ΔABC der reellen euklidischen Ebene liegen folgende 9 Punkte auf einem Kreis (dem sog. Feuerbachkreis, benannt nach Karl Wilhelm Feuerbach 1800-1834):
* die Mittelpunkte der Seiten;
* die Fußpunkte der Höhen;
* die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte (das sind die Mittelpunkte der Strecken zwischen jeweils einer Dreiecksecke und dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks).
(Vgl.: http://de.wikipedia.org/wiki/Feuerbachkreis)

(b) Der Schwerpunkt, der Umkreismittelpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Mittelpunkt des Feuerbachkreises von ΔABC liegen gemeinsam auf einer Geraden, der sog. Eulergeraden (benannt nach Leonhard Euler 1707-1783). (Vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Gerade)



$\overline{AJ} = \overline{JS}$
$\overline{BK} = \overline{KS}$
$\overline{CL} = \overline{LS}$

Figur 202:
Feuerbachkreis eines Dreiecks
(s. Wikipedia "Feuerbachkreis" l.c.)