Aufgabe 102

Führen Sie den Zerlegungsbeweis des Satzes des Pythagoras aus. ($\delta = 90°$?)

Aufgabe 103

Zeigen Sie, dass eine Jordan-messbare Figur unter einer zentrischen Streckung mit Faktor k auf eine Figur mit k^2-fachem Jordan-Inhalt abgebildet wird.

Poygon, einmal anders
Figur 193

§ 19* Abbildungen am Kreis

Bisher hatten wir meist solche Abbildungen des Raumes und der Ebene betrachtet, bei denen Punkte wieder auf Punkte und Geraden auf Geraden abgebildet werden. In diesem Paragraphen wollen wir auf zwei Abbildungstypen eingehen, die diese Eigenschaften nicht haben.

Generalvoraussetzung: E reelle euklidische Ebene, k Kreis um M mit Radius $r > 0$.

A) Polarität am Kreis

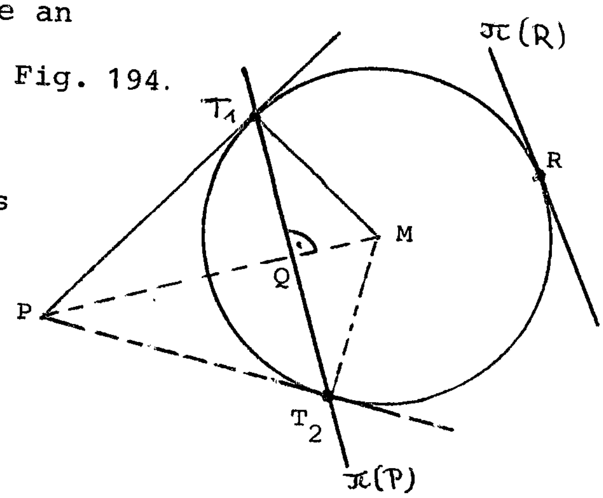
(19.1) Definition und erste Eigenschaften

(a) Sei P ein Punkt von E; dann heißt P *außerhalb* k gelegen, falls $|\overleftrightarrow{PM}| > r$ gilt, und P *innerhalb* k, falls $|\overleftrightarrow{PM}| < r$.

(b) (i) Jedem Punkt $R \in k$ ordnen wir als Gerade $\pi(R)$ die Tangente an k durch R zu. (vgl. Figur 194).

(ii) Jedem Punkt P, der *außerhalb* k liegt, ordnen wir folgendermaßen ein Gerade $\pi(P)$ zu:

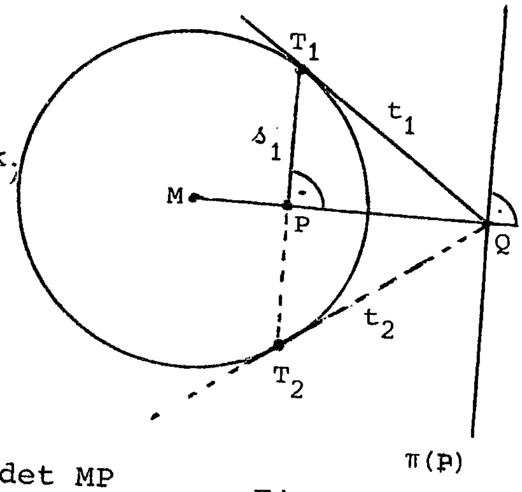
Nach dem Thalessatz (Aufg. 64) und dem Satz des Pythagoras (mit $|\overline{PT_1}| := \sqrt{|\overline{MP}|^2 - r^2}$) existiert ein Punkt $T_1 \in k$ mit $MT_1 \perp PT_1$. Nach Aufgabe 69 ist PT_1 Tangente an k mit Berührpunkt T_1, vgl. Fig. 194. Das Lot $\pi(P)$ von T_1 auf MP heißt *Polare* zum *Pol* P. Aus Symmetriegründen existiert eine weitere Tangente PT_2 an k mit $T_2 \in k \cap \pi(P)$. Die Polare zu P ist eindeutig bestimmt.



Figur 194

(iii) Ist P nun *innerhalb* k gelegen und $P \neq M$, so definieren wir eine Polare $\pi(P)$ zu P folgendermaßen:

Bezeichnet s_1 das Lot durch P auf MP; so existiert $T_1 := s_1 \cap k$, (dies folgt z.B. mit $|\overline{PT_1}| := \sqrt{r^2 - |\overline{MP}|^2}$ aus dem Satz des Pythagoras.)



Figur 195

Die Tangente an k durch T_1 ist nicht parallel zu MP und schneidet MP daher in einem Punkt Q.

Das Lot auf MP durch Q sei nun als die Polare $\pi(P)$ von P definiert. (Durch Spiegelung sieht man wieder die Existenz von T_2 mit $T_2 \in s_1 \cap k$ und T_2Q als zweiter Tangente an k ein).

Wieder bestimmen sich P und $\pi(P)$ gegenseitig eindeutig.

(Zum Beweis der Umkehrung benutzt man wieder den Satz des Pythagoras - beim Thalessatz wäre die Existenz des Schnittpunktes der beiden Kreise nicht offensichtlich.)

(iv) Um auch M und den Geraden durch M jeweils Bilder zuordnen zu können, beachten wir dass bei (iii) mit $M=P$ zwar MP keine Gerade ist und damit s_1 nicht bestimmt ist, dass aber jede Sekante durch M parallele Tangenten t_1 und t_2 bestimmt. Als $\pi(M)$ wählen wir daher die uneigentliche Gerade. Umgekehrt gehört zu jedem uneigentlichen Punkt S eine Richtung, damit eine (dazu senkrechte) "Sehne" durch M, die wir als $\pi(S)$ definieren können.

(v) Damit ist jedem eigentlichen und uneigentlichen Punkt von E genau eine Polare und jeder eigentlichen und der uneigentlichen Geraden genau ein Pol zugeordnet. Wir erweitern π zu einer Abbildung von $\hat{P} \times \hat{G}$ (mit $(\hat{P},\hat{G})$ projektive Erweiterung von (P,G)) auf sich und nennen sie *Polarität zu k*.

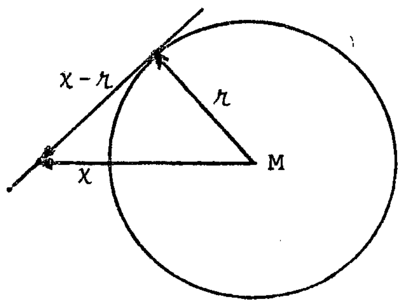
(19.2) Vektorielle Darstellung (affin)

(i) Wir wählen M als Ursprung und gehen zu Ortsvektoren über. Ist dann $\mathfrak{r} \in k$, so gilt genau für jeden Punkt der Tangente an k durch $\mathfrak{r}$ (wegen $0\mathfrak{r}$ senkrecht zur Tangente)

$$(\mathfrak{x} - \mathfrak{r})\mathfrak{r} = 0,$$

wegen $\mathfrak{r}^2 = r^2$ also

$$\underline{\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{r} = r^2}.$$



Figur 196

Für $\mathfrak{r} \in k$ folgt $\pi(\mathfrak{r}) = \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{P} \mid \mathfrak{r}\mathfrak{x} = r^2\}$.

(ii) Seien $P = p$ außerhalb k gelegen und $T_1 = t_1$ und $T_2 = t_2$ wie in (19.1)(ii) definiert; man erhält (mit $P = p$) für $\pi(p)$ die Gleichung $x = t_1 + s(t_2 - t_1)$ (mit $s \in \mathbb{R}$) und wegen (i) sowie wegen $T_1T_2 \perp MP$ damit

$$x \cdot p = t_1 \cdot p + s(t_2 - t_1)p = t_1 p = r^2.$$

(Dies ist umgekehrt die Gleichung einer Geraden!)

(iii) Ist $P = p \neq o$ innerhalb k, so hat $\pi(p)$ die Gleichung $x = q + s(t_1 - t_2)$; es folgt $x \cdot p = q \cdot p$.

Nun ist t_1t_2 die Polare zu q, woraus sich nach (ii) $p \cdot q = r^2$ und damit erneut $x \cdot p = r^2$ als Polarengleichung ergibt.

(iv) Wir fassen zusammen:

Ist k ein Kreis um o mit Radius r, so gilt für die Polare eines Punktes $p \neq o$ die Ortsvektoren-Gleichung $$\pi(p) = \{x \in \mathfrak{P} \mid p \cdot x = r^2\}$$

(19.3) <u>Weitere Eigenschaften der Polarität zu k</u>

a) Aus der Konstruktion von Pol und Polare und der Definition von π ergibt sich

$$\boxed{\pi^2 = id}$$

b)

Sind P,Q eigentliche oder uneigenliche Punkte, so gilt für die Polarität π $$P \in \pi(Q) \iff Q \in \pi(P)$$

<u>Beweis</u> (z. Teil analytisch:): (i) Nach Übergang zu Ortsvektoren folgt für eigentliche Punkte $p, q \neq o$

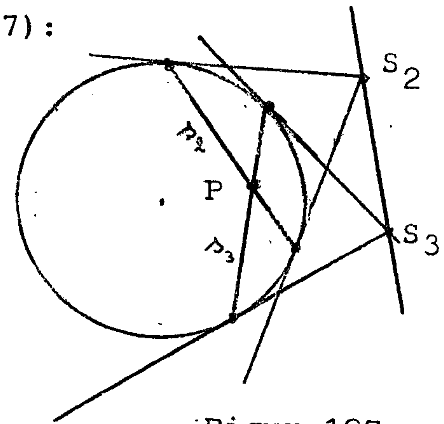
$$p \in \pi(q) \iff p \cdot q = r^2 \iff q \in \pi(p) .$$

(ii) Ist $Q = M$, so bedeutet $P \in \pi(Q)$, daß P uneigentlicher Punkt ist, und $Q \in \pi(P)$, daß $\pi(P)$ Sehne durch M und P daher ebenfalls uneigentlicher Punkt ist.

(c) Aus b) ergibt sich auch, daß zur Konstruktion von $\pi(P)$ im Falle (19.1) b(iii) statt s_1 und MP beliebige Sekanten s_2, s_3 durch P genommen werden können. Es gilt nämlich (s. Figur 197):

$P \in s_2 = \pi(S_2) \wedge P \in s_3 = \pi(S_3)$

$\Longrightarrow S_2 \in \pi(P) \wedge S_3 \in \pi(P)$.



Figur 197

Allgemeiner gilt

$P \in g \Longrightarrow \pi(g) \in \pi(P)$	
und	
$\pi(PQ) = \pi(P) \cap \pi(Q)$	falls $P \neq Q$
sowie	
$\pi(g \cap h) = \pi(g)\pi(h)$	falls $g \neq h$.

(19.4) <u>Anmerkungen</u>

(i) Ähnliche Abbildungen lassen sich für andere Kegelschnitte definieren. Ihnen allen gemeinsam ist: Sie sind involutorische Abbildungen von $\hat{P} \cup \hat{G}$ auf sich, bei denen jedem Punkt eine Gerade und umgekehrt zugeordnet ist derart, daß aus der Inzidenz der Urbilder die der Bilder folgt (s.19.3.c). Auch solche allgemeinere Abbildungen heißen Polaritäten.

(ii) Schon aus der Definition einer projektiven Ebene sieht man, dass die Bedingungen an die Begriffe Punkt und Gerade symmetrisch in diesen sind. Tatsächlich kann man zeigen, dass für eine Klasse von projektiven Ebenen, die mit jeder Ebene E auch die duale Ebene E^* enthält (d.h. die Ebene, deren Punkte die Geraden von E und deren Geraden die Punkte von E sind, mit $gI^*P :\Leftrightarrow PIg$), jede wahre Aussage in eine wahre Aussage übergeht, wenn man die Begriffe "Punkt" und "Gerade" - auch in den abgeleiteten Begriffen - vertauscht (*Dualitätsprinzip*).
M
Eine solche Vertauschung leistet hier die Polarität π.

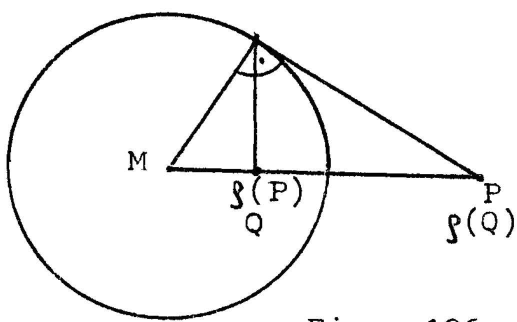
B) Inversion am Kreis

(19.5) Definition

a) Zum Kreis k definieren wir eine Abbildung $\bar{\rho} : P - \{M\} \longrightarrow P - \{M\}$ durch die Bedingung

$$\bar{\rho}(P) \in MP^+ \wedge |\overline{MP}| \cdot |\overline{M\rho(P)}| = r^2$$

Beachten Sie, dass für die Punkte P und $Q = \pi(P) \cap MP$ in (19.1) gilt $|\overline{MP}| \cdot |\overline{MQ}| = p \cdot q = r^2$. (vgl. auch Figur 196).



Figur 196

b) Anders als in Teil (A) erweitern wir jetzt E nur um <u>einen</u> uneigentlichen Punkt P_∞, der mit allen Geraden inzidieren soll.
Dann definieren wir $\rho : P \cup \{P_\infty\} \longrightarrow P \cup \{P_\infty\}$
durch $\rho(P) = \bar{\rho}(P)$ für $P \in P \setminus \{M\}$
und $\rho(M) = P_\infty$ und $\rho(P_\infty) = M$.

c) ρ heißt <u>*Inversion an k*</u>.

Es gilt:

(19.6) <u>Eigenschaften</u>

Ist ρ Inversion an *k*, so gilt

(i) ρ ist bijektiv.

(ii) ρ ist involutorisch; (daher spricht man von ρ auch als <u>*Spiegelung*</u> am Kreis).

(iii) die Punkte von *k* sind (die einzigen) Fixpunkte von ρ; innere Punkte werden auf äußere abgebildet und umgekehrt.

(iv) ρ ist winkeltreu.

(v) * Geraden, die durch den Mittelpunkt des Inversionskreises *k* verlaufen, werden unter ρ auf sich selbst abgebildet.
* Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt verlaufen, werden auf Kreise abgebildet, die durch den Mittelpunkt gehen, und umgekehrt.
* Kreise, die nicht durch den Mittelpunkt verlaufen, werden wieder auf solche Kreise abgebildet. Dabei werden Kreise, die den Inversionskreis rechtwinklig schneiden, auf sich selbst abgebildet.

Vgl. auch: http://de.wikipedia.org/wiki/Inversion_am_Kreis

<u>Zum Beweis</u>: (i)-(iii) sind offensichtlich
Zu (iv) und (v) siehe z.B. Scheid/Schwarz oder Agricola/Friedrich oder Hartshorne (s. Literaturliste)!

(19.7) <u>Anmerkungen</u>

M (i) Die in 19.5 angedeutete Erweiterung von E sieht folgendermaßen aus:

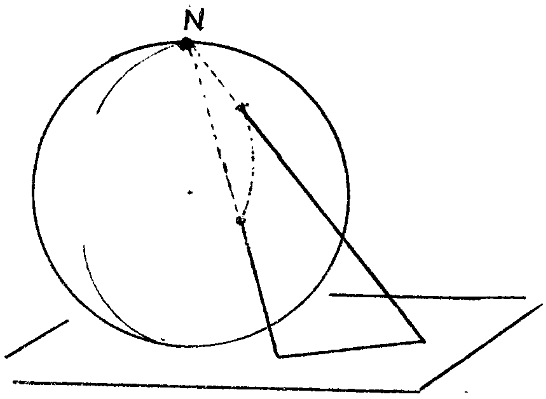
$\overline{P}$: $P \cup \{P_\infty\}$

$\overline{K}$: Menge aller (um den Punkt P_∞ erweiterten) Geraden und aller Kreise.

Inzidenz: $\in$

Die Struktur $\overline{E} = (\overline{P}, \overline{K})$ heißt <u>Möbiusebene</u> zu E; sie hat u.a. die Eigenschaft, dass durch je drei Punkte genau ein Element von $\overline{\mathcal{K}}$ geht. Die Inversion am Kreis *k* von *E* ist nun deutbar als Automorphismus dieser Struktur. Beachten Sie auch Aufg. 49, bei der alle Elemente von $\overline{\mathcal{K}}$ durch einen von P_∞ verschiedenen Punkt betrachtet werden.

(ii) Die Menge der Punkte $\tilde{P}$ einer Kugel des euklidischen Raums zusammen mit der Menge $\tilde{K}$ der ebenen Schnitte bildet eine Struktur, die derjenigen von $\overline{E}$ entspricht: Bei der <u>stereographischen Projektion</u> (s. Figur 197) von der Kugel auf eine Tangentialebene wird der Bezug veranschaulicht. (N entspricht z.B. P_∞, die ebenen Schnitte durch N den Geraden der Tangentialebene, die anderen den Kreisen.)



Figur 197

Siehe auch:
http://de.wikipedia.org/wiki/Stereografische_Projektion,
insbesondere den Zusammenhang mit der sogenannten "Gaußschen Zahlenebene"
http://de.wikipedia.org/wiki/Gau%C3%9Fsche_Zahlenebene,
ferner Aufgabe 115 !