

§ 18. Elementare Inhaltslehre

Der Begriff des Flächen- bzw. Rauminhaltes spielt in den Anwendungen der Geometrie eine große Rolle. Die Aufgabe, den aus der Erfahrung gewonnenen Inhaltsbegriff formal exakt zu definieren, erweist sich als schwieriger, als man zunächst annehmen könnte.

In diesem Paragraphen behandeln wir hauptsächlich die elementare Definition des Flächeninhalts eines Vielecks (Polygons).

Generalvoraussetzung:

E reelle euklidische Ebene mit Punktmenge P und Geradenmenge G und festem Längenmaß.

A) Zerlegung und Zerlegungsgleichheit

Das kleinste nicht-triviale Polygon ist das Dreieck. Wir definieren

(18.1) Definition

Zu einem <sup>nicht-trivialen</sup> Dreieck  $\Delta ABC$  sei  $H_A$  die offene,  $\bar{H}_A$  die abgeschlossene Halbebene  $BCA^+$ , entsprechend seien  $\bar{H}_B$  und  $\bar{H}_C$  definiert. Dann heißt

$$\Delta_{ABC} := \bar{H}_A \cap \bar{H}_B \cap \bar{H}_C \quad (\text{abgeschlossene})$$

Dreiecksfläche zum Dreieck  $\Delta A B C$

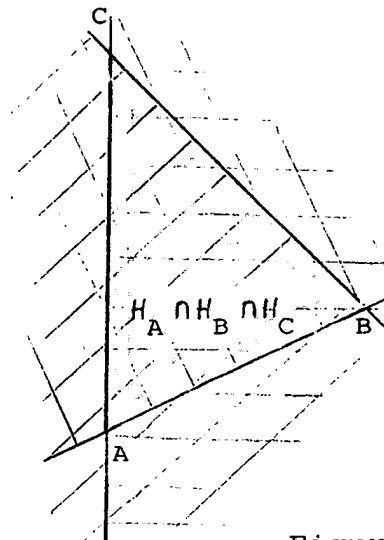
(s. Figur 174)

$H_A \cap H_B \cap H_C$  heißt das Innere von  $\Delta_{ABC}$ ,

$\partial(\Delta_{ABC}) = \Delta_{ABC} \setminus H_A \cap H_B \cap H_C$  heißt Rand von  $\Delta_{ABC}$ .

(Vgl. Definition Randpunkt in 8.4b !

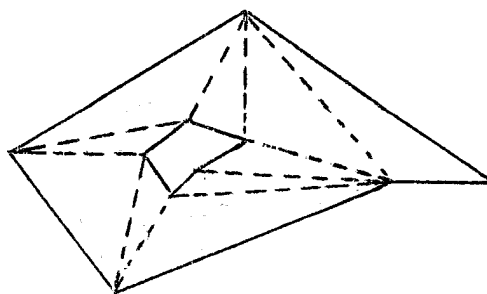
Existiert Übereinstimmung ?)



Figur 174



Figur 175



Figur 176

M  
|  
M

Gehen wir von einem intuitiven Polygonbegriff aus, so sehen wir, dass sich jede Polygonfläche aus Dreiecksflächen zusammensetzen lässt; (s. z.B. Figuren 175 und 176). Dies benutzen wir zur exakteren Definition von "Polygonfläche".

(18.2) Definition (Zerlegung)

Eine Punktmenge  $M \subseteq P$  heißt (elementargeometrisch) zerlegt in die Dreiecksflächen  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , wenn gilt:

$$(1) M = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$$

- (2)  $\Delta_i \cap \Delta_j$  ist für  $i \neq j$  enthalten im Rand von  $\Delta_i$  und im Rand von  $\Delta_j$ .

Achtung! Es handelt sich hier nicht um eine Zerlegung im Sinne von Partition!

(18.3) Definition (Polygonfläche)

- (i) Eine Punktmenge  $F \subseteq P$  heißt Polygonfläche, wenn sie in Dreiecksflächen zerlegbar ist.
- (ii) Ein Punkt  $P \in F$  heißt innerer Punkt, falls eine Dreiecksfläche  $\Delta$  existiert mit  $\Delta \subseteq F$  und  $P$  innerer Punkt von  $\Delta$ .
- (iii) Ein Punkt  $P \in F$  heißt Randpunkt, falls für jede Dreiecksfläche  $\Delta$  mit  $\Delta \subseteq F$  und  $P \in \Delta$  folgt, dass  $P$  Randpunkt von  $\Delta$  ist. (Verträglichkeit mit 8.4 b ?)

Ohne Beweis vermerken wir:

(18.4) Hilfssatz

Die Vereinigung zweier Polygonflächen ist wieder eine Polygonfläche. Der Durchschnitt zwei Polygonfläche ist nicht immer Polygonfläche, z.B. kann er leer sein oder aus Strecken bzw. Punkten bestehen.

Aufgabe 95

Zeigen Sie, daß unter einer Bewegung eine Polygonfläche  $F$  auf eine Polygonfläche  $F'$  und ein Randpunkt von  $F$  auf einen Randpunkt von  $F'$  abgebildet wird!

M Da wir den Flächeninhalt einer Polygonfläche  $F$  auf den von solchen  
| Flächeninhalten zurückführen wollen, die in einer geeigneten Zerlegung auftreten, ist eine Untersuchung über verschiedene solche Zerlegungen anzustellen. Zunächst be-  
| schränken wir uns weiterhin auf Zerlegungen in Dreiecks-  
M flächen und definieren:

(18.5) Definition (Verfeinerung)

Eine Zerlegung der Polygonfläche  $F$  in die Dreiecksflächen  $\Delta_1, \dots, \Delta_r$  heißt feiner als die Zerlegung von  $F$  in  $\tilde{\Delta}_1, \dots, \tilde{\Delta}_s$ , wenn für jedes  $i \in \{1, \dots, r\}$  ein  $j \in \{1, \dots, s\}$  existiert mit  $\Delta_i \subseteq \tilde{\Delta}_j$ .

(18.6) Satz

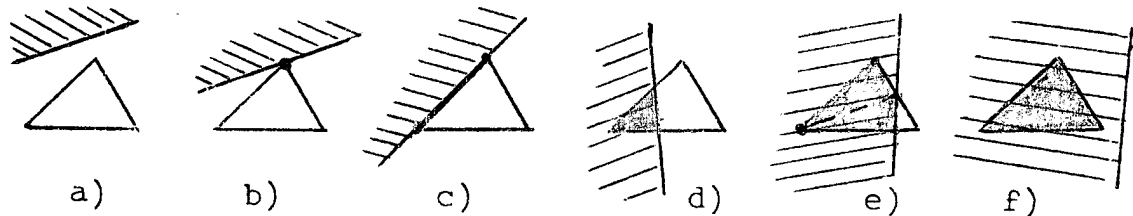
Zu je zwei Zerlegungen einer Polygonfläche  $F$  in Dreiecksflächen existiert eine gemeinsame Verfeinerung, (d.h. eine Zerlegung, die feiner ist als jede der beiden gegebenen Zerlegungen).

Beweis-Skizze

Seien  $F = \Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_n$  und  $F' = \Delta'_1 \cup \dots \cup \Delta'_m$  zwei Zerlegungen von  $F$  in Dreiecksflächen. Dann ist  $F = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (\Delta_i \cap \Delta'_j)$ . Wir betrachten  $\Delta_i \cap \Delta'_j$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Sei  $\Delta'_j = \overline{H}_A \cap \overline{H}_B \cap \overline{H}_C$ . Dann ist  $\Delta_i \cap \Delta'_j = (\Delta_i \cap \overline{H}_A) \cap \overline{H}_B \cap \overline{H}_C$ . Für den Schnitt einer Dreiecksfläche  $\Delta_i$  mit einer Halbebene  $\overline{H}$  kommen in Frage: Teilmengen des Rands von  $\Delta_i$  und  $\overline{H}$  (Fig. 177 a-c),

sowie Dreiecksflächen (Figur 177 d,f) oder deren Vereinigung.



Figur 177

Existiert ein gemeinsamer innerer Punkt von  $\Delta_i$  und  $\Delta'_j$ , so besitzt  $\Delta_i \cap \Delta'_j$  eine Zerlegung in Dreiecksflächen (und ist somit wieder Polygonfläche). Im anderen Falle ist  $\Delta_i \cap \Delta'_j$  enthalten im Rand von  $\Delta_i$  und von  $\Delta'_j$ . Sei dann  $P \in \Delta_i \cap \Delta'_j$ . Nicht für alle Dreiecke  $\Delta'_k$  mit  $P \in \Delta'_k$  kann der Durchschnitt mit  $\Delta_i$  nur aus Randpunkten bestehen. Es gibt also eine Polygonfläche  $\Delta_i \cap \Delta'_k$  derart, daß  $P$  Randpunkt von  $\Delta_i$  und  $\Delta'_k$  ist. Damit kann  $\Delta_i \cap \Delta'_j$  im 2. Fall bei der Bildung der Vereinigungsmenge weggelassen werden. Schließlich ist  $\Delta_{ij} \cap \Delta_{lm}$  (für  $\Delta_{ij} = \Delta_i \cap \Delta'_j$  und  $\Delta_{lm} = \Delta_l \cap \Delta'_m$ ) im Rand von  $\Delta_{ij}$  und von  $\Delta_{lm}$  oder es ist  $\Delta_{ij} = \Delta_{lm}$ .  $\square$

M  
|  
Um zwei Polygonflächen vergleichen zu können, versucht man, sie in geeigneter Weise in kongruente Polygone zu zerschneiden. Zum Flächenvergleich brauchen kongruente Polygonflächenteile dann nicht mehr in Dreiecks-

flächen zerlegt zu werden. Man verallgemeinert daher den Begriff der Zerlegung folgendermaßen:

M

(18.7) Definition

Eine Punktmenge  $M$  heißt in die Polygonflächen  $F_1, \dots, F_n$  zerlegt, wenn gilt

$$(1) \quad M = \bigcup_{i=1}^n F_i$$

(2)  $F_i \cap F_j$  ist für  $i \neq j$  enthalten im Rand von  $F_i$  und Rand von  $F_j$ , also  $F_i \cap F_j \subseteq \partial F_i \cap \partial F_j$  für  $i \neq j$ .

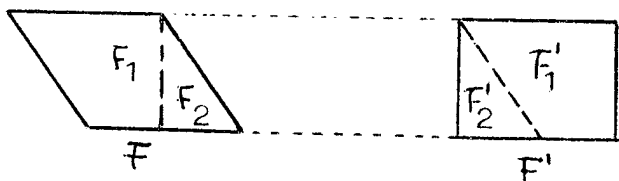
Mit Hilfe des Kongruenzbegriffes definieren wir nun "Zerlegungsgleichheit".

(18.8) Definition

Seien  $F$  und  $F'$  Polygonflächen. Dann heißen  $F$  und  $F'$  zerlegungsgleich ( $F \stackrel{Z}{\cong} F'$ ), falls gilt:

Es existiert eine Zerlegung von  $F$  in Polygonflächen  $F_1, \dots, F_n$  und eine Zerlegung von  $F'$  in (gleichviele) Polygonflächen  $F'_1, \dots, F'_n$  derart, daß für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $F_i \cong F'_i$  ( $F_i$  kongruent  $F'_i$ ).

Beispiel: siehe Figur 178



Figur 178

Aufgabe 96

Zeigen Sie, daß die Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Polygonflächen von  $E$  ist.

Lösungshinweis: Beachten Sie Satz 18.6.

(18.9) Satz

Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  Polygonflächen. Dann gilt:

- (a) Ist  $\varphi$  Bewegung mit  $\mathcal{F}' = \varphi(\mathcal{F})$ , so entsprechen den Komponenten einer Zerlegung von  $\mathcal{F}$  kongruente Komponenten einer geeigneten Zerlegung von  $\mathcal{F}'$ .
- (b) Sind  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'$  kongruent, so sind sie auch zerlegungsgleich.

Die Umkehrung ist i.a. falsch; man vgl. Figur 178 !

Beweis-Skizze

- (a) Unter jeder bijektiven geraden- und halbebenenstreuen Abbildung  $\varphi$  der Ebene auf sich geht eine in Polygonflächen  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$  zerlegte Polygonfläche  $\mathcal{F}$  in eine Polygonfläche  $\varphi(\mathcal{F})$  mit einer Zerlegung in die Polygonflächen  $\varphi(\mathcal{F}_1), \dots, \varphi(\mathcal{F}_n)$  über. Ist  $\varphi$  Bewegung, so folgt  $\mathcal{F}_i \equiv \varphi(\mathcal{F}_i)$  und  $\mathcal{F} \equiv \varphi(\mathcal{F})$ ; (vgl. auch Aufgabe 94).
- (b) Ist  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}'$ , so wählt man die triviale Zerlegung von  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F}'$ , nämlich  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F}'_1 = \mathcal{F}'$ . □

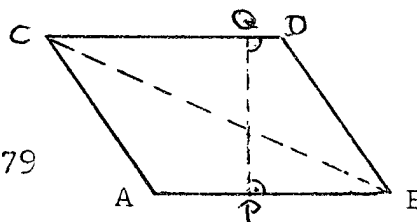
Anmerkung:

Da die Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Polygonflächen ist, kann man sinnvoll von Klassen zerlegungsgleicher Polygonflächen sprechen. Nach (18.9) ist jede solche Klasse Vereinigung von Kongruenzklassen von Polygonflächen.

(18.10) Definition

Sei  $(A, B, C, D)$  ein Parallelogramm (s. Figur 179).

- (a) Dann heißt  $\Delta_{ABC} \cup \Delta_{BCD}$  eine Parallelogrammfläche,  
(im Falle  $AC \perp AB$  auch Rechteckfläche,  
im Falle  $AC \perp AB$  und  $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$  auch Quadratfläche).



Figur 179

- (b) Ist  $\overline{PQ}$  eine Strecke mit  $P \in \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{CD}$  und gilt  $PQ \perp \overline{AB}$ , so heißt  $\overline{PQ}$  eine Höhe des Parallelogramms  $(A, B, C, D)$  (bzw. der entsprechenden Parallelogrammfläche) zur Grundseite  $\overline{AB}$ .

### Aufgabe 97

Zeigen Sie:

- a) Jede Höhe des Parallelogramms  $(A, B, C, D)$  zur Grundseite  $\overline{AB}$  hat die gleiche Länge  $h_{AB}$ .
- b) Sind  $(A, B, C, D)$  und  $(A', B', C', D')$  zwei Parallelogramme mit  $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$  und  $h_{AB} = h_{A'B'}$ , so existiert eine Bewegung  $\kappa$  mit  $\kappa(A) = A'$ ,  $\kappa(B) = B'$  und  $\kappa(CD) = C'D'$ .

### (18.11) Satz

Zwei Parallelogrammflächen mit einer gleichlangen Seite und gleichlangen Höhen bzgl. dieser Seite sind zerlegungsgleich.

Beweis-Skizze: Seien  $(A, B, C, D)$  und  $(A', B', C', D')$  Parallelogramme mit  $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$  und gleichlangen Höhen bzgl.  $\overline{AB}$  bzw.  $\overline{A'B'}$ .

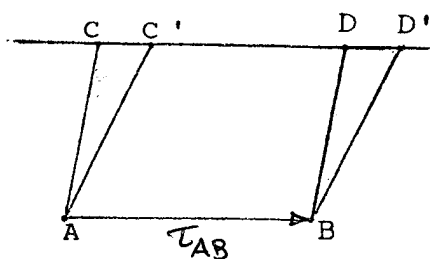
Dann gibt es eine Bewegung  $\kappa$  mit  $\kappa(A) = A'$ ,  $\kappa(B) = B'$  und  $\kappa(CD) = C'D'$  (s. Aufgabe 96). Da kongruente Polygonflächen *(als Ebenen)* zerlegungsgleich sind, reicht es, den Fall  $A = A'$

$B = B'$  und  $CD = C'D'$  zu betrachten.

Sei zunächst  $C' \in \overline{CD}$  (s. Figur 180)

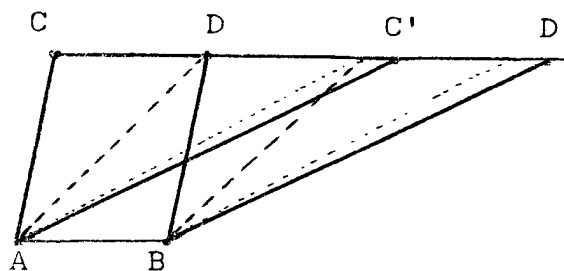
Dann ist  $\tau_{AB}(\Delta_{ACC'}) = \Delta_{BDD'}$ , und

beide Parallelogramme sind zerlegungsgleich.



Figur 180

Im Falle  $C' \notin \overline{CD}$  (s. Figur 181) konstruiert man eine endliche Folge zerlegungsgleicher Parallelogrammflächen mit der gleichen Grundseite  $\overline{AB}$ , indem man auf  $CD$  Strecken der Länge  $\overline{CD}$  hintereinander abträgt solange, bis ein Endpunkt auf  $\overline{C'D'}$



Figur 181

liegt (diese Forderung ist wegen der Archimedischen Eigenschaft von  $(\mathbb{R}, \leq)$  erfüllbar).

Nach dem ersten Fall und wegen der Transitivität der Zerlegungsgleichheit (s. Aufgabe 96) folgt dann die Behauptung.  $\square$

(18.12) Korollar

Zu jeder Parallelogrammfläche gibt es eine zerlegungsgleiche Rechteckfläche mit einer gleichlangen Seite und gleichlanger Höhe.

B) Flächeninhaltsfunktion

Nun können wir formulieren, welche Eigenschaften "die" Flächeninhaltsfunktion haben soll.

(18.13) Definition (Flächeninhalt)

Eine Abbildung  $\mathfrak{F}$  von der Menge der <sup>nicht-trivialen</sup> Polygonflächen in die Menge  $\mathbb{R}$  heißt Flächeninhaltsfunktion, falls für alle Polygonflächen  $F, F_1, F_2$  gilt:



- (1)  $\mathfrak{J}(F) > 0$ . (Positivität)
- (2) Ist  $F$  in  $F_1$  und  $F_2$  zerlegt, so folgt  
$$\mathfrak{J}(F) = \mathfrak{J}(F_1) + \mathfrak{J}(F_2)$$
 (Additivität)
- (3)  $F_1 \equiv F_2 \Rightarrow \mathfrak{J}(F_1) = \mathfrak{J}(F_2)$  (Bewegungs-Invarianz)
- (4) Ist  $Q$  Quadratfläche mit Seitenlänge 1, so gilt  $\mathfrak{J}(Q) = 1$   
(Normierung).

$\mathfrak{J}(F)$  heißt Flächeninhalt der Polygonfläche  $F$ .

Anmerkung: Existenz- und Eindeutigkeit von  $\mathfrak{J}$  ist noch zu klären. Dazu gehen wir zunächst von der Existenz aus und untersuchen Eigenschaften von  $\mathfrak{J}$ .

Aufgabe 98:

Zeigen Sie: Jede Flächeninhaltsfunktion ist monoton, d.h. aus  $F_1 \subseteq F_2$  folgt  $\mathfrak{J}(F_1) \leq \mathfrak{J}(F_2)$  für alle Polygonflächen  $F_1, F_2$ .

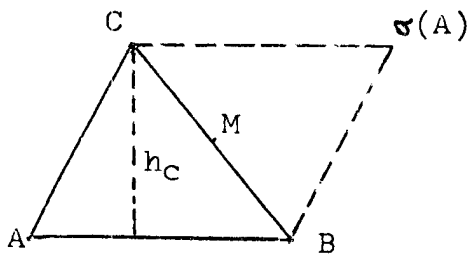
(18.14) Satz

Sind  $F$  und  $F'$  zerlegungsgleiche Polygonflächen und ist  $\mathfrak{J}$  Flächeninhaltsfunktion, so gilt  $\mathfrak{J}(F) = \mathfrak{J}(F')$ .

Beweis: Wegen der Zerlegungsgleichheit von  $F$  und  $F'$  existieren Zerlegungen  $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$  und  $F' = \bigcup_{i=1}^n F'_i$  mit  $F_i \equiv F'_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Nach (18.13) (3) gilt  $\mathfrak{J}(F_i) = \mathfrak{J}(F'_i)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ ; durch mehrfache Anwendung der Additivität von  $\mathfrak{J}$  sehen wir

$$\mathfrak{J}(F) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{J}(F_i) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{J}(F'_i) = \mathfrak{J}(F'). \quad \square$$

Da wir über Zerlegungsgleichheit von Parallelogrammflächen schon einiges wissen, wollen wir den Inhalt von Flächen von Dreiecken, den Bausteinen von Polygonen, auf den von Parallelogrammflächen (und damit insbesondere von Rechteckenflächen) zurückführen.



Ist  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$  eines Dreiecks  $\Delta ABC$ , so entsteht durch die Punktspiegelung  $\sigma$  mit Zentrum  $M$  ein Parallelogramm  $AB C \sigma(A)$ .

Figur 182

Die entsprechende Parallelogramm-

fläche setzt sich aus zwei kongruenten Dreiecksflächen  $\Delta_{ABC}$  und  $\Delta_{\sigma(A)CB}$  zusammen. Das Parallelogramm hat die gleiche Grundseite  $\overline{AB}$  und die gleiche Höhe  $h_C$  wie das Dreieck  $\Delta ABC$ . Aus der Additivität und der Bewegungs-Invarianz erhält man

(18.15) Hilfssatz

Ist  $\Delta_{ABC}$  eine Dreiecksfläche und  $F$  eine Parallelogrammfläche mit gleicher Länge der Grundseite und der zugehörigen Höhe, so gilt

$$\mathfrak{J}(\Delta_{ABC}) = \frac{1}{2} \mathfrak{J}(F).$$

Da sich jede Polygonfläche in Dreiecksflächen zerlegen lässt, zielt folgender Satz auf die Eindeutigkeit der Flächeninhaltsfunktion (, deren Existenz wir allerdings noch nicht gesichert haben).

(18.16) Satz

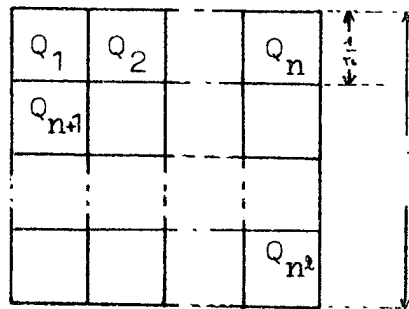
Ist  $R$  Rechtecksfläche mit Seitenlängen  $a, b$  und ist  $\mathfrak{J}$  Flächeninhaltsfunktion, so gilt

$$\mathfrak{J}(R) = a \cdot b$$

Beweisskizze:

(i) Sei  $a = b = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

Die Quadratfläche  $Q$  der Seitenlänge 1 läßt sich in  $n^2$  Quadratflächen  $Q_1, \dots, Q_{n^2}$  der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$  zerlegen; (s. Figur 183).



Figur 183

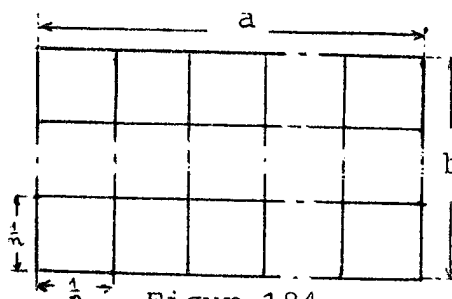
Definitionsgemäß gilt  $\mathfrak{J}(Q) = 1$ . Aus der Additivität und Bewegungsinvarianz von  $\mathfrak{J}$  folgt

$$1 = \mathfrak{J}(Q) = \sum_{i=1}^{n^2} \mathfrak{J}(Q_i) = n^2 \mathfrak{J}(Q_1), \text{ also } \mathfrak{J}(R) = \mathfrak{J}(Q_1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = a \cdot b.$$

(ii) Seien  $a, b \in \mathbb{Q}^+$  (mit  $n$  als Hauptnenner von  $a$  und  $b$ )

Ist  $a = \frac{\ell}{n}$  und  $b = \frac{m}{n}$  mit  $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ , so ergibt sich durch Zerlegung von  $R$  in  $\ell \cdot m$  Quadratflächen der Seitenlänge  $\frac{1}{n}$  (s. Figur 184):

$$\mathfrak{J}(R) = \ell \cdot m \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\ell}{n} \cdot \frac{m}{n} = a \cdot b$$



Figur 184

(iii)  $a \in \mathbb{Q}^+, b \in \mathbb{R}^+$

Sei  $R_x$  eine Rechtecksfläche mit Seitenlängen  $a$  und  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Funktion  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $x \mapsto \mathfrak{J}(R_x)$  ist monoton, denn

aus  $x > y$  folgt  $R_x \supset R_y$  und daraus durch Betrachten einer geeigneten Zerlegung von  $R_x$  auch  $\mathfrak{J}(R_x) > \mathfrak{J}(R_y)$ , (vgl. Aufgabe 98).

Für  $x \in \mathbb{Q}^+$  haben wir  $f(x) = a \cdot x$  nach (ii). Diese Eigenschaften von  $f$  reichen zum Beweis von  $f(x) = ax$  für alle  $x \in \mathbb{R}^+$ , insbesondere  $x = b$ . (Wäre  $f(b) > ab$ , so existierte ein  $y \in \mathbb{Q}^+$  mit  $f(b) > y > ab$ . Es wäre  $x = \frac{y}{a} \in \mathbb{Q}^+$ , damit einerseits  $f(x) = y$ , also  $f(b) > f(x)$ , andererseits  $y = ax > ab$ , daher (wegen  $a > 0$ ) auch  $x > b$  und wegen der Monotonie  $f(x) > f(b)$ . Analog widerlegt man  $f(b) < ab$ .)

(iv)  $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$ .

Man verfährt analog zu (iii), hält  $a \in \mathbb{R}^+$  fest und nutzt  $f(x) = a \cdot x$  für  $x \in \mathbb{Q}^+$  wie dort aus.  $\square$

Aufgabe 99

Zeigen Sie: Ist  $F$  Parallelogrammfläche mit Länge einer Grundseite  $g$  und einer zugehörigen Höhe  $h$ , und ist  $\mathfrak{F}$  Flächeninhaltsfunktion, so gilt

$$\mathfrak{F}(F) = g \cdot h .$$

Lösungshinweis: Man beachte (18.12).

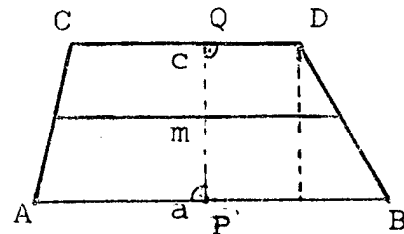
Aufgabe 100

Sei  $\mathfrak{F}$  Flächeninhaltsfunktion und  $F$  Trapezfläche mit Grundseiten der Länge  $a$  und  $c$  und Länge der Mittelparallelen  $m$  und einer Höhe  $h$ ; (s. Figur 185).

Zeigen Sie  $\mathfrak{F}(F) = m \cdot h = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Lösungshinweis: Betrachten Sie geeignete Punktspiegelungen!

Hinweis zu den Bezeichnungen:



Figur 185

(Unter einem Trapez (ABCD), versteht man ein Viereck mit  $AB \parallel CD$ , unter der Fläche des Trapezes (ABCD) die Polygonfläche  $\Delta_{ACB} \cup \Delta_{BCD}$ , unter einer Höhe des Trapezes eine Strecke  $\overline{PQ}$  mit  $P \in AB$ ,  $Q \in CD$  und  $PQ \perp AB$  und unter der Mittelparallelen den Schnitt der Mittelsenkrechten einer Höhe mit der Trapezfläche.)

Aus 18.15 und 18.16 folgt nun

(18.17) **Satz**

Ist  $\Delta_{ABC}$  Dreiecksfläche mit Länge der Grundseite  $c$  und der Höhe  $h_c$ , ist  $\mathfrak{F}$  Flächeninhaltsfunktion, so gilt

$$\mathfrak{F}(\Delta_{ABC}) = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Aufgabe 101

Konstruieren Sie (nur mit Zirkel und Lineal) zu einem gegebenen Dreieck ein ähnliches Dreieck (i) des doppelten bzw. (ii) des dreifachen Flächeninhalts! (Begründen Sie die Konstruktion!

(18.18) Satz

Es gibt höchstens eine Flächeninhaltsfunktion (auf der Menge der Polygone der reellen euklidischen Ebene).

Beweis: Jede Polygonfläche lässt sich in Dreiecksflächen zerlegen. Der Wert der Inhaltsfunktion für Dreiecksflächen liegt fest (s. 18.17), wegen der Additivität damit auch der einer beliebigen Polygonfläche. □

(18.19) Anmerkung zur Existenz der Flächeninhaltsfunktion

Nach den vorstehenden Überlegungen ist klar, wie umgekehrt eine Flächeninhaltsfunktion definiert werden kann. Für eine Dreiecksfläche  $\Delta$  definiert man  $\mathfrak{G}(\Delta) := \frac{c \cdot h_c}{2}$ ; diese Definition ist unabhängig von der speziellen Seite (nach Aufgabe 91 gilt  $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ ). Ist eine beliebige Polygonfläche  $F$  zerlegt in die Dreiecksflächen  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , so setzt man  $\mathfrak{G}(F) := \sum_{i=1}^n \mathfrak{G}(\Delta_i)$ . Nun muß man nachweisen, daß diese Definition von der speziellen Zerlegung unabhängig ist (s. z.B. Diff. Studienbr. III 1, 2. Teil) und daß  $\mathfrak{G}$  die Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion besitzt.

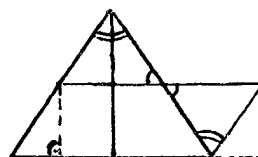
(18.20) Weitere Anmerkungen

- (i) Man kann zeigen, daß Polygonflächen mit gleichem Flächeninhalt zerlegungsgleich sind. Es gilt also für Polygonflächen  $P$  und  $P'$ :

$$P \stackrel{Z}{\cong} P' \iff \mathfrak{G}(P) = \mathfrak{G}(P') \quad \begin{matrix} \Rightarrow \\ \Leftarrow \end{matrix}$$

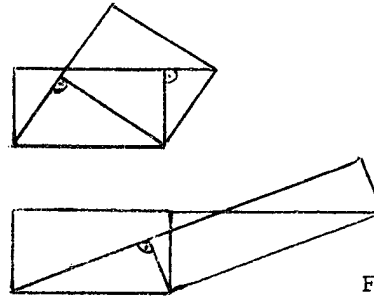
Zum Beweis dieser Tatsache zeigt man zunächst, daß jede Dreiecksfläche zu einer Rechteckfläche zerlegungsgleich ist (vgl. Figur 186), dann daß jede Rechteckfläche zu einer Rechteckfläche der Seitenlänge 1 zerlegungsgleich ist (vgl. Figur 187 ; 2 mal scheren!)

Durch "Aneinandersetzen" von Rechtecken der Seitenlängen 1, die zu den Dreiecksflächen einer Zerlegung einer Polygonfläche zerlegungsgleich sind, folgt, daß zu jeder Polygonfläche eine zerlegungsgleiche Rechteckfläche der Seitenlänge 1 existiert.



Figur 186

Sind nun  $F_1$  und  $F_2$  Polygonflächen mit  $\mathfrak{J}(F_1) = \mathfrak{J}(F_2)$ , so existieren Rechteckflächen  $R_1$  und  $R_2$  mit  $F_i \cong R_i$  ( $i=1,2$ ).  
 Aus  $\mathfrak{J}(F_1) = \mathfrak{J}(F_2)$  folgt nach (18.14)  
 $\mathfrak{J}(R_1) = \mathfrak{J}(F_1) = \mathfrak{J}(F_2) = \mathfrak{J}(R_2)$ .



Figur 187

Nach 18.16 stimmen  $\mathfrak{J}(R_i)$  mit einer Seitenlänge von  $R_i$  überein; daraus folgt  $R_1 \cong R_2$ , somit  $F_1 \cong F_2$

- (ii) Eine alternative Methode zur Einführung des Flächeninhalts benutzt anstatt der Zerlegungsgleichheit den Begriff der Ergänzungsgleichheit, bei dem die zu vergleichenden Polygonflächen nicht in paarweise kongruente Teile "zerschnitten" werden, sondern durch "Ankleben" kongruenter Teile zu kongruenten Polygonflächen ergänzt werden. Man kann jedoch zeigen, dass zwei Polygonflächen genau dann ergänzungsgleich sind, wenn sie zerlegungsgleich sind.
- (iii) Bisher hatten wir nur auf der Menge der Polygonflächen eine Inhaltsfunktion betrachtet. Nun sei  $\mathcal{B}$  die Menge der beschränkten<sup>1)</sup> Punkt-Mengen der Ebene,  $\mathcal{P}$  die Menge der Vereinigungen endlich vieler Polygonflächen (und zusätzlich  $\emptyset$ ); dann kommt man folgendermaßen zu einer Erweiterung der Mengen mit Flächeninhalt: Man definiert  $\mathfrak{J}(\emptyset) := 0$  und dann den äußeren Jordanschen Inhalt  $\bar{\mathfrak{J}}(A) := \inf_{\substack{U \in \mathcal{P} \\ A \subseteq U}} \mathfrak{J}(U)$  für  $A \in \mathcal{B}$  und den

inneren Jordanschen Inhalt  $\underline{\mathfrak{J}}(A) := \sup_{\substack{V \in \mathcal{P} \\ V \subseteq A}} \mathfrak{J}(V)$  für  $A \in \mathcal{B}$

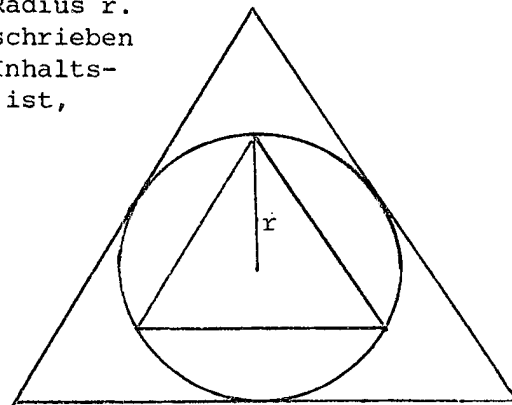
Ist  $\underline{\mathfrak{J}}(A) = \bar{\mathfrak{J}}(A)$ , so heißt  $A$  Jordan-messbar (J-messbar) und man spricht vom Jordanschen Inhalt  $\mathfrak{J}(A)$ .

Beispiel einer Menge, die nicht Jordan-messbar ist, liefert jede abzählbare dichte Menge  $A_0$  im Einheitsquadrat (z.B. die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten). Für eine solche gilt nämlich

$$\underline{\mathfrak{J}}(A_0) = 0 \neq 1 = \bar{\mathfrak{J}}(A_0).$$

Für Polygonflächen stimmt der Jordansche Inhalt mit dem bereits definierten überein.

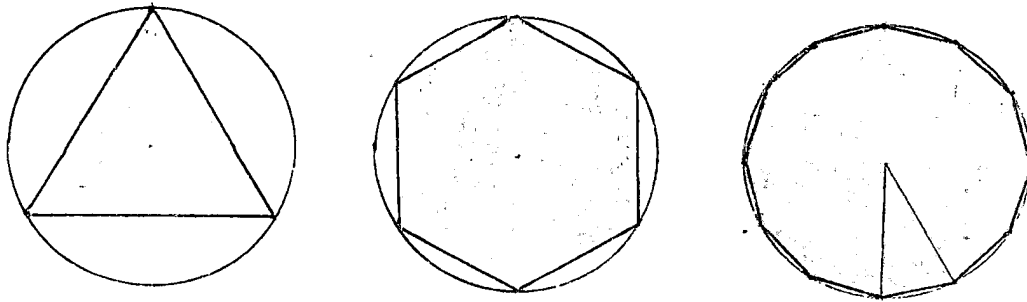
- (iv) Als Beispiel für die Berechnung eines Jordanschen Inhalts untersuchen wir die Fläche  $A$  eines Kreises vom Radius  $r$ . Weil der Kreisfläche ein Dreieck umschrieben werden kann (s. Figur 188) und die Inhaltsfunktion von Polygonflächen monoton ist, ist  $\{\mathfrak{J}(V) \mid V \in \mathcal{P}, V \subseteq A\}$  nach oben beschränkt. Daher existiert  $\underline{\mathfrak{J}}(A)$ . Analog zeigt man die Existenz von  $\bar{\mathfrak{J}}(A)$ .



Figur 188

1) d.h. in einer Polygonfläche enthaltenen

Nachdem nun die Existenz von  $\underline{J}(A)$  (bzw.  $\bar{J}(A)$ ) garantiert ist, kann man eine spezielle Folge von "einbeschriebenen" (bzw. "um-beschriebenen") Polygonflächen heranziehen, z.B. von regulären n-Ecken mit  $n = 2^k \cdot m$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots$  (s. Figur 189)



Figur 189

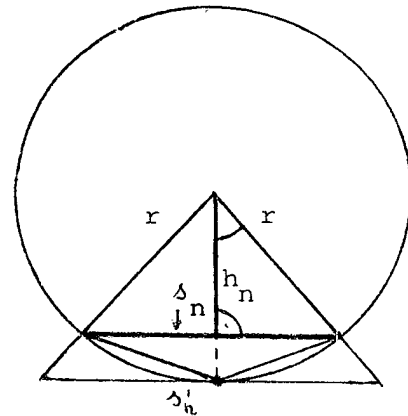
Zu diesem Zweck betrachten wir ein Dreieck, das durch Verbindung des Mittelpunkts mit 2 benachbarten Ecken des Polygons entsteht. (s. Figur 190).

Es bezeichne  $\delta_n$  die Länge einer Kante des einbeschriebenen n-Ecks (bzw.  $\delta'_n$  die des umbeschriebenen n-Ecks) und  $h_n$  (bzw.  $h'_n$ ) die entsprechende Höhenlänge. Nach dem Satz des Pythagoras folgt

$$h_n^2 + \left(\frac{\delta_n}{2}\right)^2 = r^2$$

Für den Flächeninhalt der einbeschriebenen n-Eckfläche  $F_n$  folgt

$$\mathfrak{J}(F_n) = n \cdot \frac{\delta_n}{2} \cdot h_n = \frac{n \cdot r \cdot \delta_n}{2} \sqrt{1 - \frac{\delta_n^2}{4r^2}}$$



Figur 190

Durch Anwendung einer Streckung mit Faktor  $\frac{r}{h_n}$  sieht man

$$\mathfrak{J}(F'_n) = \left(\frac{r}{h_n}\right)^2 \cdot \mathfrak{J}(F_n)$$

für die Fläche  $F'_n$  des umbeschriebenen n-Ecks.

Durch Anwendung von Ergebnissen der elementaren Trigonometrie und der Analysis erhält man :

$$\frac{\delta_n}{2} = r \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = r \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{und} \quad h_n = r \cos \frac{\pi}{n}, \text{ daher}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n}{2} = r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = r.$$

Es folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{J}(F'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{J}(F_n) = J(A)$

sowie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{J}(F_n) = r \lim_{n \rightarrow \infty} n \underbrace{\sin \frac{\pi}{n}}_{\delta_n/2} = r^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = r^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\cos \frac{\pi}{x}) \frac{\pi}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \pi r^2.$

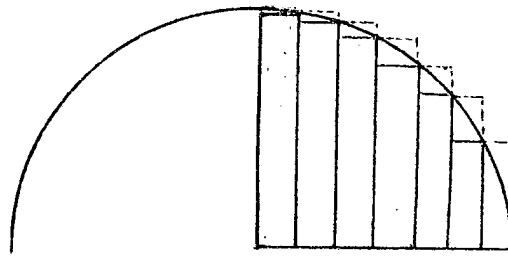
Daraus erhält man  $\mathcal{J}(A) = \pi r^2$ .

Für den Umfang (Summe der Kantenlängen)  $U_n$  von  $F_n$  (bzw.  $U'_n$  von  $F'_n$ ) gilt  $U_n = n \cdot \delta_n$  (bzw.  $U'_n = n \cdot \delta'_n$ ) und damit

$$\mathcal{U}(F_n) = r \cdot \frac{U_n}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\delta_n^2}{4r^2}} \quad \text{sowie} \quad \mathcal{U}(F'_n) = r \cdot \frac{U'_n}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{\delta_n'^2}{4r^2}}$$

Mit  $s_n \rightarrow 0$  strebt daher  $\frac{\mathcal{U}(F_n)}{U_n}$  gegen  $\frac{r}{2}$  und  $U_n$  gegen  $U = 2\pi r$ .

- Alternative Approximation der Kreisfläche s. Figur 191 (Vorbereitung der Integration!).



Figur 191

- (v) Durch eine erneute Erweiterung des Inhaltsbegriffs kann man zum Begriff der Lebesgue-Messbarkeit kommen:

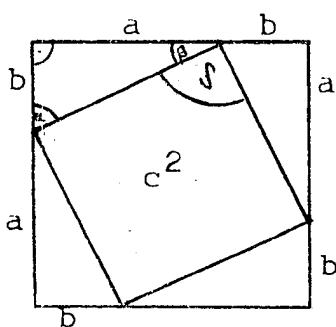
Als äußeres Lebesgues Maß (L-Maß) einer beschränkten Menge A definiert man die untere Grenze der inneren Jordanschen Inhalte der A überdeckenden offenen Mengen,

als inneres Lebesgues-Maß die obere Grenze der äußeren Jordanschen Inhalte der in A enthaltenen abgeschlossenen Mengen. A heißt L-messbar, falls inneres und äußeres L-Maß übereinstimmen.

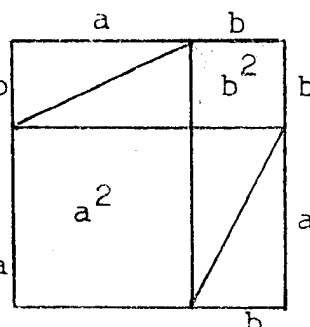
Bei Jordan-messbaren Mengen ist das Lebesgues-Maß gleich dem Jordan-Maß. Die oben beschriebene nicht J-messbare Menge ist L-messbar, so dass die L-Messbarkeit allgemeiner ist als die J-Messbarkeit.

Literatur-Hinweis: Hadwiger, H.: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isometrie, Berlin etc. 1957.

- (vi) Beispiel eines Zerlegungsbeweises hier des Satzes des Pythagoras (Beweisskizze). Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c. Man konstruiert nun ein Quadrat der Seitenlänge a + b und zerlegt es auf die beiden in Figur 192 und Figur 193 angegebenen Arten. Wegen der Kongruenz der eingetragenen Dreiecke folgt  $a^2 + b^2 = c^2$  aus den Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion.



Figur 192



Figur 193



Aufgabe 102

Führen Sie den Zerlegungsbeweis des Satzes des Pythagoras aus.  
( $\delta = 90^\circ$ ?)

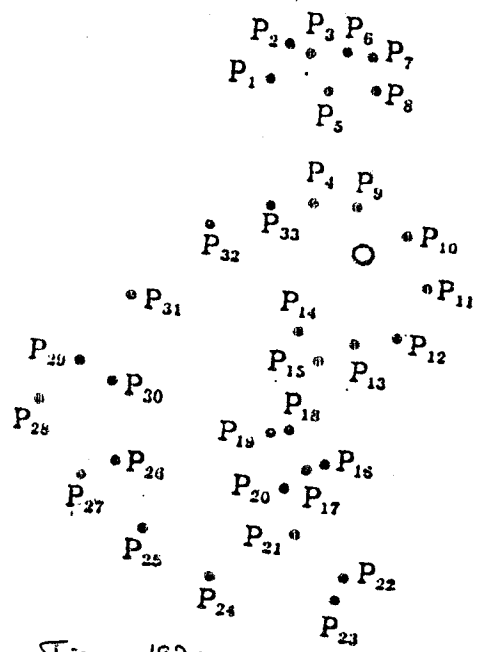
Aufgabe 103

Zeigen Sie, dass eine Jordan-messbare Figur unter einer zentrischen Streckung mit Faktor  $k$  auf eine Figur mit  $k$ -fachem Jordan-Inhalt abgebildet wird.

<sup>Zur RAUMGEOMETRIE!</sup>  
Prinzip von Bonaventura Cavalieri (1598-1647):

Zwei Körper des 3-dim euklidischen Raumes besitzen dasselbe Volumen, wenn ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in entsprechenden Höhen den gleichen Flächeninhalt haben.

§ 19\* Abbildungen am Kreis



Figur 193:  
Polygon, einmal anders

→ Satz von FUBINI  
in der Analysis

Bisher hatten wir meist solche Abbildungen des Raumes und der Ebene betrachtet, bei denen Punkte wieder auf Punkte und Geraden auf Geraden abgebildet werden. In diesem Paragraphen wollen wir auf zwei Abbildungstypen eingehen, die diese Eigenschaften nicht haben.

Generalvoraussetzung:  $E$  reelle euklidische Ebene,  $k$  Kreis um  $M$  mit Radius  $r > 0$ .

A) Polarität am Kreis

(19.1) Definition und erste Eigenschaften

(a) Sei  $P$  ein Punkt von  $E$ ; dann heißt  $P$  außerhalb  $k$  gelegen, falls  $|\overline{PM}| > r$  gilt, und  $P$  innerhalb  $k$ , falls  $|\overline{PM}| < r$ .

(b) (i) Jedem Punkt  $R \in k$  ordnen wir als Gerade  $\pi(R)$  die Tangente an  $k$  durch  $R$  zu. (vgl. Figur 194).

(ii) Jedem Punkt  $P$ , der außerhalb  $k$  liegt, ordnen wir folgendermaßen eine Gerade  $\pi(P)$  zu: