Anhang zu Kap. IV

§ 17. Symmetriegruppen geometrischer Figuren

(17.1) Definition

Sei $\mathcal{F}$ eine Figur der reellen euklidischen Ebene E und $\mathcal{K}:=\mathrm{Bew}(E)$. Eine Abbildung $\kappa \in \mathcal{K}$ heißt Deckabbildung von $\mathcal{F}$, wenn $\kappa(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ gilt. (Analog definiert man räumliche Deckabbildungen.)

(17.2) Satz

> Ist $\mathcal{F}$ geometrische Figur, dann bildet die Menge $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ aller Deckabbildungen von $\mathcal{F}$ eine Untergruppe der Gruppe aller Bewegungen, die Symmetriegruppe von $\mathcal{F}$ (Gruppe aller Deckabbildungen von $\mathcal{F}$).

(17.3) Beispiele (vgl. auch 14.7)

(a) $\mathcal{F} = \{P\}$ für $P \in \mathcal{P}$

$\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ enthält alle Spiegelungen γ_g mit $P \in g$ und die davon u.a. erzeugte Gruppe $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ aller Drehungen um P. Da Translationen und von Achsenspiegelungen verschiedene Gleitspiegelungen fixpunktfrei sind (s. Aufg. 93), gilt

$$\mathcal{K}_{\{P\}} = \{\gamma_g \,|\, P \in g\} \cup \mathcal{D}_{\mathcal{P}}.$$

Aufgabe 93

Zeigen Sie für die reelle euklidische Ebene: Eine Gleitspiegelung, die keine Geradenspiegelung ist, hat keinen Fixpunkt.

(b) $\mathcal{F} = g$ für $g \in \mathcal{G}$

$$\mathcal{K}_g = \{\gamma_g\} \cup \{\gamma_a, \gamma_g \circ \gamma_a, \gamma_a \circ \gamma_b, \gamma_a \circ \gamma_b \circ \gamma_g \,|\, a, b \in \mathcal{G} : a \perp g \wedge b \perp g\}.$$

Beweis s. Aufgabe 94.

Aufgabe 94: Beweisen Sie (17.3)(b)!

(c) $\mathcal{F} = \overline{AB}$

$\mathcal{K}_{\mathcal{F}} = \{\mathrm{id}, \gamma_g, \gamma_h, \gamma_g \circ \gamma_h\}$ für $g = AB$ und $h = m_{\overline{AB}}$.

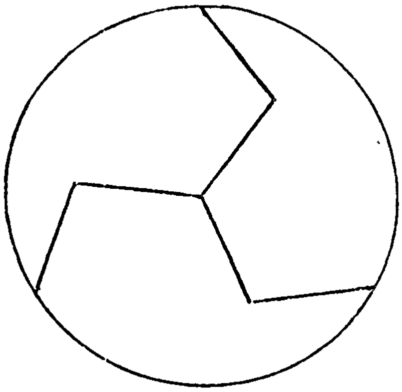
(Zum Beweis betrachten Sie eine Fahne mit der Randhalbgeraden AB^+ !)

(d) $\mathcal{F} = h_1 \cup H$ mit (h_1, H) Fahne

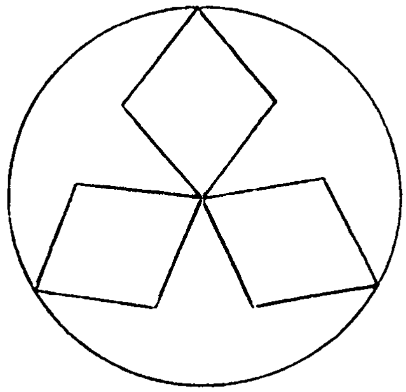
Wegen der scharfen Transitivität von $\mathcal{K}$ auf der Menge der Fahnen gilt $\mathcal{K}_{\mathcal{F}} = \{\mathrm{id}\}$.

M
I

(e) Figuren, die sich nach Art und Anzahl der Elemente der Symmetriegruppe unterscheiden, erzeugen oft ganz unterschiedliche Eindrücke: Das Ornament von Figur 167 hat z.B. eine stärkere "Dynamik" als das von Figur 168. Diese Wirkung kommt möglicherweise dadurch zustande, dass dem ersten Ornament die Spiegelungssymmetien fehlen – es hat nur Drehsymmetrien; (entnommen aus DIFF-Studienbriefe, Grundkurs Mathematik II 2, Tübingen 1972. p.36).

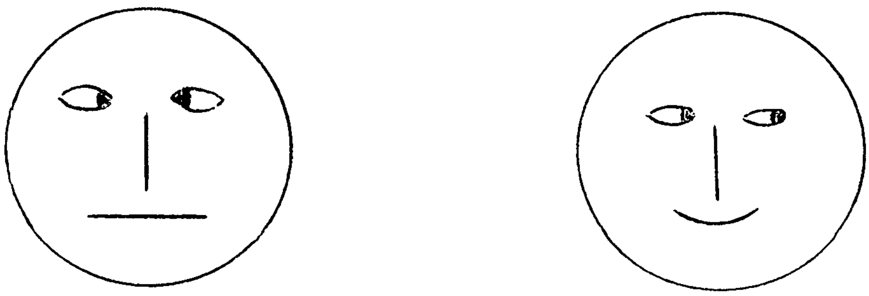


Figur 167



Figur 168

Symmetrischer, aber nicht “schöner”:



M

Figur 169

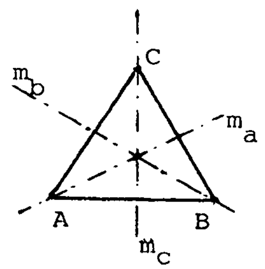
Von besonderem Interesse sind u.a. die Deckabbildungen eines regelmäßigen n–Ecks, dabei heißt ein n–Eck regelmäßig, wenn seine n Eckpunkte auf einem Kreis liegen und zwei benachbarte Ecken mit dem Mittelpunkt des Kreises stets Winkel gleicher Größe α einschließen. (Daraus folgt, dass alle Seiten des n-Ecks gleichlang sind und dass $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ gilt.)

(17.3) Fortsetzung

(f) Die Symmetriegruppe D_3 eines regelmäßigen (d.h. gleichseitigen) Dreiecks (Figur 170) hat Ordnung (= Anzahl der Elemente) 6:

$$D_3 = \{id, \gamma_{m_a}, \gamma_{m_b}, \gamma_{m_c}, \underbrace{\delta_{120°}}_{\gamma_{m_c} \circ \gamma_{m_a}}, \underbrace{\delta_{240°}}_{\gamma_{m_b} \circ \gamma_{m_a}}\}$$

Beweis: Daß D_3 die angegebenen Elemente enthält, ist leicht einzusehen. Da jede Deckabbildung des Dreiecks die Punkte A,B,C permutiert und nur id sie alle drei festläßt, ist D_3 isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}_3$, der Gruppe aller Permutationen von $\{1,2,3\}$. Wegen $|\mathcal{S}_3| = 6 \leq |D_3|$ folgt die Behauptung. $\square$



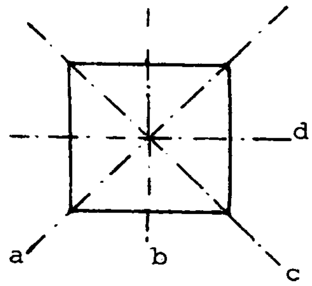
Figur 170

Anmerkung

Für $\delta := \delta_{120°}$ ist $\delta^3 = \mathrm{id}$, für $\gamma := \gamma_{m_a}$ gilt $\gamma^2 = \mathrm{id}$ und $\delta \circ \gamma = \gamma \circ \delta^{-1}$ sowie $D_3 = <\gamma, \delta>$.
Durch diese Angaben ist die Struktur von D_3 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(g) Das regelmäßige Viereck (d.h. das Quadrat) s. Figur 171, erlaubt genau 8 Deckabbildungen:

$$D_4 = \{\mathrm{id}, \gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma_d, \underbrace{\delta_{90°}}_{\gamma_b \circ \gamma_a}, \underbrace{\delta_{180°}}_{\gamma_c \circ \gamma_a}, \underbrace{\delta_{270°}}_{\gamma_d \circ \gamma_a}\}$$



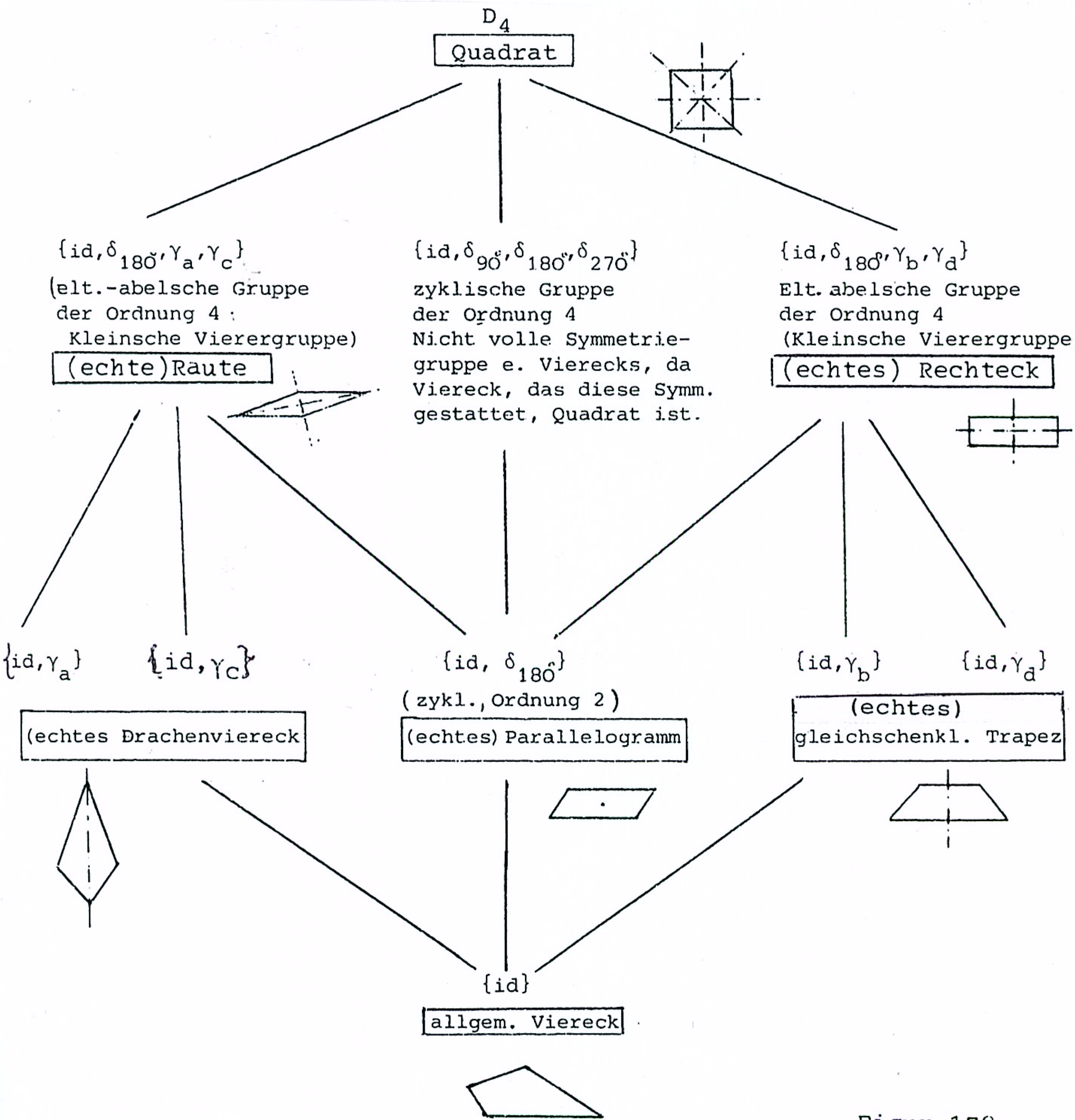
Figur 171

Für $\delta = \delta_{90°}$ gilt $\delta^4 = \mathrm{id}$
für $\gamma = \gamma_a$ gilt $\gamma^2 = \mathrm{id}$

und $\delta \circ \gamma = \gamma \circ \delta^{-1}$ sowie $D_4 = <\gamma, \delta>$.

Zum Beweis betrachtet man, daß es zu einem $\kappa \in D_4$ eine Drehung $\delta \in D_4$ gibt mit $\delta(\kappa(A)) = A$.
Also reicht es, $\hat{\kappa} = \delta \circ \kappa \in D_4$ mit $\hat{\kappa}(A) = A$ zu betrachten. Es folgt nun $\hat{\kappa} = \gamma_a$ oder $\hat{\kappa} = \mathrm{id}$ und damit
$D_4 = <\delta_{90°}> \cup <\delta_{90°}> \circ \gamma_a$

Anmerkung: Die Gruppe D_4 hat folgendes Untergruppendiagramm (Figur 172). Dabei haben wir (analog zu Scheid/Powarzynski: Math. f. Lehramtskand. III) zu jeder Untergruppe angegeben, welche Vierecksart die betr. Gruppe als Symmetriegruppe besitzt); hier bezeichne eine "echte" Raute eine Raute, die kein Quadrat ist ein "echtes" Parallelogramm eine Parallelogramm, das keine Raute und kein Rechteck ist usw.:



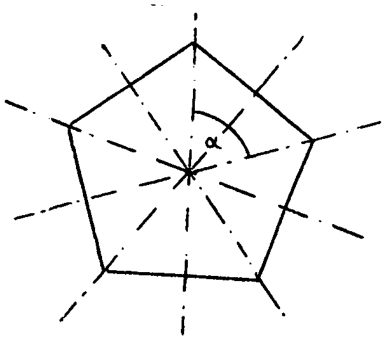
Figur 172
Das "Haus" der Vierecke

(h)* Verallgemeinerung von (f) und (g):

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Die Symmetriegruppe des regemäßigen n-Ecks heißt Diedergruppe und wird mit D_n bezeichnet. ("Dieder" = Zweiflächer, da Figur im Raum als entarteter Polyeder mit zwei Seitenflächen aufgefasst werden kann.)

D_n enthält die n Drehungen $id, \delta_\alpha, \delta_{2\alpha}, \ldots, \delta_{(n-1)\alpha}$

für $\alpha = \frac{360}{n}[°]$, also die von δ_α erzeugte Drehgruppe,



Figur 173

außerdem noch die n Achsenspiegelungen an Geraden, die im Falle, dass

- n gerade ist, gegenüberligende Eckpunkte bzw. Seitenmittelpunkte verbinden (s. z.B. Figur 171)
- n ungerade ist (s. Figur 173), eine Ecke mit der Mitte der Gegenseite verbinden.

Weitere Isometrien kommen nicht in Frage:
Man beachte wieder, dass die Gruppe $< \delta_\alpha >$ transitiv auf den Ecken operiert und dass die zwei benachbarten Ecken einer Fix-Ecke aufeinander abgebildet werden müssen – s. den Beweis zu Bsp. (g) !
Daher gilt (für $n \geq 3$):

$$|D_n| = 2n.$$

Ist γ eine Achsenspiegelung aus D_n, so gilt weiter

$\delta_\alpha^n = id$ (und n ist die kleinste natürliche Zahl dieser Eigenschaft)

$\gamma^2 = id$

$\delta_\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \delta_\alpha^{n-1}$

und $D_n = <\gamma, \delta_\alpha>$.

Jedes Element läßt sich eindeutig in der Form $\delta_\alpha^m \circ \gamma^\ell$ mit $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $\ell \in \{0,1\}$ darstellen.

D_n ist als Gruppe durch diese Angaben bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. *)

(i)* In der räumlichen Geometrie sind auch die Symmetrien der fünf regulären Polyeder (Platonischen Körper)

Tetraeder	(begr. von 4 gleichseitigen Dreiecken)	(Tetraedergruppe) Ordnung 12
Würfel	(~ ~ 6 Quadraten;	(Oktaedergruppe) Ordnung 24 (=4!) (4 Diagonalen)
Oktaeder	(~ ~ 8 gleichseitigen Dreiecken)	
Dodekaeder	(~ ~ 12 gleichseitigen Fünfecken)	(Ikosaedergruppe) Ordnung 60
Ikosaeder	(~ ~ 20 gleichseitigen Dreiecken)	

von Interesse. Diese Gruppen bezeichnet man als Polyedergruppen.
(s. http://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper)

*) Die Diedergruppe D_5 wurde für das Prüfzeichensystem der Serien-Nummern für die früheren DM-Geldnoten verwendet. S. z.B. R.-H. Schulz: Codierungstheorie, Vieweg 2003² p.64 ff