§ 16 Ähnlichkeitsabbildungen

Wie für 3-dim euklidische Räume (vgl. 13.5), so definieren wir auch für die reelle euklidische Ebene E eine *Ähnlichkeitsabbildung* als längenverhältnistreue und winkeltreue Kollineation.

Wir vermerken (vgl. (3.3), Aufgabe 61 und (13.6) :

(16.1) Hilfssatz

(a) Die Ähnlichkeitsabbildungen von E bilden eine Gruppe Ä, die sogenannte *äquiforme Gruppe*.

(b) Die Gruppe aller Dehnungen von E ist eine Untergruppe von Ä, die Untergruppe der sogenannten perspektiven Ähnlichkeitsabbildungen.[1)]

(c) Jede Ähnlichkeitsabbildung ist Produkt einer zentrischen Streckung und einer Bewegung.

Anmerkung *

Da man zeigen kann, daß unter einer zentrischen Streckung eine Fahne auf eine der gleichen Orientierung abgebildet wird, läßt sich je nach dem Typ der Bewegung in oben behandelter Produktdarstellung einer Ähnlichkeitsabbildung zwischen *gleichsinnigen und gegensinnigen Ähnlichkeitsabbildungen* unterscheiden.
Da gleichsinnige Bewegungen Translationen oder Drehungen sind und gegensinnige Gleitspiegelungen, kommen für Ähnlichkeitsabbildungen nur folgende in Betracht:

- perspektivische Ähnlichkeitsabbildungen (Streckungen oder Translationen)
- Produkt einer zentrischen Streckung mit einerDrehung
- Produkte einer zentrischen Streckung mit einer Gleitspiegelung.

Man kann zeigen, daß man mit folgenden Abbildungen alle diese Ähnlichkeitsabbildungen erfaßt :

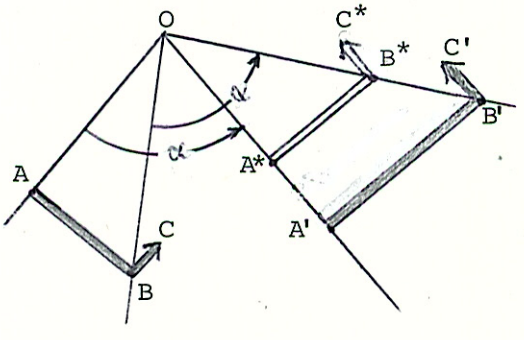
---

1) Eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k ist winkelgrößentreu, da jede Gerade auf eine parallele Gerade abgebildet wird, und sie bildet jede Strecke auf eine $|k|$-fachen Längenmaßes ab.

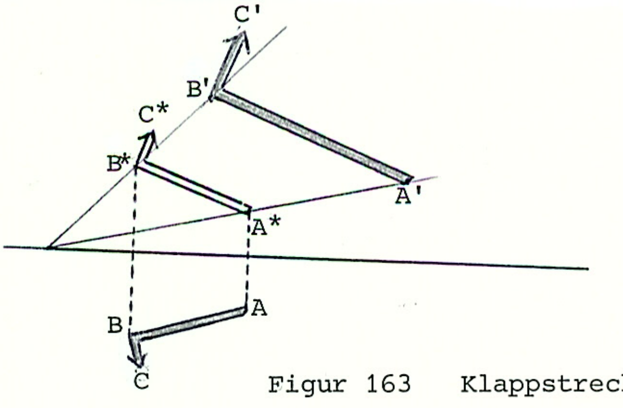
(15.2)* Satz

Eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung von E ist
perspektive Ähnlichkeitsabbildung (zentrische Streckung oder Translation)
oder *Drehstreckung*, d.h. Produkt einer zentrischen Streckung und einer Drehung *mit demselben Fixpunkt*.
Eine gegensinnige Ähnlichkeitsabbildung von E ist
Klappstreckung, d.h. Produkt einer zentrischen Streckung mit Zentrum Z und einer Geradenspiegelung mit Achse g, wobei $Z \in g$ ist.
oder *Gleitspiegelung*.

Beispiele zu einer Dreh- und Klappstreckung s. Figuren 162 & 163.



Figur 162 Drehstreckung



Figur 163 Klappstreckung

Wie man von der Gruppe Bew(E) zum Begriff der Kongruenz kommen kann, so gewinnt man den der Ähnlichkeit aus Ä:

(16.3) Definition

Seien F_1, F_2 Figuren in E. Dann heißt F_1 *ähnlich zu* F_2, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung ρ gibt mit $\rho(F_1) = F_2$.
Schreibweise: $F_1 \sim F_2$.

Anmerkungen

1.) Die Relation "ähnlich" ist eine Äquivalentrelation (zum Beweis werden die Gruppeneigenschaften von Ä ausgenutzt)

2.) Die Äquivalenzklassen (Klassen ähnlicher Figuren) sind gerade die Transitivitätsgebiete (Bahnen) der Permutationsgruppe Ä.

Wieder schlägt sich die Invarianz gewisser Begriffe unter Ähnlichkeitsabbildungen bei den entsprechenden Klassen nieder[1]. Umgekehrt fragt man, wann zwei Figuren ähnlich sind.
Für Dreiecke kann man dies auf die entsprechenden Kongruenzsätze [2] zurückführen. Jede Ähnlichkeitsabbildung ist ja Produkt einer zentrischen Streckung (mit der man von Längen*verhältnis*gleichheit zu Längengleichheit kommen kann) und einer Bewegung. Wir erhalten so:

(16.5) Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich genau dann, wenn sie übereinstimmen

1. in den "Längenverhältnissen" aller Seiten: $(a' : b' : c' = a : b : c)$

oder

2. in den Längenverhältnissen zweier Seiten und in der Größe des "eingeschlossenen" Winkels

oder

3. in den Längenverhältnissen zweier Seiten und in der Größe des Winkels, der der längeren Seite gegenüberliegt

oder

4. in der Größe zweier (und damit aller) Winkel.

Beweis von 1.

Gegeben seien die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit Seitenlängen a,b,c und $a' = ka$, $b' = kb$ und $c' = k \cdot c$.
Dann bildet eine Streckung mit Streckfaktor k das Dreieck ΔABC auf ein Dreieck $\Delta A^*B^*C^*$ mit Seitenlängen $a^* = a'$, $b^* = b'$ und $c^* = c'$ ab.
Nun sind $\Delta A^*B^*C^*$ und $\Delta A'B'C'$ kongruent (Kongruenzsatz SSS; vgl. auch Aufgabe 105); daher gilt $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
Die andere Richtung der Aussage folgt aus der Längenverhältnistreue jeder Ähnlichkeitsabbildung. □

Weitere Anmerkungen:
Da Bew(E) Untergruppe von $\mathscr{Ä}$ ist, ist jede Ähnlichkeitsklasse Vereinigung von Kongruenzklassen.
Zur Bestimmung eines Dreiecks (bis auf Kongruenz) kann man daher in manchen

[1] Z.B. haben entsprechende Winkel ähnlicher Figuren die gleiche Größe.
[2] bzw. Eigenschaften von Bewegungen

Fällen zunächst ein Dreieck aus der entsprechenden Ähnlichkeitsklasse bestimmen und es dann durch eine Ähnlichkeitsabbildung auf ein Element der gesuchten Kongruenzklasse abbilden. Da uns die reelle euklidische Ebene als Modell für die Zeichenebene dient, wird so das folgende Verfahren der Konstruktion von Figuren in der Zeichenebene nahegelegt:

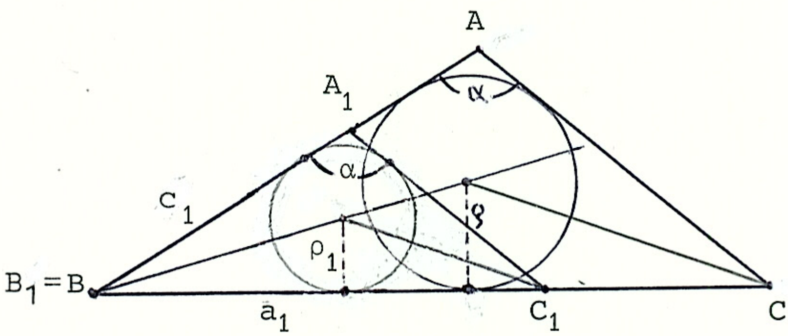
(16.6) <u>Ähnlichkeitsverfahren</u>

Das Ähnlichkeitsverfahren ist auf solche Konstruktionsaufgaben anwendbar, bei denen sich die gegebenen Konstruktionsbedingungen in "*Formbedingungen*" und "*Größenbedingungen*" zerlegen lassen. Die Formbedingungen (z.B. Längenverhältnisse, Winkelgrößen) legen die Klasse aller ähnlichen Figuren fest, zu der die gesuchte Figur gehört. Man konstruiert eine geeignete Figur dieser Klasse und übt auf sie eine solche Ähnlichkeitsabbildung (meist zentrischer Streckung) aus, dass die Bildfigur auch die Größenbedingung erfüllt. Ist noch eine "*Lagebedingung*" gegeben, so erfüllt man diese evt. durch Anwendung einer Bewegung.

<u>Beispiel</u> (vgl. FABER, Geometrie 2, Stuttgart 1969):
Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $a : c = 3 : 2$, $\alpha = 109[°]$ und Inkreisradius(s. Aufgabe 111) $\rho = 1{,}4[cm]$.

<u>Lösung</u> (s. Figur 164)
Durch die Bedingung $a : c = 3 : 2$, $\alpha = 109[°]$ ist eine Klasse ähnlicher Dreiecke festgelegt (15.5)(3). Man konstruiert ein Dreieck dieser Klasse, etwa $\Delta A_1B_1C_1$ mit $a_1 = 6[cm]$, $c_1 = 4[cm]$, $\alpha = 109[°]$, und in diesem den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreisradius sei ρ_1.

Das gesuchte Dreieck ergibt sich aus $\Delta A_1B_1C_1$ z.B. durch Ausübung der Streckung mit Zentrum B_1 und Streckfaktor $\frac{\rho}{\rho_1}$. (Dabei braucht man ρ_1 natürlich nicht zu messen).



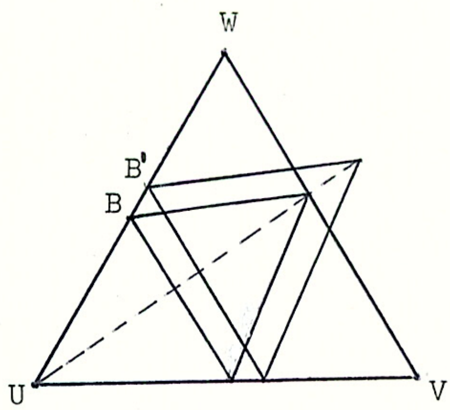
Figur 164

Aufgabe 90

Beschreiben Sie einem gleichseitigen Dreieck ΔUVW mit der Seitenlänge 5[cm] ein Dreieck ΔABC so ein, daß die Seite $\overline{BC}$ parallel zur Seite $\overline{VW}$ verläuft und $a : b : c = 7 : 6 : 5$ ist!

Konstruktionsbeschreibung ?

(vgl. Figur 165)



Figur 165

Exemplarisch für Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeit gehen wir ein auf:

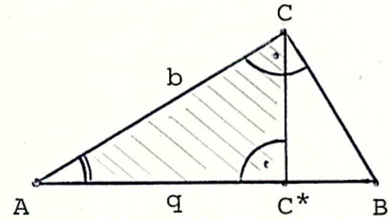
(16.7) Beweis des Kathetensatzes mit Hilfe von Ähnlichkeitsabbildungen (vgl. 11.8)

Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck ΔABC mit $|\sphericalangle ACB| = R$ sowie Fußpunkt C^* der Hypotenusenhöhe und $q = |\overline{AC^*}|$.

Dann ist $|\sphericalangle\, AC^*C| = |\sphericalangle\, ACB|$ und $|\sphericalangle\, C^*AC| = |\sphericalangle\, CAB|$ (s. Figur 166) und damit ΔAC^*C ähnlich zu ΔACB.

Es existiert daher ein $\rho \in \ddot{A}$ mit $\rho(A) = A$, $\rho(C^*) = C$ und $\rho(C) = B$.

Die Längenverhältnistreue von ρ impliziert



Figur 166

$$\frac{|\overline{AC^*}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{\rho(A)\rho(C^*)}|}{|\overline{\rho(A)\rho(C)}|} = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}\text{, also } b^2 = q \cdot c. \quad \square$$

1)
Ergänzende Aufgaben

Aufgabe 91

Zeigen Sie für ein Dreieck ΔABC (der reellen euklidischen Ebene) mit Seitenlängen $a = |\overline{BC}|$, $c = |\overline{AB}|$ und Höhenlängen h_a, h_c die Gleichung

$$\frac{a}{c} = \frac{h_c}{h_a}\ .$$

Lösungshinweis: Betrachten Sie die Spiegelung an der Winkelhalbierenden w_β und eine geeignete Streckung mit Zentrum B.

Aufgabe 92

Man konstruiere ein Dreieck mit Höhen $h_a = 6[cm]$, $h_b = 7[cm]$, $h_c = 5[cm]$ und begründe das Vorgehen.

Lösungshinweis: Beachten Sie Aufgabe 91 !

---

1) Falls Kap. III übersprungen wurde, sollte man hier die übrigen klassischen Sätze behandeln !