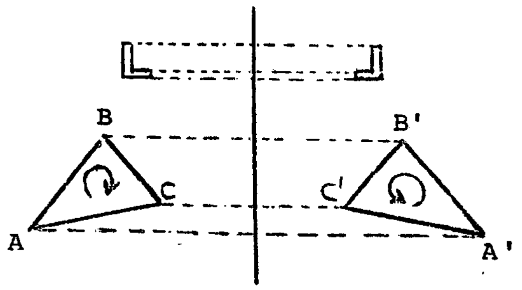
§ 15 Gleichsinnige Bewegungen, Orientierung der Ebene

Generalvoraussetzung: E Ebene eines 3-dim euklidischen Raumes (bzw. desarguessche euklidische Ebene.)

Legen wir zunächst einen intuitiven Begriff der Orientierung von Figuren der reellen euklidischen Ebene zugrunde, so stellen wir fest, daß eine Geradenspiegelung z.B. die Orientierung eines Dreiecks "umkehrt" (s. Figur 153),



Figur 153

eine Drehung sie aber erhält.

Im vorliegenden Paragraphen wollen wir dies präzisieren, indem wir umgekehrt den Begriff der Orientierung aus den Eigenschaften von Spiegelungen und ihren Produkten ableiten.

A) Gleichsinnige Bewegungen

(15.1) Definition

Eine ebene Bewegung heißt *gleichsinnige* (bzw. ungleichsinnige) Bewegung, falls sie sich als Produkt einer geraden (bzw. ungeraden) Anzahl von Geradenspiegelungen darstellen lässt.

(15.2) Hilfssatz

Eine Bewegung ist entweder gleichsinnig oder ungleichsinnig (, nicht beides zugleich.)

<u>Beweisskizze</u>:

Nach Satz 14.8 ist eine Bewegung als Produkt von Geradenspiegelungen darstellbar. Mit Hilfe von (14.15) lässt sich eine gleichsinnige Bewegung als Produkt von zwei, eine ungleichsinnige als Produkt einer oder dreier Geradenspiegelungen darstellen. Wäre nun $\gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_k = \gamma_n \circ \gamma_l$ (evtl. mit $h=k$), so $\gamma_n = \gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_k \circ \gamma_l$ sowohl Geradenspiegelung als nach 14.15 auch Doppelspiegelung. Ebenfalls nach 14.15 ist eine Doppelspiegelung eine Translation (ohne Fixpunkt – außer bei der Identität) oder eine Drehung (nach Aufgabe 80 mit genau einem Fixpunkt oder die Identität), also keine Geradenspiegelung. ↯

□

Folgerung aus dem Beweis:

(15.3) <u>Charakterisierung der gleich- und gegensinnigen Bewegungen</u>

> Die gleichsinnigen Bewegungen von E sind genau die Translationen und Drehungen von E (einschließlich Punktspiegelungen und der Identität); die ungleichsinnigen Bewegungen von E sind genau die Gleitspiegelungen (einschließlich Geradenspiegelungen).

(15.4) <u>Folgerung</u>:

> Die gleichsinnigen Bewegungen von E bilden eine Gruppe, $Bew^+(E)$. Diese ist Untergruppe vom Index 2 in der Gruppe Bew(E) aller Bewegungen von E (, d.h. $Bew^+(E)$ ist Untergruppe von Bew(E) mit $Bew(E) = Bew^+(E) \,\dot{\cup}\, Bew^+(E) \circ \gamma$ für eine Geradenspiegelung γ).

Beweis:

(i) Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in Bew^+(E)$; dann existieren Geraden g,h,k,l mit $\varphi_1 = \gamma_h \circ \gamma_g$ und $\varphi_2 = \gamma_l \circ \gamma_k$. Nach Satz 14.15(i) ist $\varphi_2 \circ \varphi_1 = \gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_h \circ \gamma_g$ eine Doppelspiegelung, also aus $Bew^+(E)$. Mit $\varphi_1^{-1} = (\gamma_h \circ \gamma_g)^{-1} = \gamma_g \circ \gamma_h \in Bew^+(E)$ folgt die erste Behauptung aus dem Untergruppenkriterium.

(ii) $Bew^+(E)$ enthält alle gleichsinnigen Bewegungen von E, also solche, die durch ein Produkt einer geraden Zahl von Geradenspiegelungen darstellbar sind, für eine beliebige Geradenspiegelung γ folglich $Bew^+(E) \circ \gamma$ alle Bewegungen mit ungerader Faktorenzahl. Die Disjunktkeit beider Mengen wurde schon in (15.2) gezeigt. □

B) Orientierung von Fahnen, Ebenen, Winkeln

(15.5a) Definition

Zwei Fahnen F_1, F_2 von E heißen *gleichorientiert*, falls es eine gleichsinnige Bewegung φ gibt mit $\varphi(F_1) = F_2$.

Anmerkung: Allgemeiner spricht man bei Figuren F_1, F_2 dieser Eigenschaft von *gleichsinnig kongruenten* Figuren.

(15.5b) Beispiele

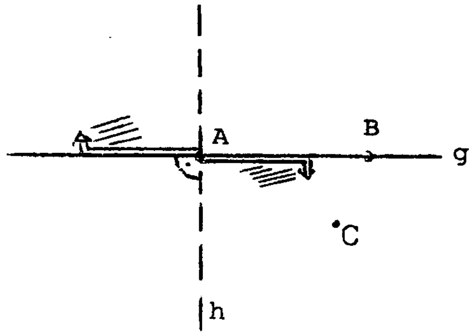
Seien A,B,C drei nicht-kollineare Punkte von E. Dann gilt:

(i) Die Fahnen (AB^+, ABC^+) und (AB^-, ABC^-) sind gleichorientiert.

(ii) Die Fahnen (AB^+, ABC^+) und (AB^+, ABC^-) sind nicht gleichorientiert

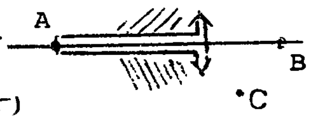
<u>Beweis</u>:

(i) Sei h die Senkrechte auf $g = AB$ in A. Dann gilt für die (gleichsinnige) Punktspiegelung $\sigma_A = \gamma_h \circ \gamma_g$ (s. 14.10 & Figur 154) die Aussage $\sigma_A(AB^+) = AB^-$ und $\sigma_A(ABC^+) = ABC^-$ (s. Definition von Halbebenen !)



Figur 154

(ii) Die Behauptung folgt aus $\gamma_g(AB^+) = AB^+$ und $\gamma_g(ABC^+) = ABC^-$ für $g = AB$ (s. Figur 155);
und da eine Bewegung durch Urbild- u. Bild-Fahne festgelegt ist, gibt es keine gleichsinnige Bewegung, die (AB^+, ABC^+) auf (AB^-, ABC^-) abbildet.



Figur 155.

<u>Aufgabe 84</u>

Beweisen Sie für die reelle euklidische Ebene E

> Auf der Menge der Fahnen ist die Relation "gleichorientiert" eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen.

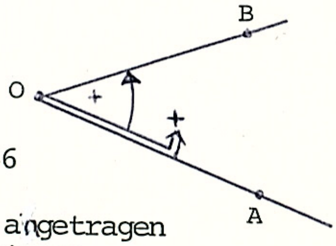
(15.6) <u>Definition</u> (Orientierung der Ebene)

> Die Ebene E zusammen mit einer (ausgezeichneten) der beiden Äquivalenzklassen (s. Aufgabe 84) heißt <u>*orientierte Ebene*</u>; jede Fahne aus der ausgezeichneten Klasse heißt <u>*positiv orientiert*</u>, aus der anderen Klasse *negativ orientiert*.

Nun sind wir in der Lage, in einer orientierten Ebene einen Winkel orientiert anzutragen:

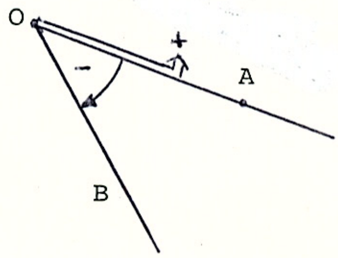
(15.7) Definition

Sei $W = |\sphericalangle AOB|$ eine Winkelgröße in E. Ist dann die Fahne[*] $F = (OA^+, OAB^+)$ positiv orientiert (negativ orientiert), so heißt W von OA^+ aus in positivem (negativem) Sinne angetragen (vgl. Figuren 156,157)[**]



Figur 156

positiv angetragen (falls eingetragene Fahne positiv orientiert).



Figur 157

negativ angetragen

C) Drehungen

Nun können wir Drehungen genauer beschreiben:

(15.8) Satz

(i) Die Menge der Drehungen von E um einen Punkt Z bildet eine kommutative Untergruppe von $Bew^+(E)$.

(ii) Diese Untergruppe ist auf der Menge der Halbgeraden von E mit Scheitel Z scharf transitiv.

Beweis:

(i) Daß die Menge der Drehungen bezüglich Hintereinanderausführung und Inversebildung abgeschlossen ist, wurde schon gezeigt (s. (14.15)).

Wir beweisen die Kommutativität:

Seien $\delta_1 = \gamma_h \circ \gamma_g$ und $\delta_2 = \gamma_n \circ \gamma_m$ Drehungen um Z. Nach dem Dreispiegelungssatz existiert eine Gerade s durch Z mit

$$\gamma_m \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_s \ .$$

**) In der Anschauungs- Ebene spricht man auch vom Antragen gegen oder im Uhrzeigersinn, wobei durch die Wahl der Orientierung positives Antragen dem Antragen gegen den Uhrzeigersinn entspricht.

*) Durch die Wahl der Fahne F wird einer der Schenkel, nämlich OA^+, ausgezeichnet. Bezeichnung des orientierten Winkels $\sphericalangle_{\circ}(OA^+, OB^+)$.

Hiermit erhält man $(\gamma_m \circ \gamma_h \circ \gamma_g)^2 = \mathrm{id}$, also

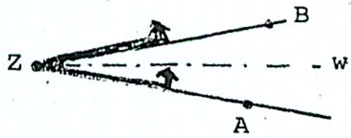
(*) $\gamma_m \circ \gamma_h \circ \gamma_g = (\gamma_m \circ \gamma_h \circ \gamma_g)^{-1} = \gamma_g \circ \gamma_h \circ \gamma_m$.

Entsprechendes gilt für γ_n statt γ_m und γ_g statt γ_h. Es folgt

$$\delta_2 \circ \delta_1 = \gamma_n \circ (\gamma_m \circ \gamma_h \circ \gamma_g) \underset{(*)}{=} (\gamma_n \circ \gamma_g \circ \gamma_h) \circ \gamma_m \underset{(*)}{=} \gamma_h \circ \gamma_g \circ \gamma_n \circ \gamma_m = \delta_1 \circ \delta_2 .$$

(ii) Die Transitivität auf der Menge der Halbgeraden sieht man folgendermaßen: Seien ZA^+ und ZB^+ gegeben. Sei w die Winkelhabierende von $\measuredangle$ BZA. Dann bildet $\hat{\delta} := \gamma_w \circ \gamma_{ZA}$, eine Drehung um Z, die Halbgerade ZA^+ auf ZB^+ ab.
Nun gibt es genau eine Fahne F_2 mit Randhalbgerade ZB^+, die zur Fahne $F_1 = (ZA^+, ZAB^+)$ gleichorientiert ist (Figur 158). Nach 14.4 gibt es höchstens eine Bewegung, die F_1 auf F_2 abbildet, insgesamt also genau eine gleichsinnige Bewegung, die ZA^+ in ZB^+ transformiert.

Figur 158



□

(15.9) Drehwinkelgröße einer Drehung .

(i) Sei δ eine Drehung um Z in E, die keine Punktspiegelung und ungleich der Identität ist. Wir wählen einen beliebigen Punkt A von $E\setminus\{Z\}$ aus. Dann definieren wir als (orientierte) Drehwinkelgröße von δ die mit Vorzeichen [1] versehene Winkelgröße $+g(\measuredangle AZ\delta(A))$ (falls $\measuredangle AZ\delta(A)$ in positivem Sinne an ZA^+ angetragen ist) bzw. $-g(\measuredangle AZ\delta(A))$ (im anderen Fall).

(ii) Die in (i) definierte orientierte Drehwinkelgröße φ der Drehung δ ist unabhängig von der Wahl von $A(\neq Z)$.

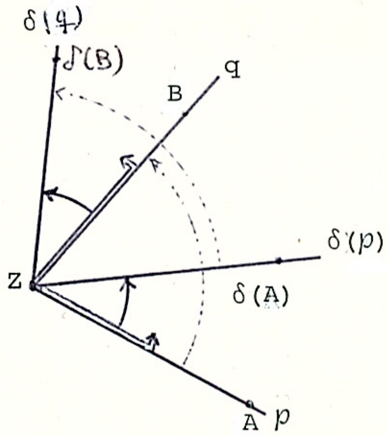
(iii) Als Winkelgröße der Identität definieren wir [1] $+0 = -0 := 0$, als die der Punkt~~s~~spiegelung $+2R = -2R := 2R$.

1) +,-,0,2R werden hier zunächst nur als Symbole verwandt.

Beweis von (ii):

Zum Nachweis von (ii) reicht es, eine Drehung anzugeben, die ZA^+ auf ZB^+ und $Z\delta(A)^+$ auf $Z\delta(B)^+$ abbildet.

(Denn wegen der Winkelgrößentreue und der Erhaltung der Orientierung von Fahnen unter Drehungen folgt dann die Behauptung.) Nach 15.8(ii) existiert eine Drehung $\hat{\delta}$ um Z, die $p = ZA^+$ auf $q = ZB^+$ abbildet. Für diese gilt nach 15.8(i) sogar $\hat{\delta}(\delta(p)) = \delta\hat{\delta}(p) = \delta(q)$. (s. Figur 159; vgl. auch Aufg. 80).



Figur 159

□

Aufgabe 85

Sei in einer orientierten euklidischen Ebene E ein Punkt Z und eine mit Vorzeichen versehene Winkelgröße $\varphi(\neq 0, 2R)$ vorgegeben. Zeigen Sie, daß es dann genau eine Drehung $\delta_{\varphi,Z}$ mit Zentrum Z und orientiertem Drehmaß φ gibt.

Aufgabe 86

Zu jedem Winkel $\sphericalangle(p,q)$ gibt es zwei *orientierte Winkel* (Winkel mit fester Reihenfolge der Schenkel), mit $\sphericalangle\bullet(p,q)$ und $\sphericalangle\bullet(q,p)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass es zu einer Winkelgröße $g(\sphericalangle(p,q))$ von E genau zwei Klassen orientierter Winkel gibt, die wir ebenenfalls mit $+g(\sphericalangle(p,q))$ und $-g(\sphericalangle(p,q))$ bezeichnen und bei denen jeder Winkel einer Klasse durch eine gleichsinnige Bewegung in jeden anderen Winkel der Klasse abgebildet werden kann. (Wir sprechen von Klassen kongruenter *gleich-orientierter* Winkel bzw. von orientierten Winkelgrößen).

Aufgabe 87

Untersuchen Sie in E den Zusammenhang

(i) zwischen Nacheinanderabtragen von Winkeln (der Größe kleiner R) gleicher Orientierung und der Winkeladdition.

(ii) zwischen Nacheinanderabtragen von Winkeln verschiedener Orientierung und der Winkelsubtraktion.

Aufgabe 88

(i) Zeigen Sie für E:

Ist $\delta_{\varphi,Z}$ Drehung um Z mit *orientierter* Drehwinkelgröße φ, so gilt $\delta_{\varphi,Z}^{-1} = \delta_{-\varphi,Z}$. (Dabei sei $-(\pm g(\sphericalangle(p,q))$ als $\mp g(\sphericalangle(p,q))$ definiert.)

(ii) Sei $\delta_{\varphi,Z} = \gamma_g \circ \gamma_h$. Finden Sie einen Zusammenhang zwischen φ und dem Winkel zwischen zwei entsprechenden Halbgeraden von g und h!

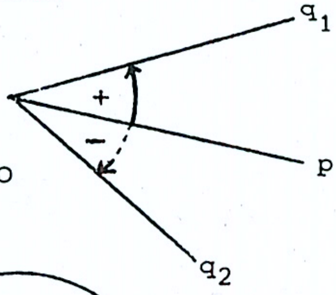
E) Winkelmaß orientierter Winkel, Drehmaß (in der reellen euklidischen Ebene)

Nach Einführung eines Maßes für Winkelgrößen gemäß § 11 E können wir auch jeder orientierten Winkelgröße ein *Maß* (bzw. jeder Drehung ein *Drehmaß*) zuordnen; dabei gibt es folgende zwei Möglichkeiten:

(1) Ist der orientierte Winkel $\sphericalangle\bullet(p,q)$ in negativem Sinne an p abgetragen, so setzt man

$$|\sphericalangle\bullet(p,q)| = -|g(\sphericalangle(p,q))|, \quad \text{andernfalls}$$
$$|\sphericalangle\bullet(p,q)| = +|g(\sphericalangle(p,q))|$$

(vgl. Figur 160).



Figur 160

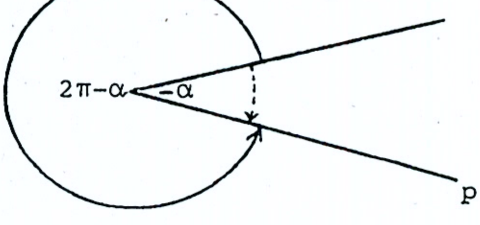
(2) Statt negative Winkelmaße einzuführen, definiert man bei einem in negativem Sinn an p angetragenen Winkel $\sphericalangle(p,q)$ im Bogenmaß

$$|\sphericalangle\bullet(p,q)| = (2\pi - |g(\sphericalangle\bullet(p,q))|) \text{ [Rad]}$$

bzw. im Gradmaß

$$|\sphericalangle\bullet(p,q)| = 360° - |g(\sphericalangle\bullet(p,q))| \text{ [Deg]}$$

(vgl. Figur 161).



Figur 161

Aufgabe 89

Zeigen Sie: Sind $\delta_\varphi, \delta_\psi\ \delta_\eta$ Drehungen von E um Z mit $|\varphi|, |\psi|, |\eta| \in [0, 2\pi)$, so gilt

$$\delta_\varphi \circ \delta_\psi = \delta_\eta \iff \eta \equiv \varphi + \psi \pmod{2\pi}.$$

Lösungshinweis: Benutzen Sie die Darstellung $\delta_\varphi = \gamma_g \circ \gamma_h$ und $\delta_\psi = \gamma_h \circ \gamma_l$ und betrachten Sie die Winkel zwischen entsprechenden Halbgeraden (vgl. Aufgabe 88!)

Anmerkung:
Zusammen mit $\delta_\varphi^{-1} = \delta_{-\varphi}$ folgt

$$(\mathcal{D}_Z, \circ) \cong (\mathbb{R}/(2\pi), +).$$