

(13.9) Ergebnis

Jede Bewegung des 3-dim reellen euklidischen Raumes $A = EG(3, \mathbb{R})$ setzt sich zusammen aus einer Translation und einem orthogonalen Automorphismus von \mathbb{R}^3 .

Auch die Menge der orthogonalen Transformationen ist dabei ausführlich untersucht worden (\rightarrow Lineare Algebra): Sie besteht aus "Drehungen" und "Spiegelungen an einer Ebene" und deren Kompositionen .

Insgesamt unterscheidet man folgende Typen von Bewegungen in A :

Translationen, Gleitspiegelungen, Spiegelungen an einer Ebene, Schraubungen, Drehungen um eine Achse, Punktspiegelungen und Drehspiegelungen

s. z.B. B.H. Schaal: Lineäre Algebra und Analytische Geometrie II, Braunschweig 1976.

§ 14 Ebene Bewegungen und ein Axiomensystem der Bewegungsgeometrie

M Die im vorigen Paragraphen wiedergegebenen Resultate betref-
| fen im Wesentlichen die analytische Darstellung von bestimmten
Kollineationstypen. Für die Elementargeometrie lassen sich da-
raus ebenfalls Folgerungen ziehen, aber über den Umweg der line-
aren Algebra. Beim Aufbau der Geometrie wird oft versucht,
| auch dies zu vermeiden. Wir beginnen daher nochmal von vorn,
M beschränken uns aber auf den Fall der ebenen Bewegungen.

A) "Freie Beweglichkeit"

(14.1) Definition (Ebene Bewegung)

Eine ebene Bewegung (ebene Kongruenzabbildung) des eukli-
dischen Raums $A \cong EG(3, K)$ ist eine bijektive Abbildung φ

einer Ebene $E \in \mathcal{E}$ auf eine Ebene $E' \in \mathcal{E}$ mit folgender Eigenschaft:

$$\overline{\varphi(A)\varphi(B)} = \overline{AB} \quad \text{für alle } A, B \in E.$$

(14.2) Anmerkung:

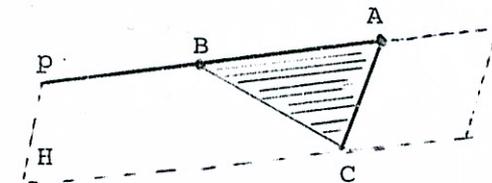
Eine ebene Bewegung bildet Geraden auf Geraden ab (vgl. 10.7) und erhält die Zwischenrelation: Aus $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ und $(A, B, C) \in Z$ folgt wie im Beweis zu 13.8(1) auch $(A', B', C') \in Z$.

Wieder kann man zeigen (s. § 13), dass φ winkelgrößentreu ist, Halbgeraden auf Halbgeraden, Intervalle auf Intervalle, Halbebenen auf Halbebenen, Winkelfelder auf Winkelfelder abbildet (Invarianten einer Bewegung).

Wir fragen nach Existenz (und Eindeutigkeit) der ebenen Bewegungen. Dazu sucht man sich solche Objekte aus, die bei gegebenem Urbild und Bild einer Bewegung diese eindeutig festlegen. Wir definieren:

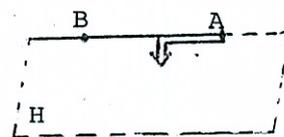
(14.3) Definition (Fahne)

Ein Paar (p, H) heißt Fahne von A , falls $p = AB^+$ Halbgerade ist und $H = ABC^+$ Halbebene mit Randgeraden AB .



Figur 133

Alternative Darstellung einer Fahne:



Figur 134

Anmerkung: Manchmal heißt auch p UH statt (p, H) Fahne von A .

(14.4) Satz ("Freie Beweglichkeit")

Seien $F_1 = (p_1, H_1)$ und $F_2 = (p_2, H_2)$ zwei Fahnen des euklidischen Raums $A \cong EG(3, K)$. Dann gibt es genau eine ebene Bewegung φ von A , die F_1 auf F_2 abbildet, d.h. für die gilt $\varphi(p_1) = p_2$ und $\varphi(H_1) = H_2$.

Bemerkung: (a) Euklid hat (im Wesentlichen) seine Kongruenzsätze auf die (als selbstverständlich angenommene) Aussage des Satzes 14.4 zurückgeführt. Die sogenannte *Bewegungsgeometrie* ^(Abbildungsgeometrie) geht statt von Kongruenzaxiomen von Annahmen wie der Aussage des Satzes 14.4 als Axiom aus (s.u.).
 (b) Man beachte, dass 14.4 die Transitivität der Gruppe aller Bewegungen einer Ebene E auf der Menge der rechtwinkligen Ebenen "Achsenkreuze" (p, h) mit $p \perp h$ von E impliziert.

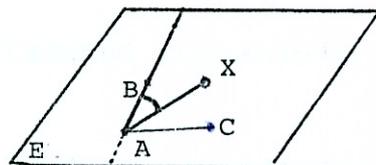
Beweis von 14.4.

I. Existenz

Gegeben seien die Fahnen $F_1 = (p_1, H_1)$ und $F_2 = (p_2, H_2)$ mit den Halbgeraden $p_1 = AB^+$ bzw. $p_2 = A'B'^+$ und den Halbebenen ABC^+ und $A'B'C'^+$. Wir erklären dann φ für die Ebenen $E = ABC$ und $E' = A'B'C'$ durch die Zuordnung $A \mapsto A'$ und $X \mapsto \varphi(X)$, wobei $\varphi(X)$ durch folgende Forderungen eindeutig bestimmt ist:

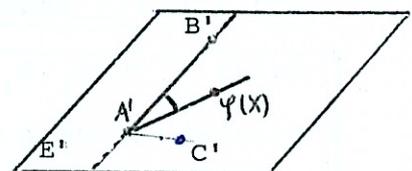
1. $|\overline{AX}| = |\overline{A'\varphi(X)}|$ 2. $g(\sphericalangle BAX) = g(\sphericalangle B'A'\varphi(X))$
3. (i) $\varphi(X) \in A'B'^+$ für $X \in AB^+$
 (ii) $\varphi(X) \in A'B'^-$ für $X \in AB^-$
 (iii) $\varphi(X) \in A'B'C'^+$ für $X \in ABC^+$
 (iv) $\varphi(X) \in A'B'C'^-$ für $X \in ABC^-$.

Dadurch ist $\varphi : E \rightarrow E'$ eindeutig bestimmt; φ ist bijektiv.



Figur 135

Aus den Eigenschaften der Winkel-Addition und -Subtraktion (Aufgaben 53 und 56) sowie dem Kongruenzsatz SWS ergibt sich



$|\overline{\varphi(X)\varphi(Y)}| = |\overline{XY}|$ für alle $X, Y \in E$. (Die Einzelheiten seien dem Leser überlassen), Daher ist φ die gesuchte Bewegung.

II. Eindeutigkeit

Jede Bewegung φ , die F_1 auf F_2 abbildet, sendet einen Punkt X auf einen Bildpunkt $\varphi(X)$, der die Bedingungen 1., 2. und 3. von Beweisteil I erfüllt. Dort hatten wir uns schon überzeugt, dass φ dadurch eindeutig bestimmt ist. □

(Alternativer Beweis von II: Sind φ_1, φ_2 Bewegungen mit $\varphi_1(F_1) = F_2 = \varphi_2(F_1)$, so ist $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ Bewegung mit $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2(F_1) = F_1$. Die einzige Bewegung, die eine Fahne fix läßt, ist die Identität (s.u.). Daraus folgt $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 = \text{id}$.

Aufgabe 75

Zeigen Sie ohne Verweis auf 14.4: Die einzige Bewegung einer Ebene $E \in \mathcal{E}$ auf sich, die eine Fahne festläßt, ist die Identität auf E .

Aufgabe 76

Zeigen Sie für einen 3-dim. euklidischen Raum: Zwei Strecken (bzw. Winkel bzw. Dreiecke) sind genau dann kongruent, wenn es eine ebene Bewegung gibt, die sie ineinander überführt.

(Diese Eigenschaft dient zur Definition von Kongruenz in der Bewegungsgeometrie)

B) Alternatives Axiomensystem

Im Folgenden werden wir uns auf eine Ebene beschränken, also $E = E'$ setzen. Dazu können wir wahlweise E als Ebene eines euklidischen Raumes auffassen oder als desarguessche euklidische Ebene. Für letztere fassen wir einige Axiome und Ergebnisse zusammen. Diese Zusammenstellung kann dann als ein alternatives Axiomensystem dienen, mit dem es möglich ist, Teile von Kap. III zu überspringen. Die meisten Resultate aus Kap. I und Kap. II können dabei unverändert übernommen werden. Lediglich die Gültigkeit des Satzes von Desargues müssen wir zusätzlich fordern, da in seinem Beweis (s.o.) die Einbettung von E in den 3-dim affinen Raum benutzt wurde.

Sei $E = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine *geordnete desarguessche affine Ebene*, d.h. eine Inzidenzstruktur, für die folgende Axiome gelten:

Verbindungsaxiom (I 1) (s.o.)

Reichhaltigkeitsaxiom (I 2)

Euklidisches Parallelenaxiom (EP) (mit $g \parallel h \Leftrightarrow g = h \vee g \cap h = \emptyset$)

Gültigkeit des *Satzes von Desargues* (s.2.18)

Anordnungsaxiome (OR 1 - OR 3)

Wir nennen *E reelle euklidische Ebene*, falls zusätzlich gilt:

Jeder Strecke \overline{PQ} ist eine "Länge" $|\overline{PQ}| \in \mathbb{R}_0^+$ zugeordnet (und jedes Element von \mathbb{R}_0^+ kommt auch als Länge vor) und jedem Winkel ein "Winkelmaß" aus $[0, 180]$ (bzw. $[0, \pi]$) derart, dass folgende Axiome gelten:

Streckenlängenaxiom (12.1a) (Additivität, Streckenabtragen, Verhalten bei Streckungen)

Winkelgrößenaxiom (12.1b) (Additivität, Winkelantragen) und das

Axiom der freien Beweglichkeit:

Zu je zwei Fahnen $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ gibt es genau eine Bewegung (d.h. streckenlängen- und winkelgrößentreue Kollineation), die \mathcal{F}_1 auf \mathcal{F}_2 abbildet.

Zwei Punktmenge \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 (Figuren) heißen nun kongruent, wenn es eine Bewegung gibt, die \mathcal{F}_1 auf \mathcal{F}_2 abbildet; in Zeichen: $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}_2$.

Man kann zeigen, dass zwei Strecken (bzw. Winkel) genau dann kongruent sind, wenn sie die gleiche Länge (bzw. gleiche Größe) haben. Die Axiome bedingen, dass für den Koordinatenschiefkörper K (s. Kap I) gilt: $K = \mathbb{R}$.

Wir weisen darauf hin, dass das angegebene Axiomensystem stärker als nötig ist, also einige der Axiome abgeschwächt werden können (z.B. mit dem Spiegelungsaxiom, s.u., statt des Axioms der freien Beweglichkeit).

Nicht alle Ergebnisse des bisherigen Kap.III werden wir hier erneut beweisen.

C) Geradenspiegelungen

Generalvoraussetzung: E Ebene eines euklidischen Raumes bzw. desarguessche euklidische Ebene.

(14.5) Definition und erste Eigenschaften von Spiegelungen

- (a) Eine Bewegung von E in sich heißt Spiegelung (Geradenspiegelung, Achsenspiegelung), falls sie zwei Punkte festlässt und von der Identität verschieden ist.
- (b) Eine Spiegelung γ , die die Punkte A und B mit $A \neq B$ festlässt hat jeden Punkt der Geraden $g = AB$ als Fixpunkt (g ist Fixpunktgerade). Kein weiterer Punkt bleibt unter γ fest (s. Aufgabe 75). g heißt Achse von γ .

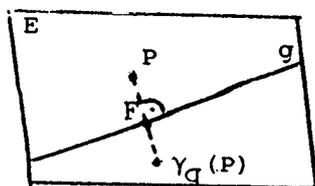
(c) Nach Satz 14.4 folgt sofort durch Betrachten der Bewegung γ mit $\gamma(AB^+) = AB^+$ und $\gamma(ABC^+) = ABC^-$:

Zu je zwei Punkten A, B (bzw. jeder Geraden g) aus E existiert genau eine Spiegelung mit A, B als Fixpunkten (bzw. g als Achse); diese Spiegelung bezeichnen wir mit γ_{AB} bzw. γ_g .

(d) Aus $\gamma_{AB}(AB^+) = AB^+$ und $\gamma_{AB}(ABC^+) = ABC^-$ (s. (c)) folgt noch $\gamma^2 = id_E$ für alle Geradenspiegelungen γ von E; diese sind also Involutionen.

(e) Wegen $\gamma(P\gamma(P)) = \gamma(P)\gamma^2(P) = P\gamma(P)$ ist $P\gamma(P)$ Fixgerade für jeden Punkt P von E mit $P \notin g$.

Man überzeugt sich nun leicht, dass γ_g mit der in Aufgabe 67 definierten Abbildung übereinstimmt (\rightarrow Konstruktive Beschreibung; s. Figur 136) (Vgl. Aufg. 77, s.u.!).



$$PF \perp g \Rightarrow F\gamma_g(P) \perp g$$

$$|\overline{PF}| = |\overline{\gamma_g(P)F}|$$

Figur 136

Die Aussage von 14.5c) wird bei abbildungsgeometrischem Aufbau der Geometrie manchmal als Spiegelungsaxiom verwendet.

Wir behandeln:

(14.6) Beispiele von Beweisen mit Hilfe von Spiegelungen

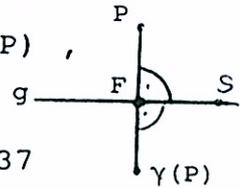
(a) Existenz eines Lots:

- Ist g Gerade und $P \notin g$, so existiert nach 14.5c) die Spiegelung $\gamma = \gamma_g$. Für sie ist $P\gamma(P)$ Lot von P auf g . Denn P und $\gamma(P)$ liegen in verschiedenen Halbebenen zu g , und

für $F = P\gamma(P) \cap g$ und $S \in g$ gilt $\sphericalangle SFP = \sphericalangle SF\gamma(P)$,

und damit $|\sphericalangle SFP| = R$; vgl. Figur 137.

Anm.: Es folgt wieder die Existenz rechter Winkel. \square Figur 137



- Ist $P \in g$, so erhält man das Ergebnis mittels Winkelantragens.

(b) Existenz von Mittelpunkt und Mittelsenkrechte:

Gegeben seien die Punkte A und B mit $A \neq B$. Zu $C \in E$ mit $AC \perp AB$ betrachten wir die (existierende) Bewegung φ , die die Fahne (AB^+, ABC^+) auf die Fahne (BA^+, ABC^+) abbildet.

Für φ erhalten wir $\varphi(A) = B$ und wegen $\varphi(B) \in BA^+$ und

$$|\overline{BA}| = |\overline{\varphi(B)\varphi(A)}| = |\overline{\varphi(B)B}| \text{ auch } \varphi(B) = A. \text{ Aus } \varphi^2(A) = A$$

und $\varphi^2(B) = B$ sowie $\varphi^2(ABC^+) = ABC^+$ ergibt sich $\varphi^2 = \text{id}$.

Sei $D := \varphi(C)$. Aus der Winkelgrößentreue von φ erhalten wir $BD \perp AB$ (s. Figur 138). Wegen¹⁾ $BD \parallel AC$ liegt D in

der gleichen Halbebene mit Rand AC wie B

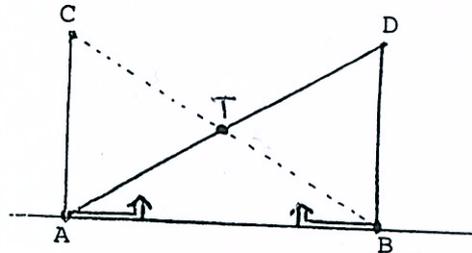
und wegen $\varphi(ABC^+) = ABC^+$ in

der gleichen Halbebene mit

Rand AB wie C . Es folgt

$D \in \text{Inn}(\sphericalangle BAC)$. Nach Aufgabe 32b

folgt die Existenz von $T := AD \cap BC$.



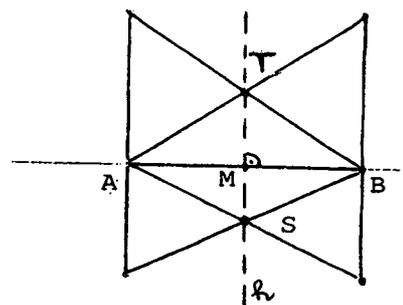
Figur 138

Für diesen Punkt gilt $\varphi(T) = \varphi(A)\varphi(D) \cap \varphi(B)\varphi(C) = B\varphi^2(C) \cap AD = T$.

Analog erhalten wir einen Fixpunkt S von φ in ABC^- . Da-

¹⁾ Um die Behauptung $AC \perp AB \perp BD \Rightarrow AC \parallel BD$ ohne Verweis auf Aufgabe 52 einzusehen, betrachte man die Spiegelung γ_{AB} ; diese führt AC und BD jeweils in sich über; daher existiert kein Schnittpunkt dieser Geraden.

mit ist φ Geradenspiegelung mit Achse $h = ST$. Diese steht wegen $\varphi(A) = B$ auf AB senkrecht (vgl. Figur 139) und geht durch einen Punkt M auf AB , der Mittelpunkt von \overline{AB} ist.



Anmerkung: Insbesondere folgt nun wieder $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$ für jeden Punkt P von h .

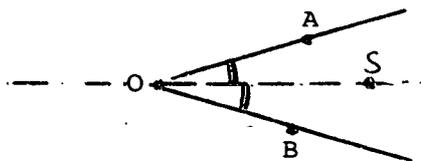
Figur 139

(c) Existenz und Eindeutigkeit der Winkelhalbierenden eines Winkels

Dabei verstehen wir unter der Winkelhalbierenden eines Winkels $\sphericalangle AOB$ eine Gerade OS durch O in der Ebene AOB mit $|\sphericalangle AOS| = |\sphericalangle BOS|$

(s. Figur 140;

vgl. Aufgabe 70).



Beweis von Existenz und Eindeutigkeit der W.

Figur 140

(i) Sei $\sphericalangle(p, q)$ gegeben (- kein gesteckter, kein Nullwinkel). Wir wählen O, A, B so, dass $p = OA^+$, $q = OB^+$ und $|\overline{OA}| = |\overline{OB}|$.

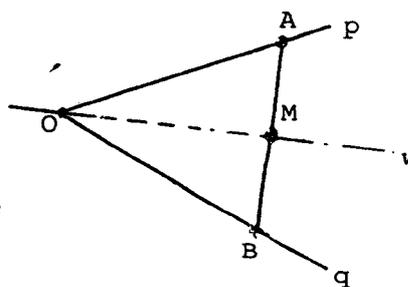
Sei M der Mittelpunkt von \overline{AB} und

$w = OM$. (vgl. Figur 141). Nach

14.4 existiert eine Bewegung γ , die

die Fahne (OA^+, OAB^+) auf die Fahne

(OB^+, OBA^+) abbildet. Es folgt



Figur 141

$\gamma = \gamma_w$ (s. Aufgabe 77). Die Spiegelung γ_w

bildet A auf B ab und hat OM als Fixgerade.

Daraus folgt $|\sphericalangle AOM| = |\sphericalangle \gamma(A)\gamma(O)\gamma(M)| = |\sphericalangle BOM|$.

(ii) Sei w ^{eine} Winkelhalbierende von $\sphericalangle(p, q)$ mit $p = OA^+$;

Dann hat γ_w folgende Eigenschaften: $\gamma_w(O) = O$;

$B := \gamma_w(A) \in q$ (wegen der Winkelgrößentreue von γ_w und

weil p, q auf verschiedenen Seiten von w liegen);

$M := AB \cap w$ ist Mittelpunkt von \overline{AB} ; $|\sphericalangle AMO| = |\sphericalangle BMO| = R$;

schließlich $|\overline{OA}| = |\overline{OB}|$. Damit ist w eindeutig festgelegt.

□

Aufgabe 77

Zeigen Sie ohne Verwendung der Kongruenzsätze, dass die in 14.6c angegebene Bewegung eine Spiegelung mit Achse w ist!

Aufgabe 78

(a) Seien A, B verschiedene Punkte der reellen euklidischen Ebene E , sei M Mittelpunkt von \overline{AB} und $C \notin \overline{AB}$. Betrachten Sie die Bewegung φ mit $\varphi(MA^+) = MB^+$ und $\varphi(MAC^+) = MB^+C^-$. Zeigen Sie insbesondere, dass φ zwar keine Geraden Spiegelung ist, aber involutorisch, und dass daher $P, M, \varphi(P)$ kollinear sind für alle $P \neq M$.

(b) Folgern Sie aus (a) erneut, dass kongruente Stufenwinkel zu parallelen Geraden gehören und dass Scheitelwinkel kongruent sind.

Die vorigen Überlegungen führen auch auf Symmetrie-Fragen:

(14.7) Symmetrieachsen von Figuren

(a) Definition

Eine Punktmenge F einer Ebene E heißt auch ebene *Figur*.

Ist g eine Gerade mit $\gamma_g(F) = F$, so heißt g Symmetrieachse von F .

(b) Beispiele

(i) $F = \overline{AB}$ (Strecke): Die Mittelsenkrechte zu \overline{AB} in E und die Gerade AB sind die (einzigen) Symmetrieachsen von \overline{AB} in E .

(ii) $F = \sphericalangle(p, q)$ (Winkel). Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle(p, q)$ ist im Falle nicht-kollinearer Halbgeraden p, q (einzige) Symmetrieachse zu $\sphericalangle(p, q)$ in E .

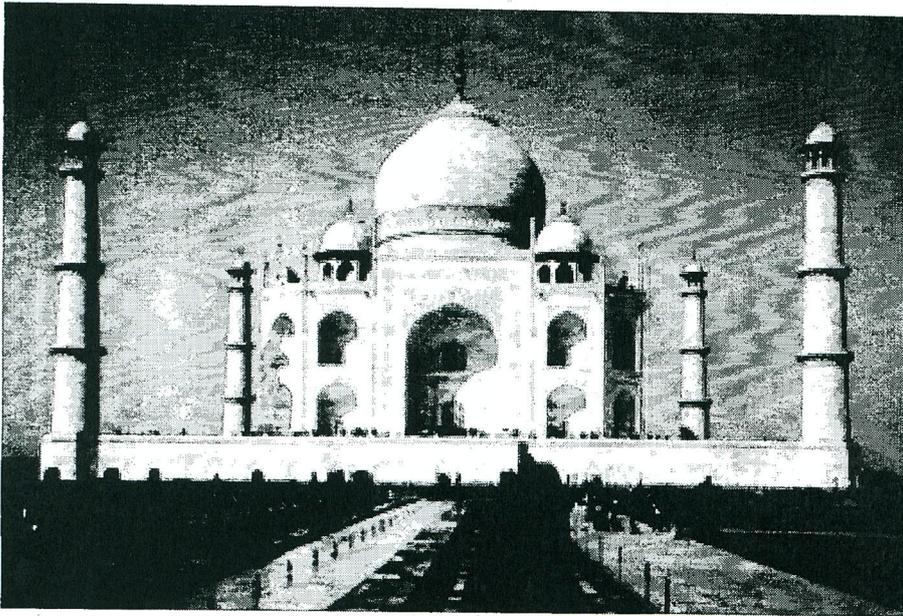
s. 14.6c

Aufgabe 79

Zeigen Sie (14.7.b) und bestimmen Sie ferner die Symmetrieachsen zweier sich schneidender Geraden, eines Drachenvierecks, eines Rechtecks, eines Quadrates.

(c) Zu "bilateraler" Symmetrie in Kunst und Natur siehe wieder

- Weyl, H.: Symmetrien 1955²⁰¹⁶ und Gilde, W.: Gespiegelte Welt, Köln/Leipzig 1979
- R.W. Wille (Hrsg.): Symmetrie, Springer 1988
- P.B. Yale: Geometry and Symmetry, Dover 2012²
- M.W. Armstrong: Groups and Symmetry, Springer V. 1987



Figur 142
Symmetrie in der Architektur
(am Beispiel von Taj Mahal)
Foto von
Hans A. Rosbach in Wikipedia

Link zum Original-Bild:
<http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:TajMahal20080211-1.jpg>

unter: Creative-Commons-Lizenz:
„Namensnennung - Weitergabe unter
gleichen Bedingungen 3.0
Unported (CC BY-SA 3.0)
s. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.de>

9) Produkte von Geradenspiegelungen

(14.8) Satz¹⁾ (Darstellung von Bewegungen durch Spiegelungen)

Jede Bewegung einer Ebene auf sich ist als Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen darstellbar.

Beweis

Seien φ beliebige Bewegung von E auf sich und

$F_i = (O_i P_i^+, H_i)$ für $i=1,2$ Fahren von E

mit $\varphi(F_1) = F_2$. Ist $O_1 \neq O_2$, so sei

$\gamma := \gamma_m$ die Spiegelung an der Mittel-

senkrechten m zur Strecke $\overline{O_1 O_2}$ (s. Fig. 143);

ist $O_1 = O_2$, so definieren wir

$\gamma = \text{id}_E$. Statt φ betrachten wir jetzt $\varphi_1 := \gamma \circ \varphi$.

Nun gilt $\varphi_1(F_1) = (O_1 P_3^+, H_3)$ mit $P_3 := \varphi_1(P_1)$ und $H_3 := \varphi_1(H_1)$.

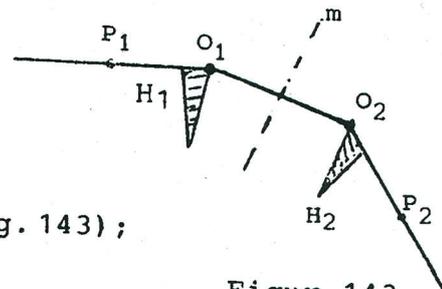
Sei nun w die Winkelhalbierende des

Winkels $\angle P_1 O_1 P_3$ (bzw. im Falle

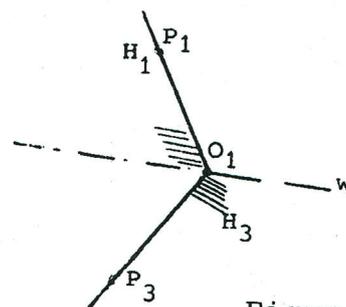
$O_1 P_1^+ = O_1 P_3^+$ die Gerade $w = O_1 P_1$, im

Falle von $O_1 P_1^+ = O_1 P_3^-$ die Senkrechte

auf $O_1 P_1$ in O_1).



Figur 143



Figur 144

¹⁾ Nicht mit dem Dreispiegelungssatz (s.u.) verwechseln!

Dann bildet γ_w die Halbgerade OP_3^+ auf OP_1^+ ab, daher $\varphi_2 = \gamma_w \circ \gamma \circ \varphi$ die Fahne F_1 auf $(O_1P_1^+, H_4)$ mit $H_4 = \gamma_w(H_3)$. Sowohl H_1 als auch H_4 sind Halbebenen von E mit Randgeraden $g := O_1P_1$, (s. Fig. 145).

Ist $H_1 = H_4$, so setzen wir $\varphi_3 = \varphi_2$,

ist $H_1 \neq H_4$, so $\varphi_3 := \gamma_g \circ \varphi_2$.

In jedem Fall läßt φ_3 die Fahne

F_1 fest und ist nach 14.4 also die

Identität. Wir erhalten

$\gamma_w \circ \gamma \circ \varphi = \text{id}$ oder $\gamma_g \circ \gamma_w \circ \gamma \circ \varphi = \text{id}$, daraus $\varphi = \gamma \circ \gamma_w$ oder

$\varphi = \gamma \circ \gamma_w \circ \gamma_g$; daher gilt $\varphi \in \{\text{id}, \gamma_w, \gamma_m \circ \gamma_w, \gamma_w \circ \gamma_g, \gamma_m \circ \gamma_g, \gamma_m \circ \gamma_w \circ \gamma_g\}$.

Welche Möglichkeiten für φ gibt es? □

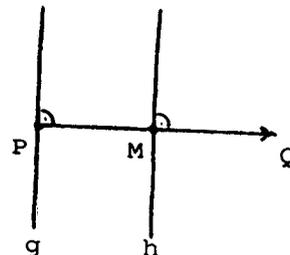
"Produkte" mit einem Faktor sind die *Geradenspiegelungen* selbst. Produkte zweier Geradenspiegelungen mit parallelen

Achsen sind *Translationen* der Ebene E (vgl. Aufgabe 68, s.auch weiter unten).

Ist umgekehrt $\tau = \tau_{PQ}$ Translation von E , so bezeichne g die Senkrechte auf PQ in P und $h = m_{PQ}$ die Mittelsenkrechte zu PQ (vgl. Figur 146). Dann gilt:

$$\tau_{PQ} = \gamma_h \circ \gamma_g$$

(Beweis ?)



Figur 146

Daraus folgt(unabhängig von Aufg.68) wieder, dass das Produkt zweier Geradenspiegelungen mit parallelen Achsen eine Translation ist.

Wir untersuchen nun Produkte *zweier* Geradenspiegelungen mit beliebigen sich schneidenden Achsen g und h .

Aufgabe 80

Seien g, h Geraden der reellen euklidischen Ebene mit $g \cap h = \{T\}$. Zeigen Sie:

(a) $\delta := \gamma_g \circ \gamma_h$ ist eine Bewegung mit genau einem Fixpunkt.

(b) Es gilt $|\angle PT\delta(P)| = \alpha$ für alle $P \in E$ und konstantes $\alpha \in \mathcal{W} \cup \{0, 2\pi\}$.

(Bei Einführung von orientierten Winkeln kann man sogar zeigen, dass auch die Orientierung von $\angle PT\delta(P)$ stets gleich ist.)

(14.9) Definition (Drehung)

In der reellen euklidischen Ebene heißt das Produkt zweier Geradenspiegelungen, deren Achsen sich in einem Punkt Z schneiden (oder gleich sind), Drehung um Z als Drehzentrum.

(14.10) Spezialfall: Punktspiegelungen

(i) In einer desarguesschen euklidischen Ebene ist das Produkt $\gamma_g \circ \gamma_h$ zweier Geradenspiegelungen mit zueinander senkrechten Achsen g und h die Punktspiegelung mit Zentrum $Z = g \cap h$. (Definition analog zu Aufgabe 18 bzw. 72, eingeschränkt auf die Ebene) ; vgl. auch Aufg. 78.

Es gilt also

$$\sigma_Z = \gamma_g \circ \gamma_h = \gamma_h \circ \gamma_g$$

Aufgabe 81 Beweisen Sie (14.10)(i) und zeigen Sie, dass die in Aufgabe 78 behandelte Bewegung eine Punktspiegelung ist!

- (ii) Punktspiegelungen sind also nicht nur zentrische Streckungen mit Streckfaktor -1 sondern auch spezielle Drehungen.
- (iii) Aus (i) folgt, daß Geradenspiegelungen mit aufeinander senkrechten Achsen vertauschbar sind.
- (iv) In Aufgabe 19 war nachzuweisen, daß das Produkt zweier Punktspiegelungen des 3-dim affinen Raumes stets eine Translation ist. Eine analoge Aussage folgt auch für die Ebene (Beschränkung der gesamten Abbildungen auf die Ebene).
Genauer gilt (Beweis ?);

$$\tau_{PQ} = \sigma_M \circ \sigma_P \quad , \quad \text{wobei } M \text{ den Mittelpunkt von } \overline{PQ} \text{ bezeichnet.}$$

Nun betrachten wir "Dreifachspiegelungen"; folgender Satz ist dabei von zentraler Stellung im Rahmen der Spiegelungsgeometrie:

(14.11) Dreispiegelungssatz

In jeder desarguesschen euklidischen Ebene gilt:
Jedes Produkt von drei Geradenspiegelungen (Dreifachspiegelung), deren Achsen sich in einem Punkt schneiden oder alle parallel sind, ist (wieder) eine Geradenspiegelung.

Also:

Ist $a \cap b \cap c = \{Z\}$, so existiert eine Gerade g mit $Z \in g$ und

$$\gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a = \gamma_g \quad .$$

Ist $a \parallel b \parallel c$, so existiert eine Gerade g mit $g \parallel a$ und

$$\gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a = \gamma_g$$

Beweis:

- (1) Seien $a \cap b \cap c = \{Z\}$ und p Halbgerade mit Trägergerade a und Anfangspunkt Z und $\varphi := \gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a$;

dann ist auch $\varphi(p)$ eine Halbgerade

mit Anfangspunkt Z ; sei

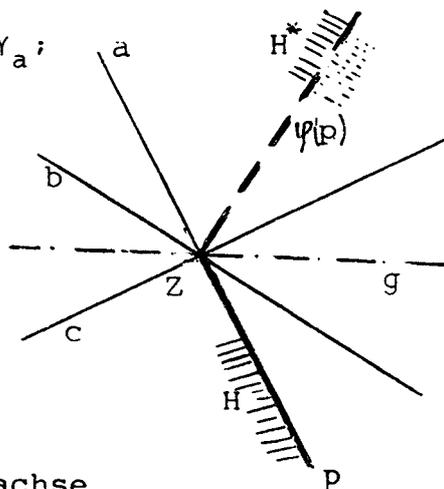
g die Winkelhalbierende des

Winkels $\sphericalangle(p, \varphi(p))$, vgl. Figur 146,

(oder $g = a$ im Falle $p = \varphi(p)$).

Dann gilt $\gamma_g(p) = \varphi(p)$,

(da die Winkelhalbierende Symmetrieachse des betrachteten Winkels ist.)



Figur 146

Sei H Halbebene mit Rand a und $H^* := \gamma_g(H)$. Dann sind so-

wohl $\varphi(H)$ als auch H^* Halbebenen, deren Ränder Träger

von $\gamma_g(p) = \varphi(p)$ sind. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Gilt $\varphi(H) = H^*$ (1. Fall), so sind φ und γ_g Bewegungen,

die die Fahne (p, H) auf die selbe Bildfahne $(\varphi(p), H^*)$

abbilden. Nach (14.4) folgt $\gamma_g = \varphi = \gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a$.

Sei $\varphi(H) \neq H^*$ (2. Fall), dann ist $\varphi(H)$ (als γ_g -Bild einer

Halbebene zu a) gleich $\gamma_g \circ \gamma_a(H)$. Aus der scharfen Transi-

tivität der Menge der ebenen Bewegungen auf der Menge der

Fahnen folgt (mit $\varphi(p) = \gamma_g \circ \gamma_a(p)$ und $\varphi(H) = \gamma_g \circ \gamma_a(H)$)

wie eben $(\gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a) \varphi = \gamma_g \circ \gamma_a$ und daraus $\gamma_g = \gamma_c \circ \gamma_b$. Nun

hat γ_g ^{genau} alle Punkte von g als Fixpunkte, die Drehung $\gamma_c \circ \gamma_b$

oder (falls $c = b$) alle Punkte der Ebene, nur das Drehzentrum. Daher führt diese Gleichung zu einem

Widerspruch. Der 2. Fall kann nicht auftreten.

(2) Sei $a \parallel b \parallel c$ und (o.B.d.A.) $b \neq c$ (ansonsten folgt die Behauptung sofort); dann ist $\tau := \gamma_c \circ \gamma_b \neq \text{id}$ eine Translation (s. oben). Ist $P \in a$ und M der Mittelpunkt von $P\tau(P)$ sowie g die Parallele zu a durch M (s. Figur 147), so ist auch

$\tau_1 = \gamma_g \circ \gamma_a$ eine Translation.

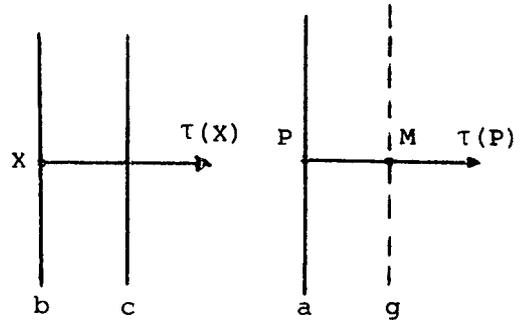
Wegen $\tau_1(P) = \gamma_g(P) = \tau(P)$

folgt $\tau_1 = \tau$ und

$$\gamma_c \circ \gamma_b = \tau = \tau_1 = \gamma_g \circ \gamma_a$$

und damit

$$\gamma_c \circ \gamma_b \circ \gamma_a = \gamma_g$$



Figur 147

□

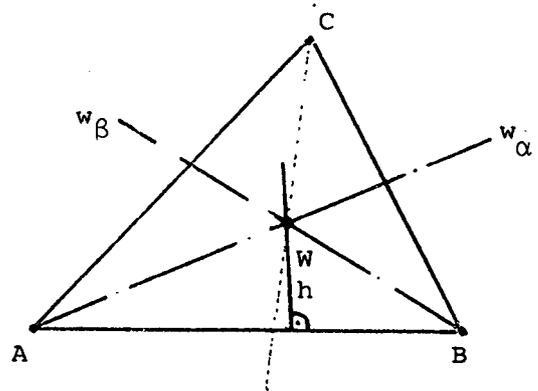
(14.12) Anwendungsbeispiel

In einer desarguesschen euklidischen Ebene gilt:
Die Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W .

Anm.: W ist Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks, vgl. Aufg. 113, p. 186!

Beweis

Die Winkelhalbierenden w_α des Winkels $\sphericalangle BAC$ und w_β des Winkels $\sphericalangle ABC$ können nicht parallel sein; andernfalls läge w_β in der Halbebene mit Rand w_α und könnte nicht die Seite \overline{AC}



Figur 148

schneiden (vgl. Aufgabe 32). Sei $W := w_\alpha \cap w_\beta$ und h das Lot von W auf AB (s. Fig. 148). Nun folgt nach 14.11

$$\gamma_{w_\alpha} \circ \gamma_h \circ \gamma_{w_\beta} = \gamma_g \text{ für eine geeignete Gerade } g. \text{ Wegen}$$

$$\gamma_g(BC) = \gamma_{w_\alpha} \circ \gamma_h(AB) = \gamma_{w_\alpha}(AB) = AC \text{ ist } C \in g$$

Nach Satz 14.8 lässt sich ein Produkt von vier (oder mehr) Spiegelungen auf eins von höchstens drei "reduzieren".

Darüber hinaus gilt sogar:

(14.15) Reduktionssatz

(i) Jedes Produkt von vier Geradenspiegelungen ist eine Doppelspiegelung,

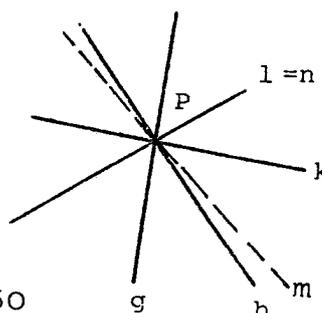
d.h. für alle Geraden g, h, k, l der betrachteten Ebene E existieren Geraden m, n mit $\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_n \circ \gamma_m$.

Beweis

1. Fall: $g \cap h = \{P\} = k \cap l$ (Produkt zweier Drehungen mit gleichem Zentrum; s. Figur 150):

Nach dem Dreispiegelungssatz existiert eine Gerade m durch P mit

$\gamma_k \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_m$; die Behauptung folgt mit $n := l$.



Figur 150

Als Folgerung aus diesem Fall erhält man die Abgeschlossenheit und damit:

(ii) Die Menge der Drehungen von E um das gleiche Zentrum bildet bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe.

2. Fall: $g \cap h = \{P\} \neq \{Q\} = k \cap l$ (Fig. 151).

Sei $s = PQ$. Nach dem Dreispiegelungssatz existiert eine Gerade m durch P und eine

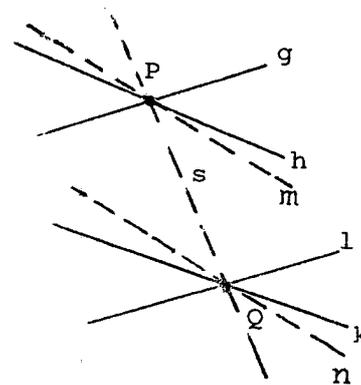
Gerade n durch Q mit $\gamma_s \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_m$

und $\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_s = \gamma_n$.

Daraus erhält man

$$\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_h \circ \gamma_g = (\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_s) \circ (\gamma_s \circ \gamma_h \circ \gamma_g) = \gamma_n \circ \gamma_m$$

Figur 151



Als Teilergebnis halten wir fest:

iii) Das Produkt zweier Drehungen von E um verschiedene Zentren ist eine Drehung oder eine Translation.

3. Fall: $g \parallel h$ und $k \cap l = \{Q\}$ (Figur 152).

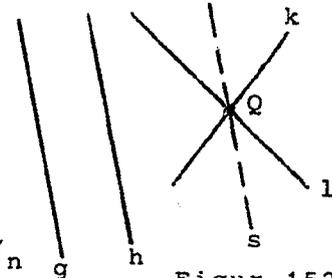
Sei s die Parallele zu g und h durch Q .

Nach dem Dreispiegelungssatz existieren Geraden m (mit $m \parallel g, h, s$) und n (mit $Q \in n$)

derart, dass $\gamma_s \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_m$ und $\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_s = \gamma_n$ gilt. Es folgt $\gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_l \circ \gamma_k \circ \gamma_s \circ \gamma_s \circ \gamma_h \circ \gamma_g = \gamma_n \circ \gamma_m$.

Anmerkung: Wäre $n \parallel m$, so $n \parallel g$ und $Q \in n$, also $n = s$ und

$\gamma_l \circ \gamma_k = \text{id}$, daher $l = k$, ein Widerspruch.



Figur 152

4. Fall: $g \cap h = \{P\}$ und $k \parallel l$.

Beweis analog zum 3. Fall.

Wir halten fest:

iv) Das Produkt einer Translation mit einer nicht-trivialen Drehung ist eine Drehung, ebenso das Produkt einer nicht-trivialen Drehung mit einer Translation.

5. Fall: $g \parallel h$ und $k \parallel l$.

Nun sind $\gamma_h \circ \gamma_g$ und $\gamma_l \circ \gamma_k$ Translationen; ihr Produkt ist dann ebenfalls eine Doppelspiegelung.

(Translation und damit

□