Kap. IV Geometrische Abbildungen

Wir wenden uns nun (im Sinne von Felix Klein, des berühmten Mathematikers, 1849-1925) den "strukturerhaltenden" Abbildungen des 2– bzw.3-dim reellen euklidischen Raumes zu. Da diese es gestatten, Sachverhalte und Beweise zu vereinfachen und anschaulicher zu gestalten, werden sie in zunehmendem Maße auch in der Elementargeometrie herangezogen.

Existenz und Eigenschaften (z.B. von Spiegelungen) werden dabei oft axiomatisch gefordert, um einige Hilbert'schen Axiome (z.B. die Kongruenzaxiome) zu vermeiden.

§ 13* Kollineationen (Übersicht)

(13.1) Definition und erste Eigenschaften von Kollineationen

(a) Sei $I(P,G,E)$ ein Inzidenzraum. Unter einer *Kollineation* von I verstehen wir eine Bijektion $\varphi : P \longrightarrow P$ mit $\varphi(G) := \{\varphi(g) \mid g \in G\} = G$ und $\varphi(E) = E$. (Geraden werden auf Geraden und Ebenen auf Ebenen abgebildet und haben entsprechende Urbilder

(Die auf der Menge der Geraden induzierte Abbildung ist ebenfalls bijektiv: Würde $g' = \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ mit $g_1 \neq g_2$ gelten, so folgte $\varphi(Q_1Q_2) = g'$ für alle $Q_1 \in g_1, Q_2 \in g_2$; damit würde eine Ebene auf eine Gerade abgebildet.)

Analoges gilt für $\mathcal{E}$; denn aus $\varphi(E_1) = \varphi(E_2) = E$ folgt für Geraden $g,h \subseteq E$ dann $\varphi^{-1}(g) = \varphi^{-1}(h) \subseteq E_1 \cap E_2$ und daraus $E_1 = E_2$, also die Injektivität und damit die Bijektivität.

(b) Die Kollineationen sind also genau die Isomorphismen von I auf sich (s. 4.10(b)), die Automorphismen von I.

(c) Die Kollineationen von I bilden bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die *volle Kollineationsgruppe* von I. Diese bezeichnen wir mit Koll(I). Alternative Bezeichnung: Aut(I)

(d) Im 3-dim affinen Raum gilt

φ ist genau dann Kollineation, wenn gilt
(i) φ ist Bijektion von P
(ii) $\varphi(G) = G$
(iii) $g \parallel h \Rightarrow \varphi(g) \parallel \varphi(h)$ für alle $g,h \in G$.

Aufgabe 73

Zeigen Sie 13.1(d).

(13.2) Beispiele

(a) Alle Dehnungen von AG(3,K) sind Kollineationen.

(b) Sei V ein K - VR und $f : V \longrightarrow V$. Dann heißt f *semilinear*, falls ein Automorphismus J von K existiert derart, daß gilt:

$f(v+w) = f(v) + f(w)$ und $f(v\lambda) = f(v) \cdot J(\lambda)$ für alle $v,w \in V$, $\lambda \in K$.

Beispiel: Ist $A \in K^{(n,n)}$, also $n \times n$-Matrix über K, und J Automorphismus von K; dann ist die Abbildung $f_A : K^n \longrightarrow K^n$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} J(x_1) \\ \vdots \\ J(x_n) \end{pmatrix}$$

semilinear, und umgekehrt hat jede semilineare Abbildung von K diese Darstellung. Nun gilt:

Jede bijektive semilineare Abbildung von K^3 ist eine Kollineation von AG(3,K), die o festläßt.

(13.3)* Anmerkung

Die Umkehrung letzterer Aussage läßt sich ebenfalls herleiten: Es gilt der 1. Hauptsatz der affinen Geometrie (hier ohne Beweis zitiert):

Die bijektiven semilinearen Abbildungen $f : K^3 \longrightarrow K^3$ sind genau die Kollineationen von AG(3,K), die o als Fixpunkt haben.

Es folgt:

$Koll(AG(3,K)) = T(K^3) \cdot \Gamma L(K^3)$

, wobei

$T(K^3)$ die Gruppe aller Translationen und $\Gamma L(K^3)$ die Gruppe der bijektiven semilinearen Abbildungen von K^3 bezeichnet.

Unter den Kollineationen spielen die *Affinitäten* eine gewisse Rolle:

(13.4) Definition und Eigenschaften von Affinitäten

(a) Eine Kollineation f von AG(3,K) heißt *Affinität (affin-lineare Bijektion)*, falls sie sich aus einer Translation und einer linearen Abbildung zusammensetzt: $f = \tau \circ \hat{f}$ mit $\hat{f}$ linear.

(b)* Man kann zeigen, daß gilt:

> Genau dann ist f Affinität von $A = AG(3,K)$, wenn f Kollineation von A ist und gilt: $v - x = \lambda(w - x) \Rightarrow f(v) - f(x) = \lambda[(f(w) - f(x)]$ für alle $v \neq w \in V$, $x \neq w$, $\lambda \in K$.

(c)* Es gilt für die Gruppe (!) Aff(AG(3,K)) aller Affinitäten von AG(3,K):

$$\boxed{\mathrm{Aff}(AG(3,K)) = T(K^3)\cdot GL(K^3),}$$

wobei $GL(K^3)$ die Gruppe aller bijektiven linearen Abbildungen von K^3 auf sich bezeichnet.

Anmerkung: Da $\mathbb{R}$ keine nicht-trivialen Automorphismen gestattet, gilt

$$\mathrm{Koll}(AG(3,\mathbb{R})) = \mathrm{Aff}(AG(3,\mathbb{R})).$$

Im 3-dim affinen Raum sind also die Kollineationen genau die Affinitäten.

Wir betrachten nun spezielle Kollineationen *euklidischer Räume*:

(13.5) Definition

Sei A euklidischer 3-dim Raum mit Punktmenge P. Eine Abbildung α heißt *Ähnlichkeitsabbildung* von A, wenn gilt

(1) α ist Kollineation von A

(2) α ist *längenverhältnistreu*,

d.h. $\exists k \in K^+ : \forall P,Q \in P$:

$$|\overline{\alpha(P)\alpha(Q)}| = k\,|\overline{PQ}|$$

(3) α ist *winkelgrößentreu*,

$$\forall \sphericalangle PQR : |\sphericalangle \alpha(P)\alpha(Q)\alpha(R)| = |\sphericalangle PQR|.$$

Aufgabe 74

Zeigen Sie, daß jede längenverhältnistreue Kollineation Intervalle auf Intervalle, Halbgeraden auf Halbgeraden, Halbebenen auf Halbebenen und Winkelfelder auf Winkelfelder abbildet.

(13.6) Beispiele

(a) Jede zentrische Streckung ist eine Ähnlichkeitsabbildung.

(Beweis ?)

(b) Sei α eine Ähnlichkeitsabbildung mit k als Faktor gemäß (13.5); sei $\sigma_{k^{-1}}$ zentrische Streckung mit Faktor k^{-1}.

Dann gilt für $\kappa := \sigma_{k^{-1}} \circ \alpha$ u.a.

$$|\overline{\kappa(P)\kappa(Q)}| = k^{-1} |\overline{\alpha(P)\alpha(Q)}| = |\overline{PQ}|$$

κ ist also *längentreu*.

(13.7) Definition

Eine Kollineation κ eines euklidischen Raums heißt *Bewegung* (Kongruenzabbildung, Isometrie), falls κ *längentreu* ist, d.h. $\forall P,Q \in \mathcal{P}$ $|\overline{\kappa(P)\kappa(Q)}| = |\overline{PQ}|$ gilt.

Weitere Beispiele: Jede Translation, jede Punktspiegelung ist eine Bewegung (vgl. Aufgaben 60 und 72).

Korollar zu 13.6 : Jede Ähnlichkeitsabb. lässt sich als Produkt einer Bewegung und einer zentrischen Streckung darstellen.

(13.8) Eigenschaften von Bewegungen

Sei $\mathcal{A} \cong EG(3,K)$ euklidischer Raum.

(a)

Für eine Bewegung κ von $\mathcal{A}$ gilt
(1) κ erhält die Zwischenrelation.
(2) κ ist winkelgrößentreu.

Beweisskizze:

(1) Aus dem Axiom des Streckenabtragens und dem Axiom der Streckenaddition folgt, dass

$X \in [PQ] \Leftrightarrow |\overline{PX}| \leq |\overline{PQ}| \wedge |\overline{QX}| \leq |\overline{PQ}|$

gilt. Dies gilt auch für die Bilder unter κ.

Daraus ergibt sich, daß κ die Zwichenrelation erhält.

(2) Die Winkelgrößentreue folgt aus dem Kongruenzsatz SSS.

□

(b) Bezüglich Hintereinanderausführung bildet die Menge der Bewegungen von A eine Untergruppe $\mathrm{Bew}(A)$ der Gruppe aller Affinitäten, $\mathrm{Aff}(A)$.

(c) Sei die metrische Struktur von A durch das Skalarprodukt

$x \cdot y = \frac{1}{2}((x+y)\cdot(x+y) - x\cdot x - y\cdot y)$ (und $\mathfrak{x}\cdot\mathfrak{x} = |\overline{o\mathfrak{x}}|^2$) beschrieben. Dann gilt:

$\mathrm{Bew}(AG(3,K)) = T(K^3)\cdot O(K^3)$.

Hierbei bedeutet $O(K^3)$ die *orthogonale Gruppe* von K^3, d.h. die Gruppe (!) der linearen Abbildungen φ von K^3 in sich, für die gilt $\varphi(u)\cdot\varphi(v) = u\cdot v$ (für alle $u, v \in K^3$).

Beweisskizze

(b) Dass die Bewegungen bzgl. Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden, ist leicht aus der Definition zu folgern.

(c) Sei $\kappa = \tau\circ\varphi$ mit Translation τ und $\varphi \in O(K^3)$.

Zu zeigen ist, daß φ (und damit κ) Bewegung ist; dies folgt aus

$|\overline{\varphi(\mathfrak{v})\varphi(\mathfrak{u})}|^2 = (\varphi(\mathfrak{v})-\varphi(\mathfrak{u}))\cdot(\varphi(\mathfrak{v})-\varphi(\mathfrak{u})) = (\mathfrak{v}-\mathfrak{u})\cdot(\mathfrak{v}-\mathfrak{u}) = |\overline{\mathfrak{v}\mathfrak{u}}|^2$.

Sei umgekehrt κ Bewegung. Als Kollineation hat κ die Dartellung $\kappa = \tau\circ\varphi$ mit $\varphi \in \Gamma L(K^3)$ und τ Translation; letztere bildet $\varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ auf $\kappa(\mathfrak{o})$ ab; wegen $|\overline{\mathfrak{o}\varphi(\mathfrak{u})}| = |\overline{\mathfrak{o}\mathfrak{u}}|$ gilt

$$\varphi(u)\cdot\varphi(u) = u\cdot u \quad \text{für alle } u \in V, \text{ damit}$$

$$\begin{aligned}\varphi(u)\cdot\varphi(v) &= \frac{1}{2}\,[\varphi(u+v)\cdot\varphi(u+v) - \varphi(u)\varphi(u) - \varphi(v)\varphi(v)]\\ &= \frac{1}{2}[(u+v)\cdot(u+v) - uu - vv] = u\cdot v\end{aligned}$$

Also ist φ verträglich mit dem gegebenen Skalarprodukt.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\varphi \in GL(K^3)$. Für beliebige $\mathfrak{x}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in V$ und $k_1, k_2 \in K$ gilt: $[\varphi(k_1\mathfrak{v}+k_2\mathfrak{w}) - k_1\varphi(\mathfrak{v}) - k_2\varphi(\mathfrak{w})]\cdot\varphi(\mathfrak{x}) =$
$\varphi(k_1\mathfrak{v}+k_2\mathfrak{w})\cdot\varphi(\mathfrak{x}) - k_1\,\varphi(\mathfrak{v})\cdot\varphi(\mathfrak{x}) - k_2\,\varphi(\mathfrak{w})\cdot\varphi(\mathfrak{x}) =$
$(k_1\mathfrak{v}+k_2\mathfrak{w})\cdot\mathfrak{x} - k_1\,\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{x} - k_2\,\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{x} = 0$.
Da φ bijektiv ist, existiert ein $\mathfrak{x}_o$ mit $\varphi(\mathfrak{x}_o) = \varphi(k_1\mathfrak{v}+k_2\mathfrak{w}) - k_1\varphi(\mathfrak{v}) - k_2\varphi(\mathfrak{w})$. Damit folgt $\varphi(\mathfrak{x}_o)\cdot\varphi(\mathfrak{x}_o) = 0$. Aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts ergibt sich $\varphi(\mathfrak{x}_o) = 0$ und damit die Linearität von φ. □

(13.9) Ergebnis

Jede Bewegung des 3-dim reellen euklidischen Raumes $A = EG(3,\mathbb{R})$ setzt sich zusammen aus einer Translation und einem orthogonalen Automorphismus von $\mathbb{R}^3$.

Auch die Menge der orthogonalen Transformationen ist dabei ausführlich untersucht worden ($\rightarrow$ Lineare Algebra): Sie besteht aus *"Drehungen"* und *"Spiegelungen an einer Ebene"* und deren Kompositionen .

Insgesamt unterscheidet man folgende *Typen von Bewegungen* in A.

Translationen, Gleitspiegelungen, Spiegelungen an einer Ebene, Schraubungen, Drehungen um eine Achse, Punktspiegelungen und Drehspiegelungen

Dabei versteht man unter einer Schraubung eine Drehung verknüpft mit einer Translation in Richtung der Drehachse.

§ 14 Ebene Bewegungen

M Die im vorigen Paragraphen wiedergegebenen Resultate betreffen im Wesentlichen die analytische Darstellung von bestimmten Kollineationstypen. Für die Elementargeometrie lassen sich daraus ebenfalls Folgerungen ziehen, aber über den Umweg der linearen Algebra. Beim Aufbau der Geometrie wird oft versucht, auch dies zu vermeiden. Wir beginnen daher nochmal von vorn,
M beschränken uns aber auf den Fall der ebenen Bewegungen.

A) "Freie Beweglichkeit"

(14.1) Definition (Ebene Bewegung)

Eine *ebene Bewegung* (ebene Kongruenzabbildung) des euklidischen Raums $A \cong EG(3,K)$ ist eine bijektive Abbildung φ