Anhang zu Kapitel III

§ 12 Bemerkungen zu den Stetigkeitsaxiomen

Von der Euklidischen Geometrie eines Vektorraums spricht man meist nur, wenn der Körper der Skalare gleich $\mathbb{R}$ ist. Nun gibt es von $\mathbb{R}$ verschiedene Körper, die geordnet und pythagoräisch sind (z.B. den Körper der reellen algebraischen Zahlen). Daher sprachen wir im vorigen Kapitel von verallgemeinerten Euklidischen Räumen. Zu denen im engeren Sinne kommen wir durch die Beschränkung von K auf $\mathbb{R}$. Diese Beschränkung läßt sich auf verschiedene Arten vornehmen. Hilbert z.B. führt folgende zwei Axiome der Stetigkeit ein:

S 1: Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom:

Sind $\overleftrightarrow{AB}$ und $\overleftrightarrow{CD}$ Strecken, so gibt es eine natürliche Zahl n derart, daß n-maliges Hintereinander-Abtragen der Strecke $\overleftrightarrow{CD}$ von A aus auf AB^{+} über den Punkt B hinausführt.

Dadurch wird K ein "archimedisch angeordneter Körper" (und Unterkörper von $\mathbb{R}$).

S 2: Axiom der linearen Vollständigkeit

"Das System der Punkte einer Geraden ist keiner Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen folgenden Grundeigenschaften der Inzidenz, der linearen Anordnung und Kongruenz und das archimedische Axiom erhalten bleiben".

Anstelle von S 2 könnte man auch ein *"Intervallschachtelungs-Axiom"* (s. Literatur zur Analysis) für eine Koordinatenachse fordern. Auch andere definierende Eigenschaften von $\mathbb{R}$ könnten, für eine Gerade von A entsprechend angepaßt, als Stetigkeitsaxiome aufgestellt werden, z.B. das *"Dedekind'sche Schnittaxiom"* oder das *Axiom der Ordnungsvollständigkeit*. (Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Punktmenge einer geordneten Geraden besitzt ein Supremum, d.h. eine kleinste obere Schranke.)
Im folgenden betrachten wir 3-dim *reelle* euklidische Räume. Da jedes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bei Auswahl einer Orthogonalbasis B eine Darstellung der Form $(x_1,x_2,x_3)_B \cdot (y_1,y_2,y_3)_B = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$ hat, sprechen wir (unabhängig vom Skalarprodukt) auch von *dem* 3-dim (reellen) euklidischen Raum EG(3, $\mathbb{R}$) (bzw. von *der* 2-dim (reellen) euklidischen Ebene EG(2, $\mathbb{R}$).)

Damit sind wir bei unserem bisherigen Ziel angelangt: Wir haben durch die ausgewählten Axiome im Wesentlichen (d.h. bis auf "Isomorphie") ein einziges Modell, nämlich im 3-Dimensionalen den 3-dim reellen euklidischen Raum EG(3, $\mathbb{R}$), im 2-Dimensionalen die reelle euklidische Ebene EG(2, $\mathbb{R}$).

(12.1) **Anmerkung zu alternativen Axiomensystemen**
Manchmal werden die reellen Zahlen schon durch ein verändertes Axiomensystem axiomatisch gefordert (z.B. beim Ansatz des Mathematikers Birkhoff).
In einem vereinfachten Axiomensystem der reellen euklidischen Ebene werden z.B. reelle Maße von Streckenlängen und Wingelgrößen gefordert:

(a) *Streckenlängenaxiom*
Jeder Strecke $\overline{PQ}$ ist eine "Länge" $|\overline{PQ}| \in \mathbb{R}_0^+$ zugeordnet derart, dass gilt:
(1) *Additivität:* $|\overline{PR}| + |\overline{RQ}| = |\overline{PQ}|$ für alle $P,Q \in \mathcal{P}$ und alle $R \in [P,Q]$.
(2) *Streckenabtragen:* Für alle $P,Q,R,S \in \mathcal{P}$ existiert genau ein $T \in PQ^+$: $|\overline{PT}| = |\overline{RS}|$.
(3) *Verhalten bei Streckungen:* Ist σ zentrische Streckung mit Streckungsfaktor k, so gilt $$|\overline{\sigma(P)\sigma(Q)}| = |k| \cdot |\overline{PQ}|.$$

(b) *Winkelgrößenaxiom:*
Es existiert eine Abbildung $|\cdot|$, genannt *Winkelmaßfunktion*, von der Menge der Winkel auf das reelle Intervall $[0,180]$ mit den folgenden Eigenschaften:
(1) *Additivität:* Ist W Summe der Winkel W_1 und W_2, so gilt $|W| = |W_1| + |W_2|$.
(2) *Winkelantragen:* Für jedes $\alpha \in [0,180]$, für jede Halbgerade p und eine zugehörige abgeschlossene Halbebene $\overline{H_1}$ existiert genau ein Winkel W mit (i) $W \subseteq \overline{H_1}$, (ii) p ist Schenkel von W und (iii) $|W| = \alpha$.

Man definiert dann Kongruenz von Strecken und Winkeln mit Hilfe der Gleichheit des Längen- bzw. Winkelmaßes, sodass dann zu jeder Strecken- bzw. Winkelgröße genau eine Maßzahl gehört. Schließlich identifiziert man wieder Streckengrößen bzw. Winkelgrößen mit ihren Maßzahlen.
Einige der Kongruenz- und Stetigkeitsaxiome können auf diese Weise ersetzt werden. Aber man benötigt dann noch das Verhalten bzgl. gewisser geometrischer Abbildungen; wir gehen darauf später ein.

Ergänzende Aufgaben zu Kap.III

(Weitere Aufgaben -mit Lösungen- findet man z.B. in §7.3/7.4 (Seiten 217-220) in meinem Buch: Repetitorium Bachelor Mathematik. Vieweg+Teubner 2010.)

Aufgabe 66

Sei $EG(3,K)$ (verallgemeinerter) euklidischer Raum. Unter welchen Bedingungen gibt es dann zu vorgegebenen Winkelgrößen α und β und zu $h \in K^+$ (mit $K^+ := \{k \in K \mid k > 0\}$ stets ein Dreieck ΔABC mit $|\sphericalangle CBA| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ und $h_A = h$. (Hierbei bezeichnet h_A die Länge der Höhe durch A in ΔABC).

Aufgabe 67

Sei $E = EG(2,\mathbb{R})$ die reelle euklidische Ebene und g eine Gerade in E. Zu g definieren wir eine Geradenspiegelung γ_g wie folgt: Für $P \in E$ ist $\gamma_g(P)$ der eindeutig bestimmte Punkt Q mit $(P,F,Q) \in Z$ und $|\overleftrightarrow{PF}| = |\overleftrightarrow{QF}|$, wobei F der Fußpunkt des Lotes von P auf g ist. Zeigen Sie:

γ_g bildet kollineare Punkte auf kollineare Punkte ab und Strecken auf kongruente Strecken.

Aufgabe 68

Seien g und h zwei parallele Geraden von $EG(2,\mathbb{R})$. Zeigen Sie (mit den Definitionen aus Aufgabe 67), daß

$$\gamma_g \circ \gamma_h \text{ Translation ist.}$$

Aufgabe 69

Definieren Sie in der euklidischen Ebene den Begriff *Kreis* um den Mittelpunkt M mit Radius $r > 0$! Zeigen Sie dann für ein solchen Kreis $\hat{K}$:

(i) Jede Gerade durch M schneidet $\hat{K}$ in genau zwei Punkten.[1)]

(ii) Jede Gerade der Ebene schneidet $\hat{K}$ in höchstens 2 Punkten.

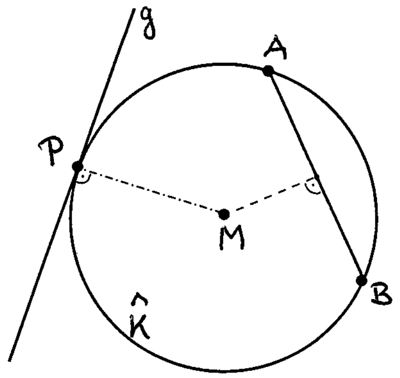
(iii) Die Mittelsenkrechte jeder *Sehne* von $\hat{K}$ (Strecke $\overline{AB}$ mit $A,B \in K$, $A \neq B$) geht durch M (s. Figur 130)

(iv) s.u.

---

1) Beachten Sie, dass man sich im Falle $K \neq \mathbb{R}$ den Kreis nicht als " geschlossene Linie" vorstellen darf: Es gibt "Lücken".

(iv) Jede *Tangente*, d.h. Gerade g mit $|g \cap \hat{K}| = 1$, mit *Berührpunkt* $P \in g \cap \hat{K}$ steht senkrecht auf PM. (S. Figur 130).



Figur 130

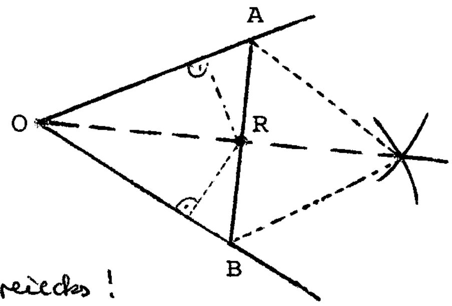
Lösungshinweis: Benutzen Sie u.a. den Satz 11.16a über die Mittelsenkrechten.

Aufgabe 70

(a) Beweisen Sie für jeden Winkel $\sphericalangle$ AOB einer euklidischen Ebene E (mit Hilfe der Kongruenzsätze) die Existenz und Eindeutigkeit der *Winkelhalbierenden*, d.h. einer Geraden OR durch O in der Ebene E mit $g(\sphericalangle \text{AOR}) = g(\sphericalangle \text{BOR})$ (s. Figur 131).

(b) Begründen Sie die in Figur 131 angedeutete Konstruktionsmöglichkeit mittels Schnittpunkt zweier Kreise.

(c) Zeigen Sie die Existenz des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden eines Dreiecks !



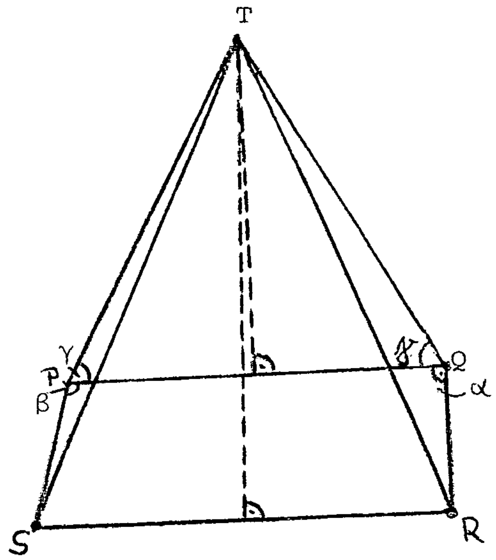
Figur 131

Aufgabe 71

Finden Sie den Fehler in folgendem "Beweis":

Seien α, β Winkelgrößen mit $\beta > \alpha = R$. Wir zeigen $\beta = R$.
Dazu tragen wir an eine Strecke $\overline{PQ}$ Winkel $\sphericalangle$ PQR und $\sphericalangle$ QPS an mit $g(\sphericalangle \text{PQR}) = \alpha$ und $g(\sphericalangle \text{QPS}) = \beta$ und $|\overline{PS}| = |\overline{QR}|$. Die Geraden PQ und RS sind nicht parallel. Die Mittelsenkrechten auf $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ schneiden sich daher in einem Punkt T (vgl. Figur 132). Ent-

sprechende Seiten der Dreiecke ΔPST und ΔQRT sind gleich lang. Die beiden Dreiecke sind daher kongruent und es gilt $\measuredangle\, TPS \equiv \measuredangle\, TQR$. Mit $\gamma = g(\measuredangle\, QPT) = g(\measuredangle\, PQT)$ folgt $\beta + \gamma = R + \gamma$ und daraus $\beta = R$.



Figur 132

Aufgabe 72

Zeigen Sie, dass in einem euklidischen Raum für die gemäß Aufgabe 18 definierte Punktspiegelung δ mit Fixpunkt Z gilt

(a) $|\overline{\delta(A)Z}| = |\overline{AZ}|$.

(Daraus und aus der Kollinearität von $A, Z, \delta(A)$ erhält man eine alternative Konstruktionsmöglichkeit).

(b) δ ist längentreu.