

§ 11 Euklidische Räume

Generalvoraussetzung:

In diesem Paragraphen sei A ein geordneter 3-dim affiner Raum (mit Schiefkörper K), in dem auch die Kongruenzaxiome gelten. Wir nennen A einen 3-dimensionalen (verallgemeinerten) euklidischen (affinen) Raum. (Achtung, manchmal heißt A nur im Falle $K = \mathbb{R}$ euklidischer Raum).

(Analoge Ergebnisse sind auch für die (verallgemeinerte) euklidische Ebene A erzielbar.)

A) Klassische Sätze (1. Teil) und Längenmaß

(11.1) Hilfssatz

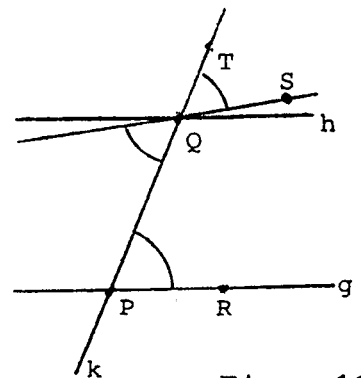
Im (euklidischen) Raum A gilt

- (i) Stufenwinkel (bzw. Wechselwinkel)¹⁾ paralleler Geraden sind kongruent.
- (ii) In einem beliebigen Dreieck ist die "Winkelsumme" gleich $2R$. (iii) Die Größe jeden Außenwinkels ist gleich der Summe der Größen der beiden nicht-anliegenden Innenwinkel.

Beweisskizze

- (i) Nach Aufgabe 52 sind freie Schenkel von kongruenten Stufenwinkeln parallel.

Trägt man daher (s. Figur 106) in der Halbebene PQR^+ einen zu $\sphericalangle RPQ$ kongruenten Winkel $\sphericalangle(QP^-, QS^+)$ an, so

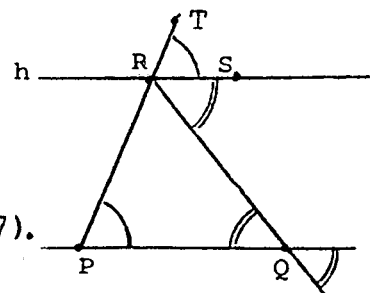


Figur 106

folgt $QS \parallel g$ und damit $QS = h$; daraus folgt die Behauptung

- (ii) Sei $\triangle PRQ$ gegeben. Wir wählen einen Punkt S auf der Parallelen h zu PQ durch R mit $S \in PRQ^+$

und einen Punkt $T \in RP^-$ (s. Fig. 107).



Figur 107

STANDARD-TRICK

1) Wechselwinkel nennt man einen Winkel und den Scheitelwinkel eines zugehörigen Stufenwinkels.

Nach (i) gilt $\overset{\alpha:=}{g}(\angle SRT) = \overset{\alpha:=}{g}(\angle QPR)$, $\overset{\beta:=}{g}(\angle QRS) = \overset{\beta:=}{g}(\angle QP^-, QR^-) = \overset{\beta:=}{g}(\angle PQR)$,
also $\overset{\gamma:=}{g}(\angle QRT) = \alpha + \beta$ (wegen $RQ^+ \subseteq RSQ^+$ und $RT^+ \subseteq RSQ^-$).

Ferner sind $\angle QRT$ und $\angle QRP$ Nebenwinkel, woraus die Behauptung folgt. \square

(11.2) Folgerung

- (1) Sind P, Q, R, S Ecken eines nicht-ausgearteten Parallelogramms in A , d.h. gilt $P, Q, R, S \in \mathcal{P}$ mit $PQ \parallel RS$ sowie $PS \parallel QR$ und P, Q, R, S nicht-kollinear, dann folgt $\overline{PQ} \cong \overline{SR}$ und $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.
- (2) Jede Translation von A führt jede Strecke in eine kongruente Strecke und jeden Winkel in einen kongruenten Winkel über.

Aufgabe 60: Beweisen Sie Folgerung (11.2).

Die Ordnung in Raum A wird gemäß 7.4 und 7.5 durch eine Ordnung des Schiefkörpers K widerspiegelt. Es liegt nun nahe, die Menge L der Streckenlänge durch die Menge der nicht-negativen Elemente aus K zu repräsentieren und zu untersuchen, welche Folgerung für K aus den Kongruenzaxiomen gezogen werden kann.

(11.3) Einführung eines Längenmaßes

Wir wählen im euklidischen Raum A mit Koordinatenschiefkörper K einen Nullpunkt N , einen Punkt $E > N$ und als Bezugshalbgerade $p^* = NE^+$. Wir identifizieren die Punkte mit ihren Ortsvektoren bezüglich N . Ist e der Ortsvektor von E , so gilt $p^* = \{ke \mid k \in K \text{ mit } k \geq 0\}$ (vgl. 7.4). Zu jeder Strecke \overline{AB} gibt es eine kongruente Strecke $\overline{NB'} \subseteq NE^+$. Dann existiert ein $k \geq 0$, derart, daß $B' = ke$ ist. Wir ordnen

daher der Klasse $\ell(\overline{AB}) = \ell(\overline{NB'}) = \ell(\overline{ok\bar{e}})$

als Maßzahl das Element k zu, also

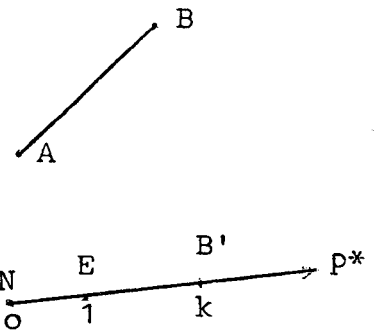
denjenigen Multiplikator

$k \in K_0^+ = \{k \in K \mid k \geq 0\}$, der E auf B'

abbildet; vgl. Figur 108!

Schreibweise: $k = |\ell(\overline{AB})|$ bzw.

kürzer $k = |\overline{AB}|$.



Figur 108

Auf diese Weise wird p^* zum Maßstab mit Einheitsstrecke

\overline{NE} . Das Längenmaß ist dabei abhängig von \overline{NE} . Nach 7.4

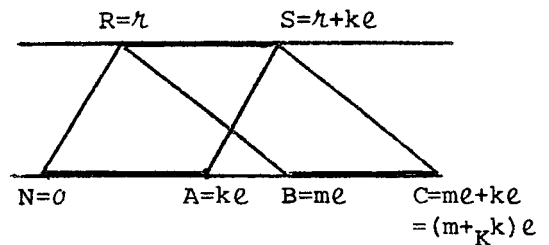
und 10.2 gilt $\ell(\overline{ok\bar{e}}) <_L \ell(\overline{om\bar{e}})$ genau dann, wenn $k <_K m$,

also $|\overline{ok\bar{e}}| <_K |\overline{om\bar{e}}|$ ist. Auch die Addition auf L (s. 10.3)

entspricht der Addition auf K :

Seien $k, m \in K_0^+$ und $A = ke$, $B = me$.

Nach (11.2) folgt (s. Figur 109)



$|\overline{NA}| = |\overline{RS}| = |\overline{BC}|$ und daraus

$\ell(\overline{NA}) +_L \ell(\overline{NB}) = \ell(\overline{NB}) +_L \ell(\overline{BC}) = \ell(\overline{NC})$

und $|\overline{NA}| +_K |\overline{NB}| = k +_K m = |\overline{NC}|$

Figur 109

(Dabei ist $B \in [N, C]$ wegen $m +_K k > m$ und

der Entsprechung von $<_L$ und $<_{K_0^+}$).

Wir fassen zusammen:

$ \overline{AB} <_K \overline{CD} \Leftrightarrow \ell(\overline{AB}) <_L \ell(\overline{CD})$
$ \ell(\overline{AB}) +_L \ell(\overline{CD}) = \overline{AB} +_K \overline{CD} $

Im folgenden werden wir nun nach fester Auswahl einer Einheitsstrecke die Länge einer Strecke mit ihrem Maß identifizieren, also $L = K_0^+$ setzen.

Aufgabe 61

Zeigen Sie für einen 3-dim euklidischen Raum:

(a) Jede Translation τ ist "längentreu", d.h. es gilt

$$\ell(\overline{\tau(A)\tau(B)}) = \ell(\overline{AB}).$$

(b) Für die zentrische Streckung σ mit Zentrum R und Streckfaktor k^* gilt im Falle $k \geq 0$:

$$|\overline{R\sigma(A)}| = k|\overline{RA}| \quad \text{für alle } A \in \mathcal{P}.$$

(c) Die zentrische Streckung σ mit Zentrum R und Streckfaktor k bildet die Halbgerade RQ^+ im Falle $k > 0$ auf RQ^+ , im Fall $k < 0$ auf RQ^- ab.

(d) Welche Folgerung kann man aus b) und c) für eine zentrische Streckung σ für $TV(R, A, \sigma(A))$ ziehen? (Beachten Sie die folgende Definition des Teilverhältnisses !)

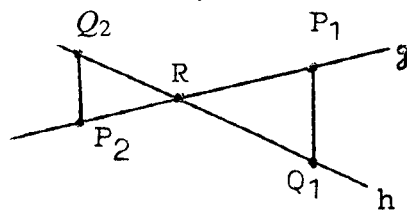
(11.4) Definition Teilverhältnis

Seien P_1, P_2, R verschiedene kollineare Punkte. Dann heißt

$TV(R, P_2, P_1) := S(P_1, R, P_2) \cdot |\overline{RP_2}| \cdot |\overline{RP_1}|^{-1}$ das Teilverhältnis von (R, P_2, P_1) .

(Beachten Sie, daß gemäß der Definition von S das Teilverhältnis von (R, P_2, P_1) negativ ist, wenn R zwischen P_1 und P_2 liegt.

(vgl. Figur 109).



Figur 109

Aufgabe 62

(a) Zeigen Sie folgenden 1. Strahlensatz

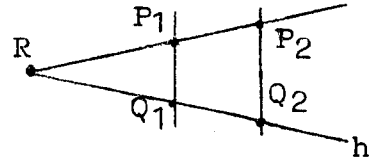
Sind g, h Geraden in A mit $g \cap h = \{R\}$ und $P_1, P_2 \in g \setminus \{R\}$, $Q_1, Q_2 \in h \setminus \{R\}$. Dann gilt

$$\frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_1} \parallel \frac{P_2 Q_2}{P_1 Q_2} \Leftrightarrow TV(R, P_2, P_1) = k = TV(R, Q_2, Q_1).$$

*) d.h. die Abbildung von A , die für Ortsvektoren die Darstellung $\varphi \rightarrow k(\varphi - r) + r$ hat, wobei r der Ortsvektor von R ist.

Lösungshinweis: Beweisen Sie die Äquivalenz beider Teilaussagen zu folgender Aussage: Die zentrische Streckung σ mit Zentrum R und Streckfaktor k bildet P_1 auf P_2 und Q_1 auf Q_2 ab (vgl. Figuren 109 und 110).

Figur 110



(b) Zeigen sie den folgenden 2. Strahlensatz:
Unter den Voraussetzungen von (a) gilt:

$$P_1Q_1 \parallel P_2Q_2 \Rightarrow \frac{\overline{P_1R}}{\overline{P_2R}} = \frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{P_2Q_2}}$$

Anmerkung: Die Umkehrung ist i.A. falsch. Gegenbeispiel?

(c) Zeigen sie für eine Linse (s. Figur 4) die Gleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b'}$$

(wobei f, g bzw. b' der Abstand der Punkte F, P, P' vom Linsenmittelpunkt bezeichnen.)

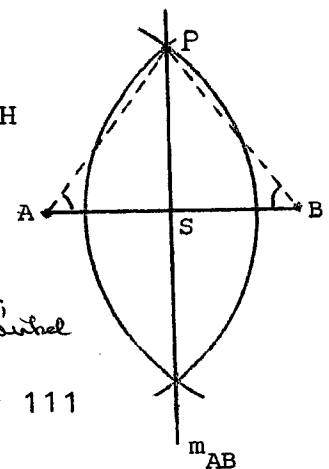
(11.5) Satz: Für jede Ebene H in A und $A \neq B$ gilt:

(a) Die Mittelsenkrechte m_{AB} einer Strecke $\overline{AB} \subseteq H$, d.h. das Lot in H auf \overline{AB} im Mittelpunkt S von \overline{AB} , besteht aus allen Punkten $P \in H$ mit $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$.

Beweis: Dass die Punkte von m_{AB} die angegebene Eigenschaft haben, folgt aus dem Kongruenzsatz SWS. Sei umgekehrt P Punkt von H mit $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$. Dann ist $P = S$

oder es gilt $\triangle ASP \equiv \triangle BSP$ (nach Kongruenzsatz SWS). \square

($|\overline{AS}| = |\overline{BS}|$, da S Mittelpunkt; Basismittel in gleichschenkel. Dreiecke kongruent; $\sphericalangle ASP$ zum Nebenwinkel kongruent.)
von m_{AB} s. Figur 111).



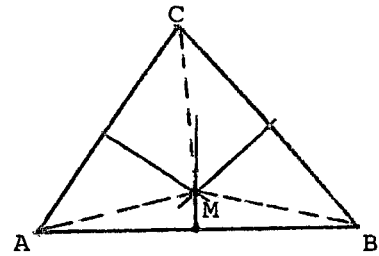
Figur 111

Mittellotensatz

(b) Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks $\triangle ABC$ schneiden sich in einem Punkt.

Beweis (s. Figur 112)

Die Mittelsenkrechten sind nicht parallel, da sonst die entsprechenden Seiten parallel wären (Stufenwinkel!)



Daher schneiden sich m_{AB} und m_{AC} in einem Punkt M. Figur 112

Nun ist nach (a) $|\overline{MB}| = |\overline{MA}| = |\overline{MC}|$, und damit, nochmals

nach (a), $M \in m_{BC}$.

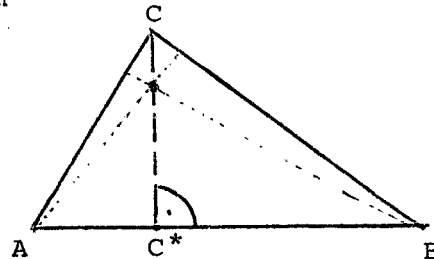
□

(c) Höhenschnittpunktsatz

Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Dabei heißt $\overline{CC^*}$ (oder auch CC^*) die Höhe durch C im Dreieck ΔABC , wenn C^* der Fußpunkt des Lots von C auf AB ist

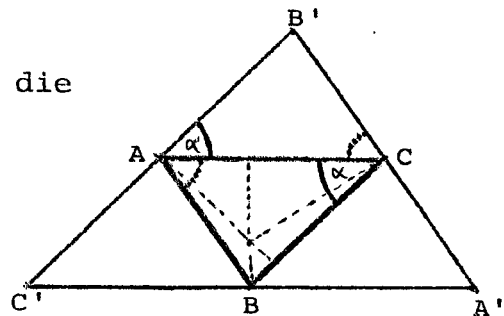
(s. Figur 113).



Figur 113

Beweis

Man zieht durch jede Ecke von ΔABC die Parallele zur gegenüberliegenden Seite, Es entsteht ein Dreieck $\Delta A'B'C'$.



Figur 114

Aus der Kongruenz von Wechselwinkeln (s. 11.1)

an Parallelen folgt $\sphericalangle B'AC \cong \sphericalangle ACB$

und $\sphericalangle B'CA \cong \sphericalangle CAB$. Die Dreiecke $\Delta AB'C$ und ΔCBA sind also kongruent, insbesondere gilt $|\overline{AB'}| = |\overline{CB}|$. Analog folgt $\overline{AC'} \cong \overline{BC}$. Der Punkt A ist also Mittelpunkt von $\overline{B'C'}$ und die Höhe von ΔABC durch A ist Mittelsenkrechte von $\overline{B'C'}$.

Die Behauptung folgt nun mit Teil (b).

□

B) Der Koordinatenschiefkörper (1. Teil)

Nun können wir eine weitere Eigenschaft des A zugrundeliegenden Schiefkörpers beweisen:

(11.6) Satz

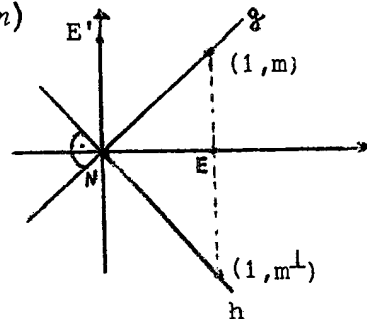
Der Koordinatenschiefkörper von A ist kommutativ

Beweis* (nach R.Baer; s. auch Degen u. Profke: Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie; dieser Beweis ist einfacher als der von Hilbert angedeutete).

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

- (a) Sei H eine Ebene in A . Dann ist $H \cong AG(2, K)$ mit Schiefkörper K ; zusätzlich sind Ordnungs- und Kongruenzrelationen, insbesondere "Senkrechtstehen" von Geraden definiert. Nach (§ 9) und (11.1) bilden die zu einer Geraden g von H senkrechten Geraden genau eine Parallelschar.

Wir wählen nun ein Koordinatensystem (N, E, E') mit $NE \perp NE'$ und $|NE| = |NE'| = 1$ und gehen von den Punkten zu ihren Koordinatenpaaren über. Jede von NE' verschiedene Gerade g durch N hat dann die Form $g = \{(x, y) \in K^2 \mid (x, y) = x(1, m)\}$. Die Gleichung von g ist also $y = xm$. Wir nennen m die Steigung (den Steigungskoeffizienten) von g . Zu g gibt es, wie bemerkt, genau eine Gerade $h = g^\perp$ mit $N \in h$ und $h \perp g$. Der Steigungskoeffizient von h sei m^\perp .



Figur 115

Die Abbildung $f : K^* := K - \{0\} \rightarrow K^*$ mit $m \mapsto m^\perp$ ist dann bijektiv (zu jeder Geraden $g \neq NE, NE'$ gibt es genau ein $h = g^\perp$ mit $N \in h \neq NE, NE'$) und involutorisch, d.h. es gilt $f^2 = id_{K^*}$ (wegen $(g^\perp)^\perp = g$).

- (b) Wir zeigen nun, dass für $u, v, r, s \in K^*$ gilt:

(*) $ru = sv \Leftrightarrow r v^\perp = s u^\perp$

- (i) Sei o.B.d.A. $r \neq s$, und gelte $ru = sv$.

Wir betrachten ΔRST mit $R = (-r, 0)$, $S = (-s, 0)$ und $T = (0, t)$ mit $t = ru = sv$ (s. Figur 116).

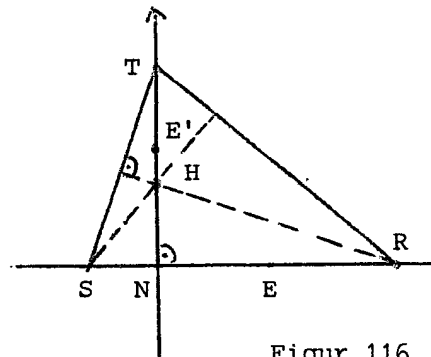
Die Gleichung von RT ist $y - xu = t$; dies folgt durch Einsetzen von $(-r, 0)$ und $(0, t)$. Analog erhalten wir als Gleichung von ST :

$$y - xv = t.$$

Die Höhe von ΔSRT durch S bzw. R hat daher die Steigungen u^\perp bzw. v^\perp . Ihre Gleichung lautet daher

$$y - x u^\perp = s u^\perp \quad \text{bzw.}$$

$$y - x v^\perp = r v^\perp.$$



Figur 116

Da sich die Höhen von ΔSRT in einem Punkt H schneiden, der wegen $TN \perp SR$ auf TN liegt, folgt $s u^\perp = r v^\perp$, wie behauptet.

- (ii) Ist umgekehrt $r v^\perp = s u^\perp$, so wenden wir (i) auf die Elemente $r, s, u' = v^\perp, v' = u^\perp$ an und erhalten aus $ru' = sv'$ sofort $ru^{\perp\perp} = sv^{\perp\perp}$ und daraus $ru = sv$. Damit ist (*) bewiesen.

- (c) Setzen wir $r = v = a$ und $s = u = 1$, so folgt aus (*) unmittelbar $a \cdot a^\perp = 1^\perp$. Das Produkt $a \cdot a^\perp$ ist also konstant für alle $a \in K^*$ 1)
- (d) Nun beweisen wir das Kommutativgesetz $a \cdot b = b \cdot a$ für $a, b \in K$. Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist die Behauptung richtig. Seien also $a, b \neq 0$. Dann liefert (*) mit $aa^\perp = bb^\perp$ sofort $a \cdot b = b \cdot a$. \square

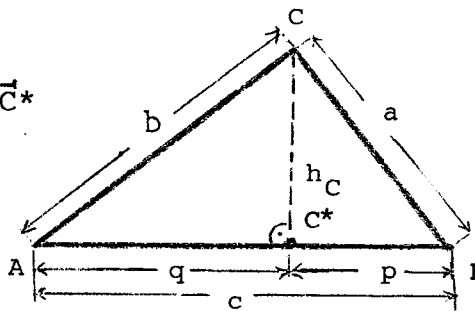
C) Klassische Sätze (2. Teil)

Nun können wir einige klassische Sätze über rechtwinklige Dreiecke (aus der Satzgruppe des Pythagoras) beweisen.

(11.7) Definitionen

- (a) Ein Dreieck, in dem (als Innenwinkel) ein rechter Winkel auftritt, heißt rechtwinkliges Dreieck. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, nennen wir Hypotenuse, die beiden anderen Seiten Katheten.

- (b) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei C^* der Fußpunkt des Lots von C auf AB . Wie schon definiert heißt $\overline{CC^*}$ die Höhe durch C , im Falle $\angle ACB = R$ die Hypotenusenhöhe



Figur 117

- (c) Ist $\angle ACB = R$, so heißen die Strecken $\overline{AC^*}$ und $\overline{C^*B}$ die Hypotenusenabschnitte.

- (d) Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$a := |\overline{BC}|, \quad b := |\overline{AC}|, \quad c = |\overline{AB}| \quad \text{und}$$

$$q = |\overline{AC^*}|, \quad p = |\overline{C^*B}|, \quad h_c = |\overline{CC^*}| \quad (\text{vgl. Figur 117}).$$

Nun gilt:

1) Man vergleiche dies mit der Formel $m \cdot m^\perp = -1$ der reellen euklidischen Geometrie (mit kanonischem Skalarprodukt).

(11.8) Kathetensatz (Euklid)

In jedem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ von A gilt $b^2 = c \cdot q$,
 d.h. das Quadrat der Länge¹⁾ einer Kathete ist gleich dem
 Produkt der Länge der Hypotenuse und der Länge des an-
 liegenden Hypotenusenabschnittes (vgl. Figur 118).

Beweis (a) Da nach (11.1)(ii)

$$\varphi = g(\sphericalangle ACB) = g(\sphericalangle BAC) + g(\sphericalangle ABC) \stackrel{= \alpha + \beta}{\text{gilt}}$$

(auch der Außenwinkel bei C ist ein rechter Winkel) folgt $g(\sphericalangle ACB) > g(\sphericalangle ABC)$

und daraus $c > b$.²⁾ Der analoge Figur 118

Schluss, auf $\triangle AC^*C$ angewandt,

zeigt $b > q$; insgesamt erhalten

wir $c > q$ und analog $c > p$.

Daher liegt C^* zwischen A und B und es ist $c = p + q$.

(b) Sei $E \in AB^+$ mit $\overline{AE} \cong \overline{AC}$ und $F \in AC^+$ mit $\overline{AF} \cong \overline{AB}$ gewählt (s. Fig. 119)

Nach dem Kongruenzsatz SWS folgt

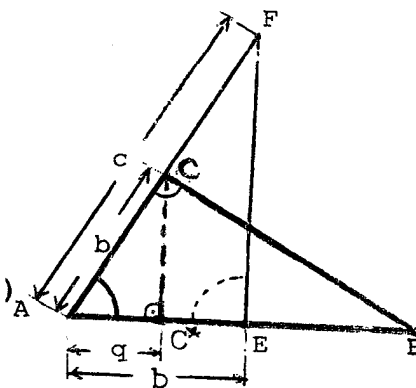
$\triangle ABC \cong \triangle AFE$, insbesondere also

$g(\sphericalangle AEF) = R$ und $EF \parallel CC^*$ (kon-
 gruente Stufenwinkel).

Nach dem 1. Strahlensatz (Aufgabe 62)

folgt $c \cdot b^{-1} = b \cdot q^{-1}$, d.h. nach (11.6)

$$b^2 = c \cdot q.$$



□ Figur 119

Für die 2. Kathete erhält man $a^2 = c \cdot p$, insgesamt also

$a^2 + b^2 = c(p + q)$. Wie im vorigen Beweis gesehen, ist aber

$p + q = c$. Damit haben wir einen Beweis des folgenden Korol-

lars:

Korollar:

2) Also: In jedem rechtwinkligen Dreieck hat die Hypotenuse eine größere Länge als jede der beiden Katheten.

1) Vereinfachte Sprech- und Schreibweise: eigentlich des Maßes der Länge²⁾; ob es sich um das "Maß der Länge" oder "die Länge" handelt, wird jeweils aus dem Zusammenhang klar.

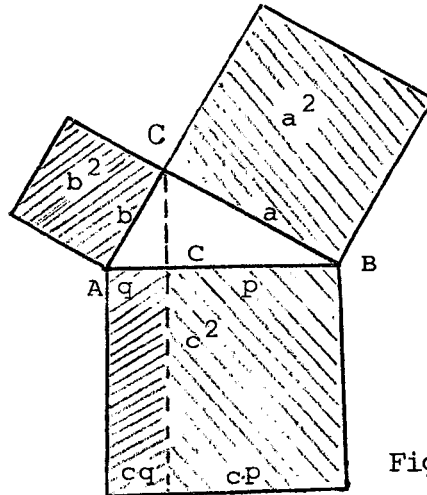
(11.9) Satz des Pythagoras (s. Figur 120)

Ist $\triangle ABC$ rechtwinkliges Dreieck in A mit $g(\sphericalangle ACB) = R$, so gilt $|\overline{AC}|^2 + |\overline{CB}|^2 = |\overline{AB}|^2$, also $a^2 + b^2 = c^2$.

Aufgabe 63

Beweisen Sie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras: Gilt für ein Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, so ist es rechtwinklig.

Lösungshinweis: Benutzen Sie den Kongruenzsatz SSS.



Figur 120

Interpretation des Satzes des Pythagoras

Wenden wir schließlich 11.8 und 11.9 auf $\triangle ABC$ und $\triangle CC^*B$

an, so folgt $a^2 = h_c^2 + p^2$ nach

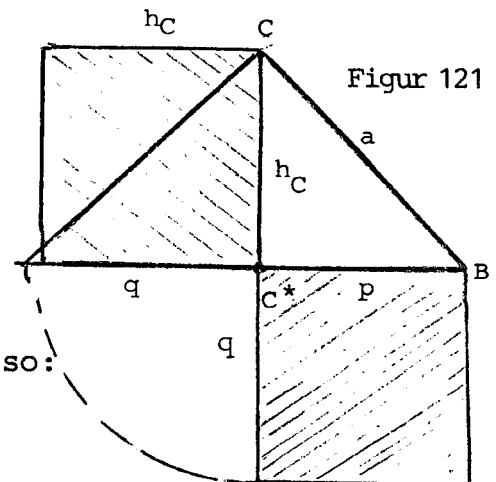
dem Satz des Pythagoras und

$a^2 = cp$ nach dem Kathetensatz,

insgesamt also

$$h_c^2 = a^2 - p^2 = cp - p^2 = p(c - p) = p \cdot q.$$

Wir erhalten als weitere Folgerung also:



Figur 121

Interpretation des Höhensatzes

(11.10) Höhensatz (Euklid)

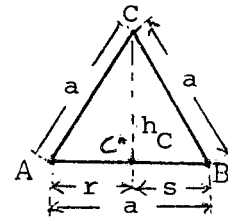
Im rechtwinkligen Dreieck gilt für die Länge h_c der Hypotenusenhöhe und die Längen q, p der beiden Hypotenusenabschnitte die Gleichung

$$h_c^2 = p \cdot q$$

(11.11) Anwendungsbeispiele für die Satzgruppe des Pythagoras

(i) Für jede Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$ mit Seitenlänge $a = b = c$ gilt $h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$. (Hierbei ist $\sqrt{3}$ die eindeutig bestimmte positive Zahl y mit $y^2 = 3$.)

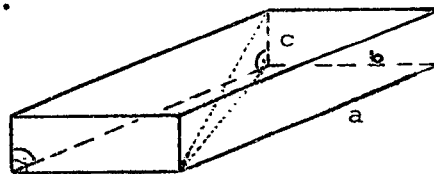
Beweis (s. Figur 122): Nach Satz 11.5a ist der Fußpunkt C^* der Höhe durch C Mittelpunkt von \overline{AB} . Aus 11.9 folgt $h_C^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = 3 \cdot (\frac{a}{2})^2$. Damit ist $3 = [h_C (\frac{a}{2})^{-1}]^2$ Quadrat¹⁾ und $h_C = \frac{a}{2} \sqrt{3}$. □



Figur 122

(ii) Die Raumdiagonale (Definition ?) eines Quaders (Definition ?) mit Seitenlängen a, b, c hat die Länge $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, die eines Würfels also Länge $d = a\sqrt{3}$.

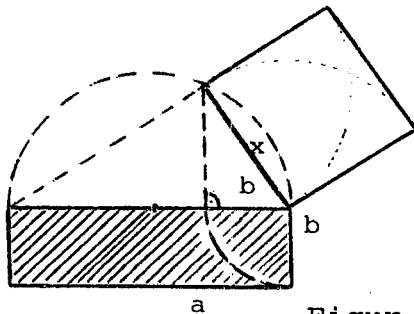
Beweis (s. Figur 123)...



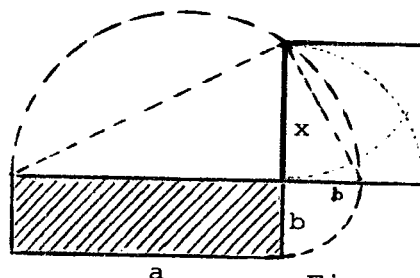
Figur 123

M

(iii) Flächenverwandlung mit Hilfe von Katheten- bzw. Höhensatz (bei geeigneter Definition von Fläche und Flächenmaß - im Falle der Existenz des Schnittpunktes von Höhe und "Halbkreis") s. Figuren 124 und 125 !



Figur 124

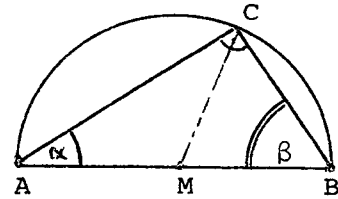


Figur 125

M

1) $y^2 - 3 = 0$ hat höchstens zwei Lösungen, und davon ist eine negativ, also ist $\sqrt{3}$ eindeutig bestimmt.

Bei vorhergehendem Beispiel ^{zu (ii)} wird der Satz von Thales benutzt:



Figur 126

Aufgabe 64

Beweisen Sie den Satz des Thales
(vgl. Figur 126)

In A gilt: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

Dabei heißt \sphericalangle ACB Winkel im Halbkreis, wenn ein $M \in]A, B[$ existiert mit $|\overline{MA}| = |\overline{MB}| = |\overline{MC}|$. Insbesondere ist M Mittelpunkt von \overline{AB} (und "Zentrum" des erwähnten "Halbkreises").

D) Koordinatenkörper (2. Teil)

Seien $a, b \in K$. Tragen wir auf den Schenkeln eines rechten Winkels Strecken der Länge a bzw. b ab, so folgt für die Hypotenuse c des so entstehenden Dreiecks die Gleichung $c^2 = a^2 + b^2$. Mit a^2 und b^2 ist also auch $a^2 + b^2$ ein Quadrat.

(11.12) Definition

Ein (Schief-) Körper heißt *pythagoräisch*, falls die Summe zweier Quadrate wieder ein Quadrat ist.¹⁾

Aus 11.5 und 11.8 folgt also:

(11.13) Satz

Ist A ein euklidischer Raum über K , so ist K geordneter, kommutativer, pythagoräischer Schiefkörper.

(Entsprechendes gilt für eine desarguesche euklidische Ebene A .)

In Aufgabe 50 hatten wir für $AG(3, \mathbb{R})$ eine Kongruenz von Strecken und Winkeln mit Hilfe des kanonischen Skalarprodukts definiert. Im allgemeinen Fall ist daher die Frage nach einem Skalarprodukt naheliegend.

¹⁾ Beispiel eines von \mathbb{R} verschiedenen pythagoräischen Körpers : Körper der reellen algebraischen Zahlen mit von \mathbb{R} induzierter Anordnung.

(11.14) Definition (Skalarprodukt)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $K \neq \mathbb{C}$. Eine *symmetrische Bilinearform* auf V ist eine Abbildung $\Phi : V \times V \rightarrow K$ mit

$$\Phi(k_1 x_1 + k_2 x_2, y) = k_1 \Phi(x_1, y) + k_2 \Phi(x_2, y) \quad (\text{Linearität in der 1. Komponente})$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad (\text{Folge: Linearität in der 2. Komponente}).$$

(für alle $x, y \in V, k_1, k_2 \in K$.)

Φ heißt *Skalarprodukt* (inneres Produkt), falls zusätzlich $\Phi(x, x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt (positive Definitheit).

Für $\Phi(x, y)$ schreibt man meist kurz $x \cdot y$ oder $\langle x, y \rangle$

Motiviert durch Eigenschaften des kanonischen Skalarprodukts auf \mathbb{R}^3 gehen wir wie folgt vor:

(11.15) Definition und Eigenschaften (Kongruenzrelationen und Skalarprodukt)

(a) Im 3-dim euklidischen Raum \mathcal{E} setzen wir nach Auszeichnung eines Nullpunktes ~~für~~ den zugrundeliegenden Vektorraum V (der Ortsvektoren) ~~(N und eines Einheitspunktes E (vgl. 11.3))~~

(i) $x \cdot x := \|x\|^2 := \left| \overrightarrow{Ox} \right|^2 \quad \text{für } x \in V$

und

(ii) $x \cdot y := \frac{1}{2} [(x+y) \cdot (x+y) - x \cdot x - y \cdot y] \quad \text{für } x, y \in V.$

(b) Anmerkung: Für $x = y$ stimmen (i) und (ii) überein (man beachte 11.3); weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung (s. Aufgabe 63)

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow g(x \text{ O}y) = R$$

(c) Die gemäß (a) definierte Abbildung $\Phi : V \times V \rightarrow K$ mit $\Phi(x, y) = x \cdot y$ ist ein Skalarprodukt.

Beweisandeutung:*

Symmetrie und positive Definitheit folgt sofort aus der Definition, die Linearität in der 1- Komponente aus $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

und $x \cdot y = x \cdot y_x$ ¹⁾, wobei y_x die "Orthogonalprojektion" von y auf $g = OX$ bezeichnet (d.h. die Parallelprojektion längs einer zu g senkrechten Geraden in der Ebene Oxy), sowie aus $(y+z)_x = y_x + z_x$ (s. Figuren 127 und 128) und $\|\lambda y_x\| = |\lambda| \|y_x\|$.

Aufgabe 65

Zeigen Sie für die Orthogonalprojektion y_x von y auf Ox , dass $x \cdot y_x = \|x\| \cdot \|y_x\|$ gilt, falls x und y_x gleichgerichtet sind, und $x \cdot y_x = - \|x\| \cdot \|y_x\|$ andernfalls.

1) Alternativ lässt sich ein Skalarprodukt durch $x \cdot y := x \cdot y_x$ und geeignete Definition von $x \cdot y_x$ (vgl. Aufg. 65) einführen.

(d) Wegen $|\overline{uv}| = |\overline{ov-u}| = \|v-u\|$ folgt nun

$$(*) \quad \boxed{\overline{uv} \equiv \overline{rs} \Leftrightarrow \|v-u\| = \|r-s\|}$$

Um die Kongruenz von Winkeln mit dem oben eingeführten Skalarprodukt zu beschreiben, beachten wir

$$\angle v u w \equiv \angle (v-u, 0, w-u) = \left\langle \frac{v-u}{\|v-u\|}, 0, \frac{w-u}{\|w-u\|} \right\rangle.$$

Es reicht also, Winkel $\angle x o y$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\angle x' o y'$ mit $\|x'\| = \|y'\| = 1$ zu betrachten.

Die Länge der Orthogonalprojektion y_x bestimmt (wegen $\|\overline{oy}\| > \|\overline{oy_x}\|$) nach

Kongruenzsatz SsW das Dreieck $\Delta o y_x y$

bis auf Kongruenz und damit die Größe von $\angle y_x o y$. Es gilt also (Fig. 127, 128):

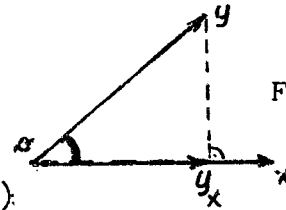
$$\angle y_x o y \equiv \angle y'_x o y' \Leftrightarrow \|y_x\| = \|y'_x\|.$$

Nach Aufgabe 65 erhält man (für y_x, x und y'_x, x' jeweils gleich- oder jeweils entgegengesetzt gerichtet)

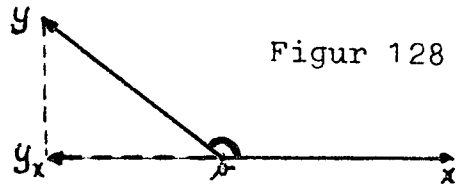
$$\angle x o y \equiv \angle x' o y' \Leftrightarrow x \cdot y = x' \cdot y'.$$

Für beliebige Winkel folgt

$$(**) \quad \boxed{\angle v u w \equiv \angle s r t \Leftrightarrow \frac{(v-u) \cdot (w-u)}{\|v-u\| \cdot \|w-u\|} = \frac{(s-r) \cdot (t-r)}{\|s-r\| \cdot \|t-r\|}}$$



Figur 127



Figur 128

Daher ist die Strecken- und Winkelkongruenz schon durch das unter (a) definierte Skalarprodukt festgelegt. Die Untersuchung der möglichen Kongruenzrelationen eines euklidischen Raumes läuft daher auf die Untersuchung der möglichen Skalarprodukte des zugrundeliegenden Vektorraums hinaus. Für $K = \mathbb{R}$ ist diese z.B. vollständig geleistet.

Umgekehrt gilt:

(11.16)a) Satz

Sei K ein geordneter pythagoräischer Körper. Dann existiert auf K^3 ein Skalarprodukt, und jedes Skalarprodukt macht den gemäß 7.4 geordneten affinen Raum $AG(3, K)$ durch die Festsetzungen von Kongruenzrelationen analog zu (*) und (**) zu einem Euklidischen Raum.

Beweisandeutung:

Ist (e_1, e_2, e_3) eine Basis von K^3 , dann definieren wir für

$$x = \sum_{i=1}^3 k_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^3 m_i e_i \quad \text{das Produkt } x \cdot y := \sum_{i=1}^3 k_i m_i. \quad \text{U.a. wegen}$$

$x \cdot x = \sum_{i=1}^3 k_i^2 > 0$ für $x \neq 0$ ist ein Skalarprodukt gegeben. Die weiteren

Behauptungen folgen analog zu Aufgabe 50

□

b) Definition:

Wählen wir als Skalarprodukt auf K^3 das kanonische

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \sum_{i=1}^3 x_i y_i,$$

so bezeichnen wir den gemäß (11.16a) bestimmten Euklidischen Raum mit EG(3, K).

(11.17) Zusammenfassung

- | |
|--|
| <p>(i) Die Schiefkörper, die den 3-dim. (verallgemeinerten) Euklidischen Räumen zugrundeliegen, sind genau die geordneten pythagoräischen Körper.</p> <p>(ii) Die Kongruenzrelationen (und davon induzierte metrische Strukturen) Euklidischer Räume sind durch die Skalarprodukte der zugehörigen Vektorräume bestimmt.</p> |
|--|

Bekanntlich ist der Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen nicht pythagoräisch ($\sqrt{1+1} \notin \mathbb{Q}$). Geometrisch gesehen bedeutet dies z.B., dass das Streckenabtragungssaxiom nicht erfüllt ist:

Es kann die Diagonale des Einheitsquadrats nicht auf einer Koordinatenachse von $AG(3, \mathbb{Q})$ abgetragen werden¹⁾, da $\sqrt{2}$ nicht rational ist und daher an der entsprechenden Stelle der \mathbb{Q} -Zahlengeraden eine Lücke ist. Analog gilt

für die Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 (vgl. 11.11i), sowie für die Diagonale im regelm. 5 Eck.

Zu dieser Stelle man:
(Diese Problematik brachte die Pythagoräer in große Ver-

legenheit, da eine ihrer Theorien war, die Welt lasse sich durch (natürliche) Zahlen und ihre Quotienten beschreiben).

Neuere Forschung *gehen davon aus, dass die Entdeckung der Inkommensurabilität (durch Hippasos von Megapont) als Erregungszustand aufgefasst werden kann.*

E) Winkelmaß

Um auch Winkelgrößen messen zu können, wählt man eine (abgeschlossene) Bezugshalbebene H_1 mit Rand NE (vgl. 11.3). Jede Winkelgröße α besitzt dann genau einen Repräsentanten in H_1 mit Schenkel NE^+ .

1) Man sagt, dass die Diagonale und die Seite des Quadrats nicht kommensurabel sind.

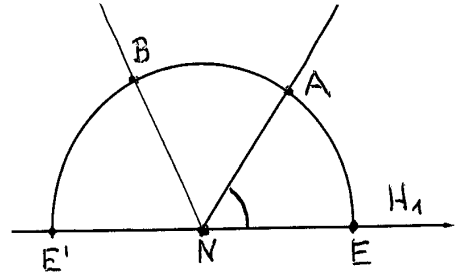
Auf dem freien Schenkel des Winkels gibt es genau einen Punkt A mit $|\overline{AN}| = 1$.

Umgekehrt gehört zu jedem Punkt B des "Einheitshalbkreises"

$$k_1 = \{x \in H_1 \mid |\overline{xN}| = 1\} \cup \{E, E'\}$$

(vgl. auch die spätere Aufgabe 69)

genau ein Winkel $\sphericalangle ENB$. (Figur 129). Damit existiert eine bijektive Abbildung zwischen den Winkelgrößen einerseits (einschließlich Null- und gestreckten Winkeln) und den Punkten des Einheitshalbkreises k_1 (einschließlich der beiden Randpunkte E und E').



Figur 129

Beispiele: Zum Nullwinkel gehört der Punkt E, zum gestreckten der Punkt E'. Nun möchte man Winkelgrößen mit Elementen aus dem Körper K messen. Gesucht ist also eine injektive Abbildung von k_1 in K, bei der zusätzlich die mögliche Winkeladdition der Addition von Elementen aus K entspricht.

Unter mehreren Möglichkeiten dieser Abbildung ist für die reelle euklidische Geometrie neben dem Grad-Maß wohl das Bogenmaß bekannt, bei dem - anschaulich gesprochen - der Winkelgröße $\alpha = g(\sphericalangle ENA)$ die "Länge $|\alpha|$ des Bogens \widehat{EA} " zugeordnet wird.

Eine exakte Einführung erfordert größeren Aufwand. Wir vermerken nur $|R| = \frac{\pi}{2}$, $|2R| = \pi$ und die Umrechnung:

$$|\alpha| = x \text{ [im Bogenmaß]} \hat{=} |\alpha|^{\circ} = x \cdot \frac{180}{\pi} \text{ [im Gradmaß]}.$$

Literaturhinweis: Degen/Profke : Grundlagen der affinen und euklidischen Geometrie

Lenz : Grundlagen der Elementargeometrie.

Man kann sich aber auch auf Eigenschaften der cos-Funktion und des Skalarprodukts zurückziehen und nach Übergang zu Ortsvektoren e, a von E, N und A definieren

$$|\alpha| = |g(\sphericalangle ENA)| := \arccos(e \cdot a) \quad (\text{mit } \|e\| = 1 = \|a\|).$$