Über den Cantor-Bernsteinschen Äquivalenzsatz

Von Wolfgang Rautenberg in Berlin

2007 überarbeitete Fassung des gleichnamigen Artikels aus Mathematische Semesterberichte, Band XXXIV (1987)

Zusammenfassung. Abschnitt 1 enthält bekannte und weniger bekannte historische Anmerkungen und den vermutlich einfachsten Beweis des zum Äquivalenzsatz gleichwertigen Zwischenmengensatzes. Abschnitt 2 enthält zwei weitere sehr einfache neue Beweise dieses Satzes ohne Verwendung natürlicher Zahlen. Diese Beweise verlaufen ohne Benutzung von Unendlichkeits- oder Potenzmengenaxiom. Der letzte Beweis kann überdies problemlos auf Klassen verallgemeinert werden. Der Abschnitt 3 präsentiert einen weiteren Beweis durch Anwendung eines Fixpunktsatzes. Abschnitt 5 enthält Anwendungsbeispiele des Äquivalenzsatzes für Klassen. Die Abschnitte 4 und 5 richten sich an den in der Mengenlehre hinreichend geschulten Leser, während die Abschnitte 1, 2, 3 schon von Studenten ab dem zweiten Semester gelesen werden können.

Notationen. Ist $f\colon M \to N$ und $X \subseteq M$, so bezeichne $fX = \{f(x) \mid x \in X\}$ das Bild von X. Wie üblich sei $f^0(x) = x$ und $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$. Es bezeichne $f \circ g$ die Komposition der Funktionen f, g, d.h. $f \circ g(x) = f(g(x))$.

1 Historische und methodische Bemerkungen

Es gibt eine Anzahl mathematischer Sätze, insbesondere auch in der Mengenlehre, die innerhalb eines leicht überschaubaren Begriffsystems formulierbar sind, ohne dass ein Beweiszugang auf Anhieb ersichtlich ist. Der eigenartige Reiz der Fragestellung und ihrer Beantwortung sichert solchen Sätzen fortwährendes Interesse. Dazu gehört wohl auch der folgende sogenannte Cantor–Bernsteinsche Äquivalenzsatz, zuweilen auch Schröder–Bernsteinscher Satz genannt:

Äquivalenzsatz. *Sind A, A' Mengen und $\alpha\colon A \to A'$, $\alpha'\colon A' \to A$ injektiv, so existiert eine Bijektion $\beta\colon A \to A'$.*

In Worten: Ist A zu einer Teilmenge von A' (nämlich αA) und A' zu einer Teilmenge von A gleichmächtig, so sind A und A' gleichmächtig oder äquivalent in der auch heute noch gelegentlich benutzten Terminologie von G. Cantor (1845–1918).

Der am weitesten verbreitete Beweis stammt von dem damals 19-jährigen Studenten F. Bernstein (1878–1956), der ihn 1897 im Cantorschen Seminar in Halle vortrug. Der Satz mitsamt diesem Beweis wurde erstmals 1898 von Borel in [4] publiziert. Es gibt aber eine briefliche Äußerung Cantors, wonach dieser den Satz „schon im Jahre 1879 gehabt habe, als Bernstein erst 1 Jahr alt war". Tatsächlich hat Cantor den zum Äquivalenzsatz gleichwertigen Zwischenmengensatz 1883 expliziert formuliert und es kann durchaus sein, dass er auch einen Beweis fand, und zwar mittels der von ihm selbst entdeckten Eigenschaften der Wohlordnungen unter Benutzung der von ihm naiv unterstellten Wohlordnungsfähigkeit einer jeden Menge. Es ist nämlich ein leicht einzusehender Fakt, dass der Äquivalenzsatz trivial und seines eigentlichen Gehalts beraubt wird, wenn man die Grundeigenschaften der Wohlordnungen und das mit dem Auswahlaxiom gleichwertige Wohlordnungsprinzip voraussetzt. Wenn wir im weiteren Verlauf daher von Beweisen des Äquivalenzsatzes reden, dann nur von solchen, welche keinen Gebrauch vom Wohlordnungsprinzip machen.

Bemerkenswert ist, dass R. Dedekind (1831–1916) den Äquivalenzsatz 10 Jahre vor Bernstein nicht nur formulierte, sondern auch bewies ([6, S. 447–448], Tagebucheintrag vom 11.7.1887). Anscheinend hatte Dedekind dies vergessen, denn in einem Brief an Cantor vom 29.8.1899 heißt es ohne Bezug auf den früheren Beweis:

> Als der junge Herr Felix Bernstein mich Pfingsten 1897 in Harzburg besuchte, sprach er von dem Satze B [gemeint ist der Äquivalenzsatz] und stutzte ein wenig, als ich meine Überzeugung aussprach, dass derselbe mit meinen Mitteln (Was sind und was sollen die Zahlen?) leicht zu beweisen sei; doch kam es zu keiner weiteren Unterhaltung über seinen oder meinen Beweis. Nach seiner Abreise setzte ich mich daran und konstruierte den hier beiliegenden Beweis des offenbar mit B gleichwertigen Satzes C.

Bei dem erwähnten Satz C (publiziert in [5]) handelt es sich um den sogenannten

Zwischenmengensatz. *Ist $\alpha\colon A \to A$ injektiv und $A \supseteq B \supseteq \alpha A$, so existiert eine Bijektion $\beta\colon A \to B$.*

In Worten: Ist A zu einer Teilmenge (nämlich αA) gleichmächtig, so auch zu jeder zwischen A und αA gelegenen Menge B. Daraus folgt in der Tat der Äquivalenzsatz. Denn nach dessen Annahmen ist $\alpha''\colon A \to A$ mit $\alpha'' = \alpha' \circ \alpha$ sicher injektiv und $A \supseteq B := \alpha' A' \supseteq \alpha' \alpha A = \alpha'' A$. Der Zwischenmengensatz liefert daher eine Bijektion $\beta\colon A \to B$ und somit die Bijektion ${\alpha'}^{-1} \circ \beta$ von A auf A'. Umgekehrt ist der Zwischenmengensatz ein Spezialfall des Äquivalenzsatzes: man setze $A' = B$ und $\alpha' = \mathrm{id}_B$ (identische Abbildung). Nach diesen Vorbemerkungen ist klar, dass ein einfacher Beweis des Zwischenmengensatzes einen ebenso einfachen Beweis des Äquivalenzsatzes impliziert und umgekehrt. Der Zwischenmengensatz dient aber nicht allein dem Beweis des Äquivalenzssatzes sondern hat durchaus eigenständige Anwendungen, wie z. B. in Abschnitt 5 deutlich wird.

Auch Dedekind hat in seinem Tagebucheintrag von 1887 zuerst den Zwischenmengensatz bewiesen und den Äquivalenzsatz dann auf diesen reduziert. Nahezu dieselben Beweise wurden später unabhängig voneinander u. a. auch von G. Peano (1858–1932) [15] und E. Zermelo (1871–1953) [19] angegeben.

Bemerkung 1. Dem Umstand, dass ein Beweis des Äquivalenzsatzes erstmals 1898 publiziert wurde, darf man zumindest soviel entnehmen, dass weder Cantor noch Dedekind das Interesse eines breiten Publikums an diesem Satz vorausgesehen haben. Zermelo schreibt in seinen Anmerkungen als Herausgeber von [5, S. 451]: „Warum weder Dedekind noch Cantor sich damals zu einer Publikation dieses immerhin nicht unwichtigen Beweises entschlossen haben, ist heute nicht recht verständlich". Während der Dedekinsche Beweis von natürlichen Zahlen frei ist, verwendet der von J. König (1849–1913) angegebene, dem Bernsteinschen nahestehende Beweis [11] den Begriff der endlichen Folge. Dieser Beweis findet sich auch in dem bekannten Büchlein Halmos, Naive Set Theory, doch wird die anschaulich klare, streng genommen aber nur induktiv beweisbare Disjunktheit der dort definierten Mengen X_X und X_Y nicht erörtert. Die gut gemeinte Detailänderung in der deutschen Übersetzung des Büchleins bewirkt wegen des Gebrauchs gerade - ungerade nur eine Komplizierung eines rigorosen Beweisganges. Worauf es vor allem ankommt, ist die Klarstellung, dass der Beweis gänzlich im Rahmen der Theorie ausführbar ist. Am Rande sei vermerkt, dass der in [17] publizierte Beweis fehlerhaft ist. Daher ist die Bezeichnung Schröder-Bernsteinscher Satz kaum gerechtfertigt. Weitere historische und sachliche Bemerkungen zum Äquzivalenzssatz finden sich auch in [7] und [8], wo einige der oben zitierten Beweise auch ausgeführt werden.

Die Beweise in Abschnitt 2 verwenden ebenso wie der Dedekindsche Beweis keine natürlichen Zahlen. Dies ist schon deswegen wünschenswert, weil im Äquivalenzsatz ausschließlich von Mengen und Abbildungen die Rede ist. Darüber hinaus wird von vornherein ein mögliches Mißverständnis vermieden, so als seien die natürlichen Zahlen in Beweisen wie dem Bernsteinschen ein äußerliches, gewissermaßen logisches Hilfsmittel, welche mit den eventuell noch gar nicht definierten mengentheoretischen Zahlen nichts gemeinsam haben.

Zahlenfreie Beweise haben überdies noch einen weitereren entscheidenden Vorteil: Weder muss die Existenz von $\omega = \{0, 1, \dots\}$ als Menge der natürlichen Zahlen vorher bewiesen werden noch überhaupt beweisbar sein. Die in Abschnitt 2 vorgestellten Beweise sind nämlich unabhängig vom Unendlichkeitsaxiom und weiteren Axiomen, können also schon in einem frühen Stadium der Entwicklung der Mengentheorie als Beispiele zum Umgang mit Abbildungen ausgeführt werden. Beweise, die auf dem Vorhandensein der natürlichen Zahlen als Menge beruhen, benutzen das Unendlichkeitsaxiom und damit im vorliegenden Falle weit mehr als tatsächlich nötig. Deshalb ist zweifelhaft, ob ein Eintrag eines der in [1] oder der deutschen Übersetzung desselben Buches dargebotenen Beweise des Äquivalenzsatzes in THE BOOK gerechtfertigt ist. Kandidaten dafür sind vielmehr die Beweise in Abschnitt 2. Wen jedoch die Benutzung natürlicher Zahlen im Beweisgang nicht stört – und das ist wohl die überwiegende Anzahl der Leser ohne besonderes Interesse an Grundlagenfragen – dem empfehlen wir den folgenden durch eine kleine Änderung des Dedekinschen Beweises entstehenden Beweis 0 des Zwischenmengensatzes. Aber auch dieser verdient trotz seiner kaum zu übertreffenden Simplizitität keinen Eintrag in THE BOOK, denn er verwendet ω in der Definition von C. Dieser Beweis steht hier außer Konkurenz und hat deswegen die Nummer 0.

Beweis 0 des Zwischenmengensatzes. Für $C := \{\alpha^n(c) \mid c \in A \setminus B, n \in \omega\}$ gelten

$$(1)\ A \setminus C \subseteq B, \qquad (2)\ \alpha C \subseteq C, \qquad (3)\ B \cap C \subseteq \alpha C.$$

(1) ist klar, weil $A \setminus B \subseteq C$. (2) ist offensichtlich. Sei $b \in B \cap C$. Weil dann $b \in C$ und $b \notin A \setminus B$, ist $b = \alpha^n(c)$ für ein $c \in A \setminus B$ mit $n > 0$. Daher $b = \alpha(\alpha^{n-1}(c)) \in \alpha C$, was (3) bestätigt. Sei nun $\beta\colon A \to B$ erklärt durch $\beta(x) = \alpha(x)$ für $x \in C$ und $\beta(x) = x$ sonst (d.h. $x \in A \setminus C$) – auch dann ist $\beta(x) = x \in B$ nach (1), so dass tatsächlich $\beta A \subseteq B$. Wir behaupten, β ist bijektiv. β ist injektiv. Denn sei $x \neq y$. In den Fällen $x, y \in C$ und $x, y \in A \setminus C$ ist sicher $\beta(x) \neq \beta(y)$. Sei nun etwa $x \in C$ und $y \in A \setminus C$. Nach (2) gilt $\beta(x) = \alpha(x) \in C$, aber $\beta(y) = y \notin C$, also ebenso $\beta(x) \neq \beta(y)$. Schließlich ist β auch surjektiv, d.h. $B \subseteq \beta A$. Denn sei $b \in B$. Falls auch $b \in C$, ist $b = \alpha(a)$ für ein $a \in C$ nach (3). Daher $b = \alpha(a) = \beta(a) \in \beta A$. Falls aber $b \in A \setminus C$, gilt $b = \beta(b) \in \beta A$ ohnehin. Daher ist in der Tat $B \subseteq \beta A$. ❑

C in diesem Beweis kann auch als $C = \bigcup_{n\in\omega} \alpha^n D$ mit $D := A \setminus B$ geschrieben werden. Aber was viel wichtiger ist und wie bei Dedekind geschehen, C kann ohne natürliche Zahlen definiert werden, nämlich als kleinste, D enthaltende und unter α abgeschlossene Teilmenge von A, also $C = \bigcap\{X \subseteq A \mid D \subseteq X, \alpha X \subseteq X\}$. (1) und (2) sind auch bei dieser Definition sofort klar. Nur der Beweis von (3) ist etwas aufwendiger. Er folgt z.B. aus dem vorangehenden Nachweis von $C = D \cup \alpha C$, denn danach ist $B \cap C = B \cap (D \cup \alpha C) = B \cap \alpha C \subseteq \alpha C$. Einziger Nachteil dieser Beweisvariante ist, dass sie etwas abstrakter ist als diejenige von Beweis 0.

Der ebenso einfache Beweis I im Abschnitt 2 soll vor allem dem Vorurteil entgegentreten, ein zahlenfreier Beweis sei weniger konstruktiv und verdunkle die Herkunft einer Bijektion von A auf A'. Unter den übersichtlichen Gegebenheiten des Zwischenmengensatzes macht dieser Beweis wohl recht deutlich, wie eine gewünschte Bijektion zustandekommt, nämlich als größtmögliche „Vereinfachung“ der gegebenen Injektion $\alpha\colon A \to B$. Es muss ein zahlenfreier Beweis den Konstruktionsverfahren von Bernstein oder König daher nicht nur beweistechnisch überlegen sein, sondern er kann die Entstehung einer Bijektion ebenso deutlich veranschaulichen.

Der Beweis II ist von etwas anderer Art und unter extrem schwachen Voraussetzungen über die zugrundeliegende Mengenlehre ausführbar. Er kann ebenso in der Metatheorie der Mengenlehre ausgeführt werden und auf Klassen und damit insbesondere auf Mengen bezogen werden. Unabhängig von speziellen Annahmen über die Klassenäquivalenz – etwa der Von Neumannschen Hypothese der Äquivalenz aller echten Klassen (J. v. Neumann, 1903–1957) – liefert der Äquivalenzsatz für Klassen in Abschnitt 5 einige erwähnenswerte Einsichten. Diese sind teils bekannte „Folklore“, aber in den Lehrbüchern kaum zu finden. Die Übertragung des Beweises II in die Theorie zeigt, dass der Äquivalenzsatz bereits in dem sehr schwachen mengentheorischen System KP (Kripke, Platek) gilt.

Vorteil des Beweises III in Abschnitt 3 ist seine Reduktion auf einen Fixpunktsatz, welcher noch andersartige nutzbringende Anwendungen hat. Dieser Beweis unterscheidet er sich in seinem konstruktiven Gehalt kaum von Beweis 0. Er liefert dieselbe Bijektion. Mehr darüber später.

2 Zwei einfache zahlenfreie Beweise

Für beliebiges $f\colon A \to A$ bezeichne $\operatorname{Fix} f = \{x \in A \mid f(x) = x\}$ die Menge aller Fixpunkte von f. Für $f\colon A \to A$, $g\colon A \to A$ sei $f \leq g$, wenn $\operatorname{Fix} f \supseteq \operatorname{Fix} g$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq f(x)$. Man kann sich f aus g durch eine Vermehrung der Fixpunkte von g entstanden denken, wobei im Übrigen f mit g übereinzustimmen hat. In diesem Sinne ist f *einfacher* als g, liegt näher bei der identischen Funktion id_A, der in diesem Sinne einfachsten Funktion. $\leq$ ist offenbar eine reflexive Halbordnung auf der Menge aller $f\colon A \to A$, d.h. $\leq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

Seien $B \subseteq A$ fest gewählt und I die Gesamtheit aller Injektionen $f\colon A \to B$. Dieses I bildet den Rahmen für Beweis I. Dessen Idee besteht darin, eine vorgegebene Injektion $\alpha\colon A \to B$, deren Bild in der Regel eine echte Teilmenge von B ist, zu einer Bijektion $\beta\colon A \to B$ zu „vereinfachen“. Dies gelingt erfreulicherweise in einem einzigen Konstruktionsschritt. Unter allen $f \in I$ mit $f \leq \alpha$ gibt es nämlich eine im obigen Sinne einfachste Funktion β, die sich darüber hinaus auch noch als eine Bijektion erweist. Dies zeigt folgender

Beweis I des Zwischenmengensatzes. Es sei $J = \{f \in I \mid f \leq \alpha\}$. Sicher ist $\alpha \in J$. Man erkläre $\beta\colon A \to B$ durch $\beta(x) = x$ für $x \in F := \bigcup_{f \in J} \operatorname{Fix} f$ $(\subseteq B)$ und $\beta(x) = \alpha(x)$ sonst. Dieses β wird sich als eine Bijektion erweisen. Offenbar gilt $(*)\colon \beta \leq f$ für alle $f \in J$. Auch ist $\beta \in J$, was wegen $\beta \leq \alpha$ nur den Nachweis erfordert, β ist injektiv. Seien $x \neq y$ aus A. Falls $x, y \in F$ oder $x, y \in A \backslash F$, gilt $\beta(x) \neq \beta(y)$ trivial. Sei nun $x \in F$, etwa $x \in \operatorname{Fix} f$ mit $f \in J$, und $y \in A \backslash F$. Dann folgt $\beta(x) = x = f(x) \neq f(y) = \alpha(y) = \beta(y)$, also gleichermaßen $\beta(x) \neq \beta(y)$. Wir behaupten schließlich $B \subseteq \beta A$, d.h. β ist auch surjektiv. Sei $\gamma\colon A \to B$ erklärt durch $\gamma(x) = x$ für $x \in B \backslash \beta A$ und $\gamma(x) = \beta(x)$ sonst. Sicher ist $\gamma \leq \beta$. Auch erweist sich γ leicht als injektiv. Mit $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ folgt daher $\gamma \in J$ und $(*)$ liefert $\beta \leq \gamma$. Also $\beta = \gamma$ wegen der Antisymmetrie. Nach Definition ist $B \backslash \beta A \subseteq \gamma A$. Also $B \backslash \beta A \subseteq \beta A$ und mithin $B = B \backslash \beta A \cup \beta A \subseteq \beta A \cup \beta A = \beta A$. ❏

Überraschenderweise liefern die Beweise 0 und I trotz unterschiedlicher Ansätze dieselbe Bijektion $\beta\colon A \to B$. Denn sicher gilt $\beta \leq \alpha$ für die in Beweis 0 konstruierte Bijektion, also $\beta \in J$. Man überlegt sich leicht, dass $f(x) \neq x$ für beliebiges $f \in J$ und $x \in C$ aus Beweis 0. Die maximale Fixpunktmenge für ein $f \in J$ kann also höchstens $A \backslash C$ sein; und tatsächlich ist sie $A \backslash C$ für die Abbildung β aus Beweis 0. Daher ist dieses β mit dem β aus Beweis I identisch.

Bemerkung 2. Man hätte in Beweis I auch anders erschließen können, dass β surjektiv ist, etwa durch vorherigen Nachweis von $B \backslash F \subseteq \beta A$. Ist nämlich dies gezeigt, folgt $B \subseteq \beta A$ sofort aus $F, B \backslash F \subseteq \beta A$. Offenbar ist β die einfachste aller Funktionen in der Gesamtheit K aller Bijektionen $f\colon A \to B$ mit $f \leq \alpha$. Es gibt unter den Bijektionen aus K auch eine, nennen wir sie β', mit kleinster Fixmenge oder größter „Bewegungsmenge". Ihre explizite Darstellung ist $\beta'(x) = x$ für $x \in \bigcap_{f \in K} \operatorname{Fix} f$ und $\beta'(x) = \alpha(x)$ sonst. Eine Definition von β' ohne Bezug auf K ist die folgende: $\beta'(x) = x$ für $x \in D := \{\alpha^n(b) \mid b \in B \backslash \alpha A,\ n \in \omega\}$ und $\beta'(x) = \alpha(x)$ sonst. Man überlegt sich nämlich unschwer, dass $D \subseteq \operatorname{Fix} f$ für jedes $f \in K$, beginnend mit dem auf der Surjektivität von $f \in K$ beruhenden Nachweis von $B \backslash \alpha A \subseteq \operatorname{Fix} f$. Die Verifikation dieser Behauptungen sei dem Leser überlassen.

Der folgende Beweis II ist eine geschickte Modifikation von Beweis 0, welche den Gebrauch natürlicher Zahlen eliminiert. Zwar ist die neu definierte Menge C in der Regel größer als diejenige in Beweis 0, aber sie hat dieselben Grundeigenschaften.

Beweis II des Zwischenmengensatzes. Sei S die von α abhängige Gesamtheit aller Mengen $s \subseteq A$ mit den Eigenschaften

(i) für alle $b \in s$ mit $b \in B$ ist $b \in \alpha A$,
(ii) für alle $b \in s$ und a mit $b = \alpha(a)$ ist $a \in s$.

Diese Eigenschaften sind z.B. für $s = \{c, \alpha(c), \alpha^2(c), \ldots, \alpha^n(c)\}$ mit $c \in A \backslash B$ und $n \geq 0$ erfüllt. Sei $C = \bigcup S$. Wir zeigen wie in Beweis 0 zuerst

$$(1)\ A \backslash C \subseteq B, \qquad (2)\ \alpha C \subseteq C, \qquad (3)\ B \cap C \subseteq \alpha C.$$

Für $c \in A \backslash B$ gilt $\{c\} \in S$. Also $c \in C$. Daher $A \backslash B \subseteq C$ und somit gilt (1). Sei $b = \alpha(a)$, $a \in C$, etwa $a \in s \in S$. Man prüft sehr einfach $s' = s \cup \{b\} \in S$, also $b \in C$, und (2) ist gezeigt. Sei $b \in B \cap C$, etwa $b \in s \in S$. Nach (i) ist $b = \alpha(a)$ für ein a, und (ii) ergibt $a \in s$, also $a \in C$, was (3) bestätigt. Wie in Beweis 0 sei $\beta\colon A \to B$ erklärt durch $\beta(x) = \alpha(x)$ für $x \in C$ und $\beta(x) = x$ sonst, also $x \in A \backslash C$. Von hier an verläuft der Beweis ganz wie Beweis 0, denn für den Nachweis der Bijektivität von β wurden dort einzig die Eigenschaften (1), (2) und (3) verwendet. ❏

Bemerkung 3. Man hätte in diesem Beweis statt S auch die Gesamtheit S^* aller Mengen der Gestalt $\{c, \alpha(c), \alpha^2(c), \ldots, \alpha^n(c)\}$ mit $c \in A \backslash B$ wählen können. Dies würde grob gesagt der Bernaysschen Übertragung [3] des Beweises [11] in den Klassenkalkül entsprechen, der allerdings auf dem Begriff der endlichen Folge fußt und damit einen eigentlich unnötigen begrifflichen und technischen Aufwand erfordert. Unsere Konstruktion benötigt weder den Endlichkeitsbegriff noch den der endlichen Folge.

3 Reduktion auf einen Fixpunktsatz

Der folgende, in seinem Grundgedanken bekannte Beweis besteht in einer Anwendung eines Fixpunktsatzes auf eine den Voraussetzungen des Zwischenmengensatzes entsprechende Situation. Dieser ebenso einfache wie schöne Fixpunktsatz ist Sonderfall eines allgemeineren Satzes aus [18], der seinerseits wieder ein Extrakt aus früheren gemeinsamen Ergebnissen von Banach, Kneser und Tarski darstellt.

Eine Halbordnung $(H, \leq)$ heiße *vollständig*, wenn $\sup M$ (das Supremum) für jede Teilmenge $M \subseteq H$ existiert, d.h. M hat eine kleinste obere Schranke. Ein solches H besitzt ein größtes und ein kleinstes Element, nämlich $\sup H$ bzw. $\sup\, \emptyset$. Außerdem existiert dann auch $\inf M$ (das Infimum) für jedes $M \subseteq H$ – es ist $\inf M = \sup U$ mit $U = \{u \in H \mid u \leq x \text{ für alle } x \in M\}$. Daher ist eine vollständige Halbordnung sogar ein vollständiger Verband. Das spielt für die meisten Anwendungen jedoch kaum eine Rolle, weil der Verbandskalkül nur selten in Erscheinung tritt.

Beispiele vollständiger Halbordnungen unterschiedlicher Art sind $(\mathcal{P}M, \subseteq)$, wobei $\mathcal{P}M$ die Potenzmenge der Menge M bezeichnet, sowie etwa $([0,1], \leq)$, wobei $[0,1]$ das Intervall reeller Zahlen mit den Grenzen 0 und 1 (einschließlich) bezeichnet.

Sei $(H, \leq)$ eine Halbordnung. Eine Abbildung $\varphi\colon H \to H$ heißt *monoton*, wenn $x \leq y \;\Rightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y)$, für alle $x, y \in H$.

Fixpunktsatz *[18]. Jede monotone Abbildung $\varphi\colon H \to H$ einer vollständigen Halbordnung $(H, \leq)$ hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $M = \{x \in H \mid x \leq \varphi(x)\}$ und $s = \sup M$. Wegen $x \leq s$ impliziert $x \in M$ offenbar $x \leq \varphi(x) \leq \varphi(s)$. Daher ist $\varphi(s)$ obere Schranke für M und folglich $s \leq \varphi(s)$. Hieraus folgt $\varphi(s) \leq \varphi(\varphi(s))$, also $\varphi(s) \in M$ und somit $\varphi(s) \leq s$. Dies und $s \leq \varphi(s)$ ergeben $s = \varphi(s)$, also erweist sich s als Fixpunkt von φ. ❏

$\sup\{x \in H \mid x \leq \varphi(x)\}$ ist offenbar größter Fixpunkt von φ. Analog zeigt man, $\inf\{x \in H \mid \varphi(x) \leq x\}$ ist deren kleinster Fixpunkt. Man benötigt im Beweis eigentlich weniger als die Vollständigkeit. Es genügt, dass jede Kette der betrachteten Halbordnung ein Supremum hat. Allerdings ist der Beweis dann weniger einfach. Diese Verallgemeinerung läßt sich leicht als Korollar des Bourbakischen Fixpunktsatzes gewinnen, siehe etwa [16]. Doch sei dies nur am Rande erwähnt.

Eine unmittelbare Folge des Fixpunktsatzes ist z.B. die folgende, auf den ersten Blick wenig plausible Behauptung: Eine monoton wachsende (im allgemeinen natürlich unstetige) reelle Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt, und zwar sogar einen größten und einen kleinsten.

Aber auch der Zwischenmengensatz (und damit der Äquivalenzsatz) ist eine einfache Folge des obigen Satzes, wie im folgenden Beweis gezeigt wird. Diese Verschiedenartigkeit der Anwendungen macht den Fixpunktsatz so zu einem Musterbeispiel für die Zweckmäßigkeit mathematischer Abstraktionen. Ist $X \cap Y = \emptyset$, werde $X \cup Y$ auch mit $X \dot\cup Y$ bezeichnet.

Beweis III des Zwischenmengensatzes. Sei $A \supseteq B \supseteq \alpha A$ und $D := A \backslash B$. Ferner sei $H = \mathcal{P}A$, sowie $\varphi\colon H \to H$ die offensichtlich monotone Abbildung $X \mapsto D \cup \alpha X$ der vollständigen Halbordnung $(H, \subseteq)$ in sich. Sei C ein Fixpunkt von φ gemäß Fixpunktsatz, also $C = D \cup \alpha C$, sowie $E := A \backslash C = A \backslash (D \cup \alpha C) = B \backslash \alpha C$. Dann ist (1) $A = C \dot\cup E$. Wegen $\alpha C \subseteq B$ und $E = B \backslash \alpha C$ gilt (2) $B = \alpha C \dot\cup E$. (1) und (2) liefern die Bijektion $\beta = \alpha{\upharpoonright}C \dot\cup \mathrm{id}_E$ von A auf B. Dabei bezeichnet $\alpha{\upharpoonright}C$ die Einschränkung von α auf C. ❑

Von den möglichen Fixpunkten von φ in diesem Beweis sind der kleinste C_0 und größte C_1 explizit definierbar. Diese mögen respektive die Bijektionen β_0 und β_1 von A auf B liefern. Es läßt sich nun unschwer bestätigen, dass β_0 gerade mit der in Beweis I konstruierten Bijektion β übereinstimmt, sowie β_1 mit der in Bemerkung 2 definierten Bijektion β' mit kleinster Fixpunktmenge. Dies ist kein Zufall. Denn eine Analyse der in der Literatur vorliegenden Beweise des Zwischenmengensatzes bringt den bemerkenswerten Umstand an das Licht, dass diese allesamt auf die Konstruktion einer der beiden eben erwähnten Bijektionen β oder β' hinauslaufen. Dem entspricht zugleich die Beobachtung, dass die vorliegenden Beweise des Äquivalenzsatzes stets dieselben Zerlegungen $A = A_0 \dot\cup A_1 \dot\cup A_2$ und $A' = A'_0 \dot\cup A'_1 \dot\cup A'_2$ liefern, so dass A_0 auf A'_0 durch α, A_1 auf $A'{}_1$ durch α^{-1}, und A_2 auf $A'{}_2$ wahlweise durch α oder α^{-1} abgebildet wird. Es ist also kein Beweis dem anderen dadurch unterlegen, dass er weniger konstruktiv wäre.

Wir haben nicht protokolliert, welche mengentheoretischen Axiome zur Durchführung obiger Beweise erforderlich waren. Aber es ist klar, dass diese im Rahmen von ZF (Zermelo, Fraenkel) ausführbar sind, und zwar ohne Benutzung der Axiome der Fundierung, der Ersetzung und des Unendlichkeitsaxioms. Bemerkenswert ist auch, dass in den Beweisen I und II auf das Potenzmengenaxiom verzichtet werden kann. Zwar darf man sich dann nicht mehr erlauben, die Gesamtheiten I, J und S, C in diesen Beweisen Mengen zu nennen. Aber das stört nicht. Der Grund für die Verzichtbarkeit auf das Potenzmengenaxiom ist der folgende: Auch ohne dieses Axiom läßt sich in ZF beweisen, dass mit A auch $A \times A$ Menge ist. Die Abbildung β läßt sich dann als Teilmenge hiervon leicht aussondern.

4 Der Cantor–Bernsteinsche Satz für Klassen

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass der Leser mit Klassen, d.h. Kollektionen von Mengen, die durch Formeln der Sprache $L_\in$ für ZF definierbar sind, hinlänglich vertraut ist (siehe etwa [12]). Klassen seien mit Großbuchstaben, Mengen mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Es lassen sich Durchschnitt, Vereinigung und relatives Komplement zweier Klassen A, B in natürlicher Weise erklären, doch existieren im allgemeinen nicht Durchschnitt und Vereinigung unendlich vieler Klassen. Daher lässt sich Beweis I auch nicht ohne weiteres auf Klassen übertragen. Die Übertragbarkeit funktioniert aber problemlos für den Beweis II.

Für verallgemeinerte Funktionen F als Abbildungen von Klassen in Klassen, die beschrieben werden durch Formeln $\varphi(x, y)$ mit zwei ausgezeichneten Variablen, benutzen wir die üblichen mengentheoretischen Sprechweisen, siehe hierzu etwa [16]. Sind die Klassen A und B durch die Formeln $\alpha(x)$ und $\beta(y)$ gegeben, so bedeutet $F\colon A \to B$ dasselbe wie $\forall xy[(\alpha(x) \to \exists! y\varphi(x, y)) \wedge (\varphi \to \alpha \wedge \beta)]$. Man beachte, $FX := \{y \mid (\exists x{\in}X)\varphi\}$ ist in der Regel nur noch eine Klasse.

Wir betrachten die beiden folgenden Aussagen über Klassen, die ähnlich wie das Rekursionstheorem für die Klasse der Ordinalzahlen nicht innerhalb $L_\in$ formulierbar sind, sondern Aussagen *über* ZF (oder einer verwandten Theorie) darstellen. Es ist nicht wesentlich, ob wir diese Aussagen in eine formalisierte Klassentheorie einbetten. Sie entsprechen völlig dem Äquivalenz- beziehungweise dem Zwischenmengensatz, nur dass α und β jetzt durch F und G bezeichnet werden.

(A) *Sind A, A' Klassen und sind $F\colon A \to A'$ und $F'\colon A' \to A$ injektiv, so existiert eine Bijektion $G\colon A \to A'$.*

(B) *Ist $F\colon A \to A$ injektiv und $FA \subseteq B \subseteq A$, so existiert eine Bijektion $G\colon A \to B$.*

Die Aussagen (A) und (B) sind aus logischen, genauer abbildungstechnischen Gründen äquivalent, die außer Extensionalität keine mengentheoretischen Axiome benötigen. Es genügt daher, (B) zu beweisen. Dieser Beweis verläuft genauso wie Beweis II in Abschnitt 2, wobei nur von Klassen statt von Mengen zu sprechen ist. Weil A nicht notwendig Menge sein muss, sind auch S und C im Regelfalle nur Klassen, was aber den Beweisgang in keiner Weise beeinträchtigt.

Der Beweis von (B) kommt mit allereinfachsten Mengenbildungen aus. Man benötigt lediglich, dass für Mengen a, b auch $a \cup \{b\}$ und $\emptyset$ Mengen sind. Der Äquivalenzsatz gilt also schon für die Klassen einer Art „Vorschulmengenlehre“. Das läßt vermuten, dass der Äquivalenzsatz schon innerhalb einer sehr schwachen Mengenlehre beweisbar ist. Dies ist in der Tat so, obwohl auch in neueren Lehrbüchern nur selten darauf hingewiesen wird, wie z. B. in [9].

Wir wollen wenigstens erwähnen, dass Beweis II bereits ausführbar ist in dem sehr schwachen System KP (Kripke, Platek, siehe [2], auch für einige nicht erklärte Begriffe). KP ist ein modernes Werkzeug der mathematischen Logik mit den unterschiedlichsten Anwendungen und entsteht aus ZF durch Weglassen von Unendlichkeits- und Potenzmengenaxiom sowie einer Einschränkung von Aussonderung und Ersetzung auf Formeln mit beschränkter Quantifikation, d.h. Quantifikationen der Gestalt $(\exists x{\in}y)$ und $(\forall x{\in}y)$. In KP ist für Mengen A, B auch $A \times B$ als Menge konstruierbar. Deshalb reicht für den Beweis des Äquivalenzsatzes in KP auch jetzt der Nachweis von (B) mit der Voraussetzung, A, B, F sind Mengen. Nun ist in KP (unter Verwendung von Fundierung und Ersetzung) beweisbar, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von A existiert. Deswegen sind S^* und C in einem dem Beweis II völlig analogen Beweis in KP mittels beschränkter Quantifikation definierbar; mithin auch die Bijektion G, die sich dann als Teilmenge von $A \times B$ darstellt.

Bemerkung 4. Die Untersuchung des Äquivalenzsatzes in oder über schwachen axiomatischen Systemen dient u. a. der Klärung seiner logischen Struktur. Schon in der Klassenform (A) verliert er seinen rein mengentheoretischen Charakter. (A) gilt auch dann, wenn die zugrundeliegende Theorie T nicht mehr über $\in$ redet, sondern wie z. B. die Arithmetik über $+, \times$. Wesentlich für den angegebenen Beweis ist nur, dass man in T über endliche Elementemengen reden kann, eventuell in kodierter Form. Der Äquivalenzsatz gilt zwar nicht für jede Theorie der 1. Stufe, wohl aber für die Klassen einer jeden Theorie der schwachen 2. Stufe.

5 Beispiele für Anwendungen von (A) und (B)

Es bezeichne U das Mengenuniversum bezüglich einer das System KP umfassenden Mengenlehre mit oder ohne Unendlichkeitsaxiom, z. B. ZFC.

Man wird auf Anhieb kaum eine Antwort auf die Frage erwarten können, wie groß der Anteil der Klasse Fin der endlichen Mengen am Mengenuniversum U ist. Hier ist sie.

1. U enthält gleichviele endliche Mengen wie Mengen überhaupt.

Beweis. Die Operation $\{\}: U \to \mathrm{Fin}$ mit $a \mapsto \{a\}$ ist injektiv. Gemäß (B) existiert also eine Bijektion von U auf Fin.

Der Beweis zeigt offenbar auch, dass im Mengenuniversum gleichviele Einermengen wie Mengen überhaupt existieren.

Sei Inf die Klasse aller unendlichen Mengen. Das Unendlichkeitsaxiom postuliert $\mathrm{Inf} \neq \emptyset$. Wie groß ist Inf, wenn die Existenz wenigstens einer unendlichen Menge u gefordert wird? Hier ist die Antwort.

2. Es gibt gleichviele unendliche Mengen wie Mengen überhaupt.

Beweis. Die Operation $a \mapsto \{a\} \times u$ für fest gewähltes $u \in \mathrm{Inf}$ ist eine Injektion von U in Inf, weil $\{a\} \times u$ gleichmächtig zu u und damit unendlich ist. Nach (B) existiert also eine Bijektion von U auf Inf.

Damit ist im Falle $\mathrm{Inf} \neq \emptyset$ der Anteil der unendlichen und endlichen Mengen am Universum derselbe, und zwar gilt dies ganz unabhängig vom Potenzmengenaxiom.

Eine der Schwierigkeiten der Cantorschen Kardinalzahlkonzeption bestand darin, daß eine Mächtigkeit M (d. h. eine Äquivalenzklasse nach der Gleichmächtigkeit in

$U \setminus \{\emptyset\}$) eine echte Klasse ist oder in der von Cantor gelegentlich benutzten Terminologie, eine „absolut unendliche“ oder „inconsistente“ Vielheit darstellt. Gibt es nun z.B. mehr oder weniger Dreiermengen als abzählbar unendliche Mengen oder überhaupt Mächtigkeiten mit einem unterschiedlichen Anteil an Mengen? Dies ist nicht der Fall:

3. In jeder Mächtigkeit M gibt es gleichviele Mengen, und zwar jeweils soviele wie im gesamten Mengenuniversum.

Beweis. Nach (B) genügt es, eine Injektion von U in M anzugeben. Zum Beispiel ist $a \mapsto \{a\} \times m$ eine solche, wobei $m \in M$ beliebig aber fest gewählt sei.

Daraus läßt sich zum Beispiel folgern, dass auch M eine echte Klasse ist. Denn weil U echte Klasse ist, gilt wegen der Gleichmächtigkeit von M und U dasselbe auch für M.

Eine Menge a heißt *fundiert*, wenn die auf a eingeschränkte $\in$-Relation fundierte Relation ist, d.h. jede Teilmenge $b \subseteq a$ hat ein $\in$-minimales Element e oder gleichwertig $e \cap b = \emptyset$. So sind zum Beispiel die natürlichen Zahlen und allgemeiner alle Ordinalzahlen fundiert, kurz $\mathrm{On} \subseteq W$, wobei On die Klasse aller Ordinalzahlen und W die Klasse aller fundierten Mengen bezeichne. Auch die Von Neumannsche Hierarchie $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ ist Teilklasse von W, genauer $V \subseteq W \subseteq U$.

Die fundierten Mengen enthalten sich nicht als Elemente. Auch gibt es zwischen ihren Elementen keine zirkulären $\in$-Ketten, usw. Kurz, die fundierten sind die gutartigen Mengen. Die $a \in V$ haben überdies die Eigenschaft, dass jede mit a beginnende absteigende $\in$-Kette endlich ist, was für $a \in W$ nicht gelten muss.

In ZF werden nichtfundierte Mengen durch das Fundierungsaxiom $U = W$ ausgeschlossen, und man beweist dann sogar $U = V$. Dieses Axiom ist im Grunde jedoch nur eine bequeme Konvention. In den Anwendungen der Mengenlehre wird es kaum benötigt. Für die meisten Anwendungszwecke reicht sogar das originale Axiomensystem ZC von Zermelo. Bezüglich ZC oder anderer Systeme ohne Fundierung kann U zahllose nichtfundierte Mengen enthalten, darunter besonders unangenehme Mengen a mit $a \in a$ oder sogar mit $a = \{a\}$. Zwar läßt sich die Existenz solcher „pathologischen“ Mengen wegen der Konsistenz von $U = W$ mit ZC nicht beweisen, aber die Annahme ihrer Existenz ließe sich nicht zu einem Widerspruch führen.

Die Frage ist, tolerierten die gutartigen fundierten Mengen ein friedliches (sprich konsistentes) Zusammenleben mit einer Mehrheit nichtfundierter Mengen? Die Antwort ist

4. Es gibt ebenso viele fundierte wie Mengen überhaupt.

Beweis. $F\colon a \mapsto \{\{\emptyset, \{a\}\}\}$ ist offenbar injektiv. Gemäß (B) folgt die Behauptung daher aus dem Nachweis von $F(a)$ ist fundiert. Dazu reicht es, $\{\emptyset, \{a\}\} \notin \{\emptyset, \{a\}\}$ zu bestätigen, was offensichtlich ist.

Es läßt sich ohne Zusatzannahmen jedoch nicht zeigen, dass auch eine Bijektion $G\colon U \to V$ existiert. V kann also „klein" sein gegenüber U.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich der Kürze halber auf ZFC, also $U = V$. Wir wollen die Frage diskutieren, ob sich V mittels des unbegrenzten Vorrats an Ordinalzahlen aufzählen lässt. Es gibt nämlich eine Bijektion $F : \mathrm{On} \times \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ und für jedes $\alpha \in \mathrm{On}$ eine Bijektion f_α von V_α auf einen geeigneten Abschnitt von On. Daher wäre eine positive Antwort wegen $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha$ hinreichend plausibel.

Diese Frage konnte erst 1963 durch P. Cohen (1934–2007) nach Entwicklung der Forcing–Methode vollständig geklärt werden. Danach gibt es eine im Rahmen von ZFC definierbare Aufzählung des Mengenuniversums V nicht; denn diese liefert eine definierbare Wohlordnung von V und es gibt ZFC-Modelle ohne definierbare Wohlordnung ihres Universums. Andererseits führt das Vorhandensein einer solchen Aufzählung aber auch nicht zu Widersprüchen. Denn K. Gödel (1906–1978) zeigte 1938 im Zusammenhang mit Untersuchungen zum Kontinuumproblem, dass die Klasse L der konstruktiblen Mengen ein Modell von ZFC darstellt, so dass das sogenannte Konstruktibilitätsaxion $V{=}L$ mit ZFC konsistent ist.

Die Annahme $V{=}L$ liefert unschwer eine wohldefinierte ordinale Aufzählung von V, so dass die Aufzählbarkeit von V mit ZFC auch verträglich ist. Dies hat eine bemerkenswerte Konsequenz hinsichtlich des Umfangs der Klassen, auf die wir gleich zurückkommen. Interessant ist zunächst die folgende, nicht publizierte Aufzeichnung Cantors (zitiert nach [13, S. 145]):

> Bis uns das Gegenteil bewiesen wird, halten wir folgenden Satz für richtig: Die inconsistenten Vielheiten sind alle aequivalent, so daß es ausgeschlossen ist, sie als Grundlage für eine Zahlbildung zu benutzen ...

Möglicherweise gelangte Cantor wie folgt zu dieser Behauptung. Er ging aus von einer Aufzählung sämtlicher Mengen mittels seiner Ordinalzahlen und bewies sodann auf irgendeine Weise den folgenden Sachverhalt, der sich mittels des Äquivalenzsatzes für Klassen (A) auf einfachste Weise bestätigen läßt:

5. Wenn eine nicht notwendig wiederholungsfreie Aufzählung $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ aller Mengen existiert, so sind sämtliche echten Klassen äquivalent.

Beweis. Ist K echte Klasse, so ist $F\colon K \to \mathrm{On}$ mit $F(e) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid e = e_\alpha\}$ injektiv. Damit überträgt sich die Wohlordnung von FK ($\subseteq$ On) auf K. Diese ermöglicht nun die rekursive Definition einer injektiven Abbildung $G\colon \mathrm{On} \to K$ durch $G(\alpha) = \min(K \setminus G\alpha)$. (Man beachte, dass $K \setminus G\alpha$ stets $\neq \emptyset$ ist, weil die Menge $G\alpha = \{G(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ die echte Klasse K nicht ausschöpfen kann.) Gemäß (A) sind On und K, und somit alle echten Klassen, paarweise äquivalent.

Infolgedessen sind bei Zugrundelegung des Gödelschen Axioms $V{=}L$ alle echten Klassen paarweise äquivalent, so dass Cantor mit seiner diesbezüglichen Behauptung zwar nicht ganz im Recht, aber auch nicht ganz im Unrecht war.

Im Rahmen von NB (Von Neumann, Bernays) wird die Aufzählbarkeit von V oder die nach 5. gleichwertige Äquivalenz aller echten Klassen auch als das Von Neumannsche Axiom (E) bezeichnet (aus [14]). (E) ist, wie unter Beachtung von $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ unschwer zu sehen, auch gleichwertig zum *Axiom der globalen Auswahl*:

(S) Es gibt ein $\sigma \colon V \to V$ mit $\sigma(a) \in a$ für alle $a \in V \setminus \{\emptyset\}$.

Fügt man einen „Selektor" σ gemäß (S) zu $L_\in$ hinzu, erhält man das in ZFC bereits vorhandene (lokale) Auswahlaxiom, aber auch nicht mehr, wie in [10] bewiesen wurde. (Das ist verständlich, weil σ kein in $L_\in$ explizit definierbarer Operator ist.) Damit impliziert auch (E), ebenso wie (S), nichts Neues in ZFC.

Wir dürfen also nach Belieben annehmen oder verwerfen, dass alle echten Klassen äquivalent sind, ohne Auswirkungen auf die im Rahmen der Sprache $L_\in$ verfügbaren Mengen von ZFC. Die Alltagsmathematik bleibt davon gewissermaßen unberührt. Unberührt bleiben natürlich auch die Tatsachen der Beispiele 1–5, die sich beliebig vermehren ließen.

Der Autor dankt den Herren H.-D. Donder (München), K. Gloede (Heidelberg), und P. Agricola für nützliche Hinweise.

Literatur

[1] M. Aigner, G. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, (Berlin 1998) 2. Aufl. Springer 2001.

[2] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Berlin 1975.

[3] P. Bernays, *A system of axiomatic set theory III*, Journ. Symb. Logic 7 (1942), 65–89, 133–145.

[4] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898.

[5] G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin 1932.

[6] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke Bd. III*, Braunschweig 1932.

[7] O. Deiser, *Mengenlehre*, (Berlin 2002) 2. Aufl. Springer 2004.

[8] O. Deiser, *"Ueber die Addition transfiniter Cardinalzahlen", Introductory Essay*, in *Zermelo's Collected Works* (Herausgeber Ebbinghaus, Fraser, Kanamori), Springer, erscheint 2008.

[9] F. Drake, *Set theory (An introduction to large cardinals)*, Amsterdam 1974.

[10] U. Felgner, *Comparison of the axiom of local and global choice*, Fundamenta Mathematicae 71 (1971), 43–62.

[11] J. König, *Sur la théorie des ensembles*, Compt. Rend. 143 (1906), 110–112.

[12] A. Levy, *Basic Set Theory*, Berlin 1979.

[13] H. Meschkowski, *Georg Cantor, Leben, Werk und Wirkung*, (Braunschweig 1967) 2. Aufl. BI-Verlag 1983.

[14] J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal reine u. angew. Math. 154 (1925), 219–240.

[15] G. Peano, *Super theorema de Cantor-Bernstein*, Rand. Circ. Mat. Palermo 21 (1906), 136–143.

[16] W. Rautenberg, *Grundkurs Mengenlehre*, `www.math.fu-berlin.de/~raut`

[17] E. Schröder, *Über Cantorsche Sätze*, Jahresberichte DMV 5 (1896), 303–362.

[18] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific. J. Math. 5 (1955), 285–309.

[19] E. Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre 1*, Math. Ann. 65 (1908), 261–281.