Grundkurs Mengenlehre

Wolfgang Rautenberg

Berlin

Fassung vom Februar 2008

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik

Vorwort

> So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig,
> man muss sie für fertig erklären,
> wenn man nach Zeit und Umständen
> das mögliche getan hat.
>
> (J. W. Goethe, *Italienische Reise,* 1787)

Dies ist die Überarbeitung des Skriptums zu meiner um 1980 mehrfach gehaltenen einsemestrigen Vorlesung *Einführung in die Mengenlehre*. Das dargestellte Material ist in sich geschlossen und unabhängig von weiterführenden Themen. Mathematische Vorkenntnisse sind zwar nicht erforderlich, aber die durch Übung entwickelten logischen Fähigkeiten, die man nach zwei Semestern Studium der Mathematik in der Regel erworben hat, sind sicher ausschlaggebend für die Geschwindigkeit, mit der der dargebotene Stoff gedanklich verarbeitet werden kann. Große Aufmerksamkeit wurde den teils mit Lösungshinweisen versehenen Übungen gewidmet.

Die Begriffe *Menge*, *Relation* und *Funktion* sind fundamentale Konzepte der modernen Mathematik. Man braucht nur ein Lehrbuch eines beliebigen Gebiets der höheren Mathematik aufzuschlagen, wobei meist ein Blick in die einleitenden Abschnitte ausreicht. Von diesen Konzepten ist der Funktionsbegriff der ursprünglichere. Der Begriff wurde schrittweise erweitert, zunächst in anschaulicher Weise vor allem durch L. Dirichlet (1805 – 1859). Aber erst F. Hausdorff (1868 – 1942) gab im ersten umfassenden Lehrbuch der Mengenlehre [Hausdorff 1914] die heute übliche Definition einer Funktion als Menge geordneter Paare an. Das setzt natürlich eine mengentheoretische Definition des geordneten Paares voraus, die ebenfalls zuerst von Hausdorff angegeben wurde. Das Bedürfnis einer Präzisierung des Begriffs *Menge* entwickelte sich erst im Zusammenhang mit der von G. Cantor (1845 – 1918) geschaffenen allgemeinen Mengenlehre und den um 1900 entdeckten Antinomieproblemen. Dass die Mengenlehre als ein universelles Fundament für die Mathematik betrachtet werden kann, zeigte sich erst, nachdem Cantor seine Theorie in ihren wesentlichen Zügen bereits entwickelt hatte.

Das dritte der erwähnten Fundamentkonzepte, der Relationsbegriff in heutigem Verständnis, war das Ergebnis einer Analyse der logischen Fundamente der Mathematik, die um 1900 von mehreren Forschern teils unabhängig voneinander in Angriff genommen wurde. Das Ziel dieses als Logizismus bezeichneten Programms, nämlich die Reduktion der Mathematik auf die Logik, wurde zwar nicht erreicht, hat aber wesentlich zur Klärung des Mengenbegriffs beigetragen.

Der enge Zusammenhang, der aus heutiger Sicht bei der Präzisierung der drei erwähnten Konzepte deutlich wird, liegt nicht auf der Hand. Gemäß einer mengentheoretischen Begründung der Mathematik sind Funktionen und Relationen nichts weiter als besondere Mengen, so dass man sich auf den Mengenbegriff als dem letzten, explizit nicht definierten Grundbegriff der Mathematik berufen kann. Wir sagen *kann*, nicht etwa *muss*, denn es gibt unterschiedliche methodologische Konzeptionen der Mathematik, in denen Mengen eine unterschiedliche Rolle spielen. Die Möglichkeit eines durchgehend mengentheoretischen Aufbaus der Mathematik ist für viele spezifische Disziplinen irrelevant, hat aber eine erhebliche Bedeutung für die Mathematik insgesamt. Abgesehen davon haben mengentheoretisch entwickelte Methoden direkte Anwendungen in einigen zentralen Disziplinen der Mathematik.

Die aus den mengentheoretischen Antinomien resultierende Kritik macht eine axiomatische Fassung des Mengenbegriffs unumgänglich. Trotz gewisser Unterschiede in den formalen Ansätzen ist deren inhaltlicher Kern im wesentlichen gleichbleibend. Wir wählen hier das wichtigste dieser Systeme, nämlich ZF (Zermelo–Fraenkel). Die Axiome sind größtenteils anschaulich plausible Konstruktionsprinzipien für Mengen. Um diese mit der erforderlichen Präzision formulieren zu können, bedient man sich einer formalisierten mengentheoretischen Sprache $\mathcal{L}_\in$ (Abschnitt **1.5**). Wir stellen den sehr einfachen Formalismus von $\mathcal{L}_\in$ nicht in den Vordergrund, sondern argumentieren informell wie in der Mathematik üblich. Der Kürze halber verwenden wir jedoch oft eine formale Ausdrucksweise. So wird z.B. die Inklusion $a \subseteq b$ durch die Formel $\forall x(x \in a \to x \in b)$ definiert, die 'für alle x: wenn $x \in a$ so $x \in b$' formalisiert [1]. Der Sinn derartiger mittels logischer Symbole wie $\forall$ (für alle), $\to$ (wenn, so) und anderer Symbole aufgebauten Formeln ist stets leicht erkennbar.

Der enorme Fortschritt der Mengenlehre in den vergangenen Jahrzehnten hat zu einer erheblichen Diskrepanz zwischen ihren elementaren Teilen und der entwickelten Theorie geführt. Nicht gerade hilfreich ist diesbezüglich eine Unterscheidung zwischen sogenannter naiver und axiomatischer Mengenlehre. Anders als in anderen mathematischen Disziplinen kann nämlich Mengenlehre mit unklar formulierter Axiomatik zu falschen, schwer korrigierbaren Vorstellungen führen. Ohne den Begriff einer mengentheoretischen Formel kann Mengenlehre nicht richtig verstanden werden, weil gewisse Axiome dann nur unvollständig formulierbar sind. Anderseits erzeugt eine übertriebene Betonung des formalen Aspekts andere Hemmnisse. Es muss ein Gleichgewicht zwischen formalen und inhaltlichen Vorstellungen herrschen. Auch

[1] Hochkommata dienen hier wie überall in dieser Darstellung der Abgenzung gewisser Sprachpartikel vom umgebenden Text.

sollten im Rahmen eines Kurses über Mengenlehre Dinge wie etwa die elementare Mengenalgebra, einen ihrer Bedeutung angemessenen Platz einnehmen. Mengenalgebra, mit der fast jede mathematische Anfängervorlesung beginnt, ist noch keine Mengenlehre, sondern gehört zum Grundhandwerkzeug der Mathematik.

In Kapitel 1 diskutieren wir zunächst die Widersprüchlichkeit der naiven Mengenbildung und den Begriff der Klasse von Mengen, der die Entwicklung der Mengentheorie in $\mathcal{L}_\in$ wesentlich erleichtert. In Kapitel 2 werden die mengentheoretischen Axiome ausführlich erläutert. Kapitel 3 behandelt Relationen und Funktionen. Dieses etwas blutleere Thema wird mit wichtigen Anwendungen angereichert. Kapitel 4 befasst sich mit dem Auswahlaxiom und seinen Konsequenzen wie z.B. dem auch ohne Ersetzungsaxiom beweisbaren Wohlordnungssatz. Kapitel 5 ist den Ordinalzahlen und Kapitel 6 den Kardinalzahlen gewidmet.

Hier einige Besonderheiten dieser Darstellung. Kapitel 2 enthält einen vollständigen und elementaren Beweis der relativen Konsistenz des Fundierungsaxioms. Da es sich hier um das erste nichttriviale Beispiel der Konstruktionsmethode innerer Modelle handelt, ist eine frühe Darstellung ohne komplizierte Hilfsmittel von erheblichem didaktischen Wert. Kapitel 3 enthält einen neuen einfachen Beweis des Satzes von Cantor–Bernstein. Seine Formulierung für Klassen macht den konstruktiven Charakter dieses Satzes besonders deutlich und benötigt zum Beweis nur das extrem arme Tarski-Fragment (siehe Rückseite). Außerdem befassen wir uns dort mit einer Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes von Bourbaki. Damit lassen sich der klassische Wohlordnungssatz und die Rekursionssätze sehr einfach gewinnen.

Eines der wichtigsten Konstruktionsprinzipien für Funktionen ist das in unterschiedlichen Rekursionssätzen formulierte rekursive Definitionsverfahren. Rekursive Definitionen auf der Menge der natürlichen Zahlen kommen am häufigsten vor. Zur Mengenlehre gehört insbesondere die Frage, welche mengentheoretischen Voraussetzungen für die Gültigkeit der Rekursionssätze verantwortlich sind. Das ist in diesem Falle das Ersetzungsaxiom. Diese Frage stellen wir oft auch bei anderen Ergebnissen, zwecks besseren Verständnisses der Rolle der einzelnen Axiome.

Besonderer Dank gilt O. Deiser (Berlin) für Korrekturen, und P. Agricola für die Durchsicht von Teilen des Manuskripts und die Lösung technischer Probleme der vorliegenden PDF-LaTeX Version.

Berlin, Februar 2008
Wolfgang Rautenberg

Liste der mengentheoretischen Axiome und Axiomensysteme

Die Axiome von ZF:

AE	–	Extensionalitätsaxiom
AS	–	Aussonderungsschema
Apa	–	Paarmengenaxiom
AU	–	Vereinigungsaxiom
AP	–	Potenzmengenaxiom
AI	–	Unendlichkeitsaxiom
AR	–	Ersetzungsschema
AF	–	Fundierungsaxiom

Es ist $\mathsf{ZFC} = \mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ (Auswahlaxiom).

Ferner werden gelegentlich betrachtet

Z	$=$	$\mathsf{ZF} - \mathsf{AR}$;	ZC	$=$	$\mathsf{Z} + \mathsf{AC}$;
ZF^-	$=$	$\mathsf{ZF} - \mathsf{AF}$;	ZFC^-	$=$	$\mathsf{ZFC} - \mathsf{AF}$;
ZFC°	$=$	$\mathsf{ZFC} - \mathsf{AI}$;	$\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$	$=$	$\mathsf{ZFC}^\circ + \mathsf{Afin}$ (Endlichkeitsaxiom).

TF (Tarski-Fragment). Dieses umfasst die Axiome

$\forall x \forall y (x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x = y)$	–	Extensionalität
$\exists x \forall y\, y \notin x$	–	$\emptyset$ existiert
$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in x \vee u = y)$	–	$x \cup \{y\}$ existiert

Andere kurz diskutierte Axiome:

AD	–	Axiom der Determiniertheit
RP	–	Reflektionsprinzip
MA	–	Martins Axiom
$V{=}L$	–	Konstruktibilitätsaxiom

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Antinomien des naiven Mengenbegriffs und Auswege

Die viel zitierte Arbeit [Cantor 1895] beginnt mit der berühmten Definition

> Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Wenn man 'Anschauung' hier weit genug fasst, lässt lässt sich zum Beispiel von der Menge der Buchtitel eines Verlages, der Menge der Atome des Weltalls, der Menge aller reellen Zahlen, der Menge aller stetigen reellen Funktionen sprechen, usw. Dabei sind nicht nur naturgegebene Zusammenfassungen von Objekten gemeint, sondern gemeint ist vor allem der gedankliche Akt der beliebigen Zusammenfassung. Danach kann z.B. durchaus von der Menge bestehend aus einem Krokodil, der Zahl 7 und dem Planeten Jupiter gesprochen werden.

Aber auch um derartige Mengen geht es in der Mengenlehre genau genommen gar nicht. Die materielle Natur der Elemente einer Menge ist für die Mathematik in der Regel gänzlich belanglos. Die Mengenlehre verschafft sich ihre Mengen nicht aus der physikalischen Realität, sondern mittels eigens postulierter Existenzprinzipien. Diese sind der Wirklichkeit zwar nachempfunden, aber sie gehen z.B. bei der Formulierung des Unendlichkeitsaxioms über die der physikalischen Erfahrung unmittelbar zugänglichen Wirklichkeit hinaus. Sie entsprechen aber weitgehend plausiblen Forderungen und ihre Akzeptanz wird nicht nur durch Intuition sondern vor allem durch ihren erfolgreichen Gebrauch in der Mathematik bestimmt.

1.1 Teilmengen und die Identität von Mengen

Ist ein Objekt x Element einer Menge a, schreibt man $x \in a$. Ist dies nicht der Fall, schreibt man $x \notin a$. Mengen sind selbst Objekte unserer Anschauung und unseres Denkens, können also Elemente von anderen Mengen sein. Dies ist sogar die Regel, denn ein beliebiges Objekt kann mit der Gesamtheit seiner Erscheinungsformen oder gedanklichen Eigenschaften identifiziert und insofern als Menge angesehen werden. Man kann allerdings auch einen anderen Standpunkt einnehmen und das Vorhandensein sogenannter *Urelemente* postulieren; dies sind Objekte, die keine Mengen sind, aber Elemente von Mengen sein können. In der Mathematik kommt man jedoch ohne Urelemente aus. Dem trägt das mit ZFC bezeichnete System nach Zermelo–Fraenkel Rechnung (C von choice). In diesem sind Elemente von Mengen stets wieder Mengen. Auch entfällt eine Unterscheidung zwischen Mengen und sogenannten Mengensystemen oder Mengenfamilien. Diese sind immer auch Mengen.

Unabhängig von dem soeben Gesagten ist streng zu unterscheiden zwischen einem Objekt (z.B. einer Menge a) und der Menge, deren einziges Element das Objekt a ist und die mit $\{a\}$ bezeichnet wird. $\{a\}$ enthält genau ein Element und wird daher ein *Singleton* oder eine *Einermenge* genannt. In der axiomatischen Mengenlehre muss die Existenz von $\{a\}$ als Menge natürlich durch gewisse Axiome gesichert werden.

Kleinbuchstaben $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ dienen uns im Folgenden als Variablen sowohl für Mengen als auch für deren Elemente. Diese Bezeichnungsweise mag im ersten Moment als unbehaglich empfunden werden; aber sie ist ökonomisch und unterstreicht den Wegfall einer Gattungsunterscheidung zwischen Mengen und ihren Elementen. Einfache formale Notationen wie in der folgenden Definition verwenden wir zunächst nur intuitiv. Eine rigorose Formeldefinition erfolgt erst in **1.4**.

Definition. a heißt *Teilmenge* von b, symbolisch $a \subseteq b$, genau dann wenn jedes Element von a auch Element von b ist. Formal notiert $a \subseteq b \leftrightarrow \forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$.

Dieses sogenannte *Inklusionsprädikat* hat die Eigenschaften

$$(1)\ a \subseteq a, \quad (2)\ a \subseteq b \wedge b \subseteq c \rightarrow a \subseteq c, \quad (3)\ a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b.$$

Die Beweise von (1) und (2) sind völlig unproblematisch, siehe auch Übung 1. Dagegen bedarf (3) einer Diskussion.

Betrachten wir zunächst die Umkehrung von (3),

$$(4) \quad a = b \rightarrow a \subseteq b \wedge b \subseteq a.$$

Diese besagt, dass identische Mengen dieselben Elemente enthalten, oder identische Mengen sind *umfangsgleich*, wie man sich ausdrückt. Dies ist keine aus den Besonderheiten des Mengenbegriffs entspringende Eigenschaft, sondern gilt aus logischen Gründen, weil identische Objekte grundsätzlich dieselben Eigenschaften haben.

Hingegen kann man sich bei einer Argumentation für die Gültigkeit von (3) auf die Logik nicht berufen. Vielmehr formuliert (3), wie wir den Mengenbegriff zu verwenden wünschen. Kurzum, (3) ist ein Postulat oder ein Axiom, das für einen mathematisch nützlichen Mengenbegriff unbedingt zu verlangen ist. Man spricht auch vom *Extensionalitätsaxiom*; wir formulieren es explizit in der Weise

$$\mathsf{AE}: \quad \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b.$$

Wie gesagt, AE ist keine Tautologie wie z.B. die Umkehrung dieses Axioms. Aus dieser folgt mit AE zusammen $a = b \leftrightarrow \forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$. Kurzum, $=$ ist durch $\in$ explizit definierbar, so dass in einer formalisierten Mengenlehre auf die Identität als Grundbegriff prinzipiell verzichtet werden könnte. Das auch als $a \subseteq b \wedge b \subseteq a \rightarrow a = b$ formulierbare Axiom AE steht immer an der Spitze mengentheoretischer Axiomensysteme und wird allen Betrachtungen über Mengen unterstellt. Auch wenn man der Ansicht ist, dass das Extensionalitätsprinzip bereits im Wesen des naiven Mengenbegriffs steckt, darf dies nicht zu dem Schluss verleiten, es sei gleichgültig, ob man dies hervorhebt oder nicht. Denn die Ausführungen im nächsten Abschnitt werden zeigen, dass man sehr wohl genötigt ist hervorzuheben, was naive Anschauung zu beinhalten scheint. Andernfalls kann es geschehen, dass man schon nach den ersten Schritten der Entwicklung einer Theorie in Widersprüche gerät.

Ist $a \subseteq b$, aber $a \neq b$ (d.h. es existiert ein $x \in b$, $x \notin a$), so heißt a eine *echte* Teilmenge von b, symbolisch $a \subset b$. Auch in dieser Situation schreiben wir meist nur $a \subseteq b$, es sei denn, der Umstand $a \neq b$ soll besonders betont werden.

Übungen

1. Man bestätige die (ohne Axiome beweisbaren) Aussagen (1) und (2) im Text.
2. Eine 2-stellige Relation $\lessdot$ auf einer Menge M (alles in naivem Sinne) heißt *extensional*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat, die z.B. auf die naive $\in$-Relation, aber auch auf die echte Teilerrelation natürlicher Zahlen zutrifft:

   $$\text{für alle } a, b \in M\text{: wenn } x \lessdot a \;\Leftrightarrow\; x \lessdot b \text{ für alle } x \in M, \text{ so ist } a = b.$$

   Man gebe eine nicht-extensionale Relation auf einer 3-elementigen Menge an, womit rigoros nachgewiesen wäre, dass AE kein logisches Axiom ist.

1.2 Die Antinomien naiver Mengenbildung

Wir stellen zunächst fest, dass das Wesentliche des Cantorschen Mengenbegriffs die beliebige Zusammenfassung ist, und welches wir das naive *Mengenbildungsprinzip* nennen wollen. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die auf ein beliebiges Objekt a entweder zutrifft – in diesem Falle schreiben wir $\mathcal{E}(a)$ – oder nicht. Wir werden in 1.4 den Begriff der Eigenschaft präzisieren. Vorerst sei darunter ein sinnvoller sprachlicher Ausdruck verstanden, der etwas über unbestimmte Objekte x besagt. Das naive Mengenbildungprinzip besagt, dass man die Menge aller Objekte mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ bilden kann. Diese ist aufgrund der Extensionalität eindeutig bestimmt und sei mit $\{x \mid \mathcal{E}(x)\}$ bezeichnet. Demnach darf z.B. die Menge $\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$ gebildet werden. Weil grundsätzlich jedes Objekt a die Eigenschaft $a = a$ hat, enthält $\emptyset$ keine Elemente. $\emptyset$ heißt auch die *leere Menge*.

Man könnte einwenden, dass die ursprüngliche Wortbedeutung von *Menge* eine nichtleere Gesamtheit meint. Aber in der Mathematik ist es üblich, gewisse aus der Umgangssprache entlehnte Worte in ihrer Bedeutung einer zweckdienlichen Konvention zu unterwerfen. Statt „Die Menge der (reellen) Lösungen der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ist leer“ könnte man auch sagen „Eine Menge von Lösungen dieser Gleichung existiert nicht“, und ähnlich umständliche Formulierungen in analogen Zusammenhängen gebrauchen.

Nach dem naiven Mengenbildungsprinzip müsste die traditionell mit $\mathcal{V}$ bezeichnete Gesamtheit aller Mengen eine Menge sein, die „Menge aller Mengen“, heutzutage die *Klasse aller Mengen* genannt. Ferner darf auch die Menge $\mathcal{R} := \{a \mid a \notin a\}$ aller Mengen gebildet werden, die sich selbst nicht als Element enthalten, und zwar unabhängig von der Frage, ob es überhaupt Mengen gibt, die sich eventuell selbst als Elemente enthalten. $\mathcal{R}$ heiße die *Russellsche Menge*.

Mit Hilfe von $\mathcal{R}$ werden wir jetzt einen Widerspruch herleiten – die sogenannte *Russellsche Antinomie* [1)] Wir stellen zunächst fest, dass für beliebige Mengen a

$$a \in \mathcal{R} \leftrightarrow a \notin a.$$

Wählt man in dieser Äquivalenz $\mathcal{R}$ für a, so ergibt sich offenbar $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, also ein Widerspruch. Das Prinzip der uneingeschränkten Mengenbildung ist folglich

[1)] B. Russell (1872 – 1970) teilte seine Entdeckung in einem Brief an G. Frege (1848 – 1925) mit. Frege hat diese Antinomie in der Ausgabe seiner *Grundgesetze der Arithmetik* aus dem Jahre 1903 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht, obwohl die Antinomie seine eigene Begründung dieser Grundgesetze, die von naiver Mengenbildung Gebrauch machte, in Frage stellte.

inkonsistent. Der tiefere Grund ist der, dass die Definition von $\mathcal{R}$ auf die Gesamtheit aller Mengen Bezug nimmt, einschließlich auf $\mathcal{R}$ selbst. Dadurch gerät man in eine Art circulus vitiosus.

Hier noch eine zweite Antinomie. Eine Menge a heiße *fundiert*, wenn es keine unendliche Folge $a_1, a_2, a_3 \dots$ gibt mit $\dots a_3 \in a_2 \in a_1 \in a$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller fundierten Mengen. Ist $\mathcal{F}$ fundiert? Falls ja, so ist $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$, und wir enthalten eine unendliche Folge $\dots \in \mathcal{F} \in \mathcal{F} \in \mathcal{F}$, also ist $\mathcal{F}$ nicht fundiert – Widerspruch. Ist $\mathcal{F}$ nicht fundiert, so ist $\dots a_2 \in a_1 \in \mathcal{F}$ für eine gewisse nichtabbrechende Folge. Dann aber ist auch a_1 nicht fundiert, d.h. $\mathcal{F}$ enthält die nicht fundierte Menge a_1 – Widerspruch, denn $\mathcal{F}$ war doch die Menge aller fundierten Mengen.

Fundierte Mengen a werden meistens in einer etwas anderen Weise definiert, nämlich als diejenigen, für die die auf a eingeschränkte $\in$-Relation [2)] fundiert ist im Sinne von Übung 2. Kurzum, a heißt fundiert, wenn jede nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ ein $\in$-minimales Element v besitzt, d.h. $v \cap u = \emptyset$.

Bemerkung. Die letztgenannte Definition einer fundierten Menge ist die offizielle. Sie ist äquivalent mit der obigen, was aus Übung 2 leicht folgt. Ungeachtet dessen ist der Begriff *fundierte Menge* wohl zu unterscheiden von dem der *fundierten Relation*, wie er in Übung 2 formuliert ist. Mehr über Fundierung enthält Kapitel **2**.

Übungen

1. Das naive Mengenbildungsprinzip werde zum naiven Aussonderungsprinzip eingeschränkt: *Zu jeder Menge a und jeder Eigenschaft $\mathcal{E}$ existiert die Menge aller $x \in a$ mit $\mathcal{E}(x)$.* Man zeige, dieses hat zur Folge, dass die Gesamtheit $\mathcal{V}$ aller Mengen keine Menge sein kann.

   Hinweis. Wäre $\mathcal{V}$ Menge, könnte $\mathcal{R}$ ausgesondert werden.

2. Eine Relation $\lessdot$ auf einer Menge a heiße *fundiert*, wenn jede nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ ein $\lessdot$-minimales Element enthält, d.h. es gibt ein $x \in u$ mit $y \in a \setminus u$ für alle $y \lessdot x$. Man zeige in naiver Weise, diese Definition ist äquivalent mit der folgenden: es gibt keine Folge $x_0, x_1, \dots$ mit $x_i \in a$ und $\dots x_2 \lessdot x_1 \lessdot x_0$.

   Hinweis. Hat ein nichtleeres $u \subseteq a$ kein $\lessdot$-minimales Element, wähle man ein $x_0 \in u$, dann ein $x_1 \in u$ mit $x_1 \lessdot x_0$, usw. Hier sind das später ausführlich diskutierte Auswahlaxiom und der Rekursionssatz für ω involviert.

[2)] Das bedeutet, es werden vorübergehend nur Elemente $x, y \in a$ mit $x \in y$ betrachtet.

1.3 Wege zur Vermeidung der Antinomien

Wie kann man den genannten und möglichen anderen Antinomien entgehen? Es liegt auf der Hand, dass dies, wenn überhaupt, nur durch eine Einschränkung der naiven Mengenbildung verhindert werden kann. Hier gibt es nun durchaus unterschiedliche Wege. So hat Russell zu Beginn des Jahrhunderts, wenn auch mit ursprünglich anderen Zielsetzungen, den sogenannten *stufentheoretischen Aufbau* der Mengenlehre entwickelt. Grundgedanke ist eine Unterscheidung zwischen Urelementen, Mengen von Urelementen, (= Mengen 1. Stufe), Mengen von Mengen 1. Stufe (= Mengen 2. Stufe), usw. Wegen technischer Komplikationen im praktischen Umgang mit Mengen ist der Stufenaufbau bald in den Hintergrund gedrängt worden. Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich z.B. für eine zügige Theorie der Ordinal– und Kardinalzahlen. Keine dieser Schwierigkeiten ist jedoch grundsätzlicher Natur.

Eine ausschließlich die Mengenlehre (und nicht die Mathematik insgesamt) betreffende Axiomatisierung wurde 1906 zuerst von E. Zermelo (1871 – 1953) angegeben und 1922 von A. Fraenkel (1891 – 1965) ergänzt. Dieses heute meist verwendete, ZFC genannte System werden auch wir hier zugrundelegen. Es sollte gerechterweise hinzugefügt werden, dass die Ergänzung des Zermeloschen Systems schon einige Jahre vorher durch Mirimanov und unabhängig von Fraenkel auch von Skolem vorgeschlagen wurden. Seither wurde ZFC nicht mehr verändert.

Man kann die Zermelosche Mengenlehre in zwei Varianten präsentieren, je nachdem, ob man Urelemente zulässt oder nicht. Es ist jedoch technisch einfacher, Urelemente auszuschließen; darüber hinaus ist eine solche Vorgehensweise völlig ausreichend für die Mathematik. Schließlich ist sie auch philosophisch plausibel, weil Urelemente ihre Mengeneigenschaft möglicherweise nur „verbergen“. Wichtigstes Argument aber ist, dass Mengenlehre ohne Urelemente nachweislich ebenso leistungsfähig ist wie eine Mengenlehre, in der die Existenz von Urelementen nicht ausgeschlossen wird. Man kann eine Mengenlehre mit Urelementen auf der Basis von ZFC modellieren. Also ist der Ausschluss von Urelementen keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Nach der Entdeckung der mengentheoretischen Antinomien hat sich die Gewohnheit entwickelt, definierbare Gesamtheiten, über deren Mengencharakter man sich nicht (oder noch nicht) im Klaren ist, *Klassen* zu nennen, insbesondere also von der *Klasse aller Mengen* zu reden. Auch wir folgen dieser Gewohnheit, obwohl grundsätzlich darauf verzichtet werden kann, weil ja innerhalb des Zermeloschen Systems nur von Mengen die Rede ist. Was in diesem Zusammenhang das Wort *definierbar* bedeutet, wird im nächsten Abschnitt genau präzisiert.

Der Unterscheidung zwischen Mengen und Klassen trägt das axiomatische System NGB (von Neumann – Gödel – Bernays) Rechnung. Dieses formale System redet direkt über Klassen. Mengen sind diejenigen Klassen, die Element wenigstens einer Klasse sind. Siehe hierzu etwa [Friedrichsdorf/Prestel 1985]. Außer den erwähnten Systemen gibt es noch weitere, vornehmlich gewisse Varianten der oben angegebenen. Mit dem Vergleich der Leistungsfähigkeit dieser Systeme befaßt man sich heute kaum noch. Man weiss, diese Systeme leisten im Wesentlichen das Gleiche.

1.4 Die Sprache der Mengenlehre – Klassen

Die exakte Formulierung einiger mengentheoretischer Axiome erfordert die Präzisierung sprachlicher Ausdrucksmittel im Rahmen einer formalen mengentheoretischen Sprache, die wir mit $\mathcal{L}_\in$ bezeichnen. Das geschieht wie folgt:

Ausgehend von den *Variablen* $v_0, v_1, v_2, \ldots$, den *Prädikatzeichen* $=$ und $\in$ [3)], den *logischen Symbolen* $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, \exists, \forall$ und den beiden Klammersymbolen definiert man *Formeln* der mengentheoretischen Sprache $\mathcal{L}_\in$ als spezielle Zeichenfolgen aus den genannten Symbolen gemäß folgenden Festlegungen:

(a) Sind x, y Variablen, so sind $x = y$ und $x \in y$ Formeln, sogenannte *Primformeln.*

(b) Sind φ, ψ Formeln und ist x eine Variable, so sind $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, sowie $(\varphi \to \psi)$, $\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ Formeln.

Diese beiden Klauseln sind so zu verstehen, dass in diesem Zusammenhang lediglich die mit ihrem Gebrauch zu gewinnenden Zeichenfolgen Formeln von $\mathcal{L}_\in$ sind. Man schreibt $x \neq y$ für $\neg x = y$, und $x \notin y$ für $\neg x \in y$, sowie $(\exists x \in a)\varphi$ für $\exists x(x \in a \wedge \varphi)$ und $(\forall x \in a)\varphi$ für $\forall x(x \in a \to \varphi)$. Analog stehe $(\exists x \subseteq y)\varphi$ nach Einführung des Prädikatensymbols $\subseteq$ für $\exists x(x \subseteq y \wedge \varphi)$. Nicht nur Zeichenfolgen der Form $\exists x$ oder $\forall x$ sondern auch solche der Gestalt $(\exists x \in a)$, $(\forall x \in a)$ werden als *Präfixe* bezeichnet.

Außenklammern in fertig vorliegenden Formeln werden weggelassen. Zwecks weiterer Klammer-Ersparnis verabreden wir, dass in der Reihenfolge $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ jedes Symbol stärker trennt als die vorherigen, so wie $+$ stärker trennt als $\cdot$. Auch wird z.B. häufig $\forall xy\varphi$ anstelle von $\forall x\forall y\varphi$ geschrieben. Welche Abkürzungen auch immer verwendet werden, wesentlich ist, dass die gemeinte Formel eindeutig identifiziert

[3)] Dieses Symbol unterscheidet sich vom metasprachlich verwendeten $\in$-Symbol durch etwas kleineren Druck. Ebemso unterscheidet sich das im Formalismus benutzte Gleichheitszeichen $=$ vom metasprachlichen Gleichheitszeichen durch leichten Fettdruck.

werden kann. Man könnte die Anzahl der logischen Grundsymbole von $\mathcal{L}_\in$ erheblich reduzieren. Sehr bequem ist z.B. die Wahl der logischen Grundsymbole $\neg, \wedge, \forall$. Weitere Symbole wie $\vee, \exists$ werden dann durch geeignete Definitionen eingeführt, siehe etwa [Rautenberg 1996 oder 2006]. Die Symbolde $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ behalten wir uns für die metasprachliche Implikation bzw. Äquivalenz vor.

Der Formelaufbau verläuft in etwa parallel der natürlichen Sprechweise, so dass sich der Sinn kürzerer Formeln schnell entschlüsseln lässt. Dabei hat man sich vorzustellen, dass der Variablenbereich die Gesamtheit aller Mengen ist und Variablen nichts anderes als Mengen bezeichnen. So ist z.B. der Sinn der Formel $\neg\exists x\, x \in y$ der, dass die Menge y keine Elemente enthält. Dabei vertreten x, y irgend zwei Variablen aus der Variablenliste $v_0, v_1, v_2, \ldots$ Beliebige Buchstaben können irgendwelche Variablen vertreten. Aus dem Kontext wird hervorgehen, ob verschiedene Buchstaben tatsächlich verschiedene Variablen meinen.

Die Variable x ist in $\neg\exists x\, x \in v$ gebunden, während v dort frei vorkommt. Eine Variable *v kommt in φ frei vor*, wenn sie an wenigstens einer Stelle ihres Vorkommens in φ frei vorkommt, d.h. an dieser Stelle nicht in einer Subformel der Gestalt $\forall v\psi$ oder $\exists v\psi$ vorkommt. Formeln, in denen keine Variable frei vorkommt, heißen *Aussagen*. So ist $\forall x \exists y\, x \in y$ eine Aussage; sie besagt 'jede Menge x ist Element einer gewissen Menge y'. Aussagen geben Sachverhalte über Mengen wieder, während eine Formel φ mit der freien Variablen v eine Eigenschaft von v definiert. So definiert z.B. $\exists x\, x \in v$ die Eigenschaft von v, nichtleer zu sein.

Die Schreibweise $\varphi(v)$ für eine Formel φ soll bedeuten, dass das möglicherweise freie Vorkommen der Variablen v in φ besonders hervorgehoben werden soll. Ist in einem solchen Zusammenhang gleichzeitig von $\varphi(u)$ die Rede, meint man hiermit die aus $\varphi(v)$ dadurch entstehende Formel, dass v an den Stellen des freien Vorkommens in φ durch u ersetzt oder umbenannt wird (sogenannte *freie Umbenennung*). Dabei wird stillschweigend angenommen, dass u in φ nicht frei vorkommt, so dass $\varphi(v)$ aus $\varphi(u)$ durch Rückbenennung von u in v wiedergewonnen werden kann.

Die Formel $\exists v\varphi(v) \wedge \forall uv(\varphi(u) \wedge \varphi(v) \rightarrow u = v)$ werde durch $\exists! v\varphi$ abgekürzt (gelesen: *es gibt genau ein v mit der Eigenschaft $\varphi(v)$*). Eine kürzere, mit $\exists! v\varphi(v)$ logisch äquivalente Formel ist $\exists v \forall u(\varphi(u) \leftrightarrow u = v)$.

Unter der *Generalisierten* einer Formel φ versteht man die Aussage $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$. Dabei ist $x_1, \ldots, x_n$ eine Aufzählung der freien Variablen von φ in kanonischer Reihenfolge, etwa nach aufsteigendem Variablenindex. So ist $\forall x \forall y\, x \in y$ die Generalisierte von $x \in y$. Die Generalisierte einer Aussage ist diese Aussage selbst.

Eine durch eine $\mathcal{L}_\in$–Formel $\varphi(v)$ beschriebene Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Mengen heißt *definierbar* oder kurz eine *definite* Eigenschaft. So heißt z.B. eine Menge a *transitiv*, wenn $\forall bc(c\in b\wedge b\in a \to c\in a)$ oder gleichwertig $(\forall b\in a)b\subseteq a$. Um den Antinomien zu entgehen, wird man die Gesamtheit aller Mengen, welche eine durch $\varphi(v)$ definierte Eigenschaft haben, nicht ohne weiteres als Menge bezeichnen dürfen. Man nennt diese Gesamtheit daher eine *Klasse* und bezeichnet sie mit $\{v \mid \mathcal{E}(v)\}$ oder $\{v \mid \varphi(v)\}$ oder auch nur $\{v \mid \varphi\}$. Diese Ausdrücke, auch *Klassenterme* genannt, gehören nicht zur formalen Theorie sondern zur Metatheorie. Man ist nicht gezwungen, zwischen definiten Eigenschaften, Klassen (oder Klassentermen) und den sie definierenden Formeln strikt zu unterscheiden, da es sich nur um unterschiedliche Aspekte derselben Sache handelt. Der Umgang mit Klassen ist in der Regel jedoch etwas einfacher als der mit Formeln.

Weiter unten eine Liste von Beispielen für Klassen. Ist $\mathcal{C}$ die Klasse $\{v \mid \varphi(v)\}$, so sei $x\in\mathcal{C}$ oder $x\in\{v \mid \varphi(v)\}$ nur eine andere Schreibweise für $\varphi(x)$. Diese scheinbare Umständlichkeit ist eine nützliche Konvention, die sich bald auszahlen wird.

$\mathcal{R} = \{v \mid v\notin v\}$ – die Russellsche Klasse.

$\mathcal{V} = \{v \mid v=v\}$ – die Klasse aller Mengen, auch *Allklasse* genannt.

$\mathcal{V}^{(1)} = \{v \mid (\exists x\in v)(\forall y\in v)y=x\}$ – die Klasse der Einermengen.

$\{a,b\} = \{v \mid v=a\vee v=b\}$ – die *Paarklasse* aus a,b.

$\bigcup\mathcal{C} = \{v \mid (\exists x\in\mathcal{C})v\in x\}$ – die *Vereinigungsklasse*, kurz die *Vereinigung* von $\mathcal{C}$

$\bigcap\mathcal{C} = \{v \mid (\forall x\in\mathcal{C})v\in x\}$ – die *Durchschnittsklasse*, kurz *Durchschnitt* von $\mathcal{C}$.

$\mathfrak{P}(a) = \{v \mid v\subseteq a\}$ – die Klasse aller Teilmengen von a.

$\mathcal{T}r = \{v \mid (\forall u\in v)u\subseteq v\}$ – die Klasse aller transitiven Mengen.

Entsprechend heiße $\mathcal{C}$ eine *transitive Klasse*, wenn $(\forall a\in\mathcal{C})a\subseteq\mathcal{C}$. Triviale Beispiele sind $\mathcal{C}=\emptyset$ und $\mathcal{C}=\mathcal{V}$, viele andere werden wir noch antreffen. Skriptbuchstaben $\mathcal{A},\mathcal{B},\dots$ bezeichnen Klassen. $\{a,b\}$ und $\mathfrak{P}(a)$ sind Beispiele für Operationen auf $\mathcal{V}$, wie wir später noch sehen werden. Sei $\mathcal{A} := \{v \mid \varphi\}$ und $\mathcal{B} := \{v \mid \psi\}$. Man schreibt $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, falls $\forall v(v\in\mathcal{A} \leftrightarrow v\in\mathcal{B})$, d.h. nach Konvention für die $\mathcal{L}_\in$–Aussage $\forall v(\varphi\leftrightarrow\psi)$. Für diesen erweiterten Gebrauch von $=$ sind die üblichen Eigenschaften von $=$, nämlich $\mathcal{A}=\mathcal{A}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}\to\mathcal{B}=\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}=\mathcal{B}\wedge\mathcal{B}=\mathcal{C}\to\mathcal{A}=\mathcal{C}$ ohne Rückgriff auf Mengenaxiome allein mit den Regeln der Logik leicht beweisbar.

Eine vorteilhafte Konvention ist auch die Schreibweise $a=\mathcal{A}$ für $\forall x(x\in a\leftrightarrow x\in\mathcal{A})$, d.h. für $\forall x(x\in a\leftrightarrow\varphi)$. Auch das geht konform mit den Identitätsgesetzen. So ist z.B. $a=\{v \mid v\in a\}$ trivial beweisbar. Denn dies heißt $\forall v(v\in a\leftrightarrow v\in\{v \mid v\in a\})$ und damit lediglich $\forall v(v\in a\leftrightarrow v\in a)$. Ebenso ist z.B. $\mathcal{A}=a\wedge\mathcal{A}=b\to a=b$ beweisbar.

Denn die Prämisse dieser Implikation besagt $\forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in a) \wedge \forall x(x \in \mathcal{A} \leftrightarrow x \in b)$. Hieraus folgt $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$ und somit $a = b$ nach AE.

Für Klassen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ verwendet man die Inklusionsbeziehung $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ wie für Mengen. So ist z.B. $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ für jede Klasse $\mathcal{C}$. Ferner erklärt man *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Komplement* von Klassen $\mathcal{A} := \{v \mid \varphi\}$ und $\mathcal{B} := \{v \mid \psi\}$ wie folgt:

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{v \mid \varphi \vee \psi\}, \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{v \mid \varphi \wedge \psi\}, \quad \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{v \mid \varphi \wedge \neg\psi\}.$$

Dann sind die üblichen Regeln der Mengenalgebra auch für beliebige Klassen leicht beweisbar, Übung 1. Sie gelten dann speziell für Mengen.

Tatsächlich sind Klassen in der Mengentheorie ZFC nur ein Hilfsmittel zur geeigneten linguistischen Verkleidung von $\mathcal{L}_\in$-Aussagen. Sprachpartikel wie '$a \in \mathcal{A}$', '$b = \mathcal{B}$', usw. lassen sich aufgrund obiger Konventionen nicht nur als $\mathcal{L}_\in$-Aussagen deuten, sondern sie sind es! So kann die Äußerung 'die Klasse $\mathcal{R}$ ist eine Menge' nur als die Aussage $\exists r\, r = \mathcal{R}$, d.h. $\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \in \mathcal{R})$ verstanden werden, die ganz ausführlich lautet $\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \notin v)$. Diese impliziert $\neg\exists r\, r = \mathcal{R}$ (in Worten: $\mathcal{R}$ ist keine Menge), was die linguistische Verkleidung der $\mathcal{L}_\in$-Aussage $\neg\exists r\, \forall v(v \in r \leftrightarrow v \notin v)$ darstellt.

Dies ist ein lehrreiches Beispiel dieser *façon de parler*, die es gestattet, mengentheoretische Sätze anschaulich und prägnant zugleich zu formulieren. Klassen verhalten sich in ihrer linguistischen Rolle fast genauso als wären sie Mengen. Es ist nicht verboten, sondern eher geraten, sich Klassen als Objekte vorzustellen. Nur sind sie eben keine Objekte unserer Theorie, es sei dann sie erweisen sich als Mengen.

Übungen

1. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Klassen und sei $\setminus\mathcal{A} := \mathcal{V} \setminus \mathcal{A}$. Man zeige

   $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$; $\quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$; $\quad \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}$;

   $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$, $\quad \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$; $\quad \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$;

   $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$; $\quad \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$;

   $\setminus(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \setminus\mathcal{A} \cap \setminus\mathcal{B}$, $\quad \setminus(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \setminus\mathcal{A} \cup \setminus\mathcal{B}$; $\quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} = B$.

   Hinweis. Sei etwa $\mathcal{A} = \{x \mid \varphi(x)\}$, $\mathcal{B} = \{x \mid \psi(x)\}$. Dann bedeutet $x \in \mathcal{A} \cup B$ dasselbe wie $\varphi(x) \vee \psi(x)$ und $x \in \mathcal{B} \cup A$ dasselbe wie $\psi(x) \vee \varphi(x)$.

2. Man beweise die Äquivalenz von

   $$\text{(i) } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \quad \text{(ii) } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}, \quad \text{(iii) } \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}, \quad \text{(iv) } \mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \emptyset.$$

3. Man zeige $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$. (Vorerst sind $a \cup b$ und $\{a, b\}$ nur Klassen.)

1.5 Spracherweiterung von $\mathcal{L}_\in$

Wir werden uns im Folgenden einer üblichen Praxis bei der axiomatischen Entwicklung einer Theorie bedienen, nämlich Bezeichnungen wohldefinierter Objekte in die Theorie einbeziehen um die Ursprache $\mathcal{L}_\in$ auf diese Weise schrittweise zu erweitern. Wir sprechen dann von einer *Spracherweiterung*. Solche Symbole werden sein:

(a) *Prädikatensymbole*, z.B. $\subseteq$,

(b) *Individuensymbole* (*Konstanten* genannt), z.B. $\emptyset$ und ω,

(c) *Operationssymbole*, z.B. $\bigcup$ und $\mathfrak{P}$,

(d) Mengenterme (siehe unten).

Derartige Symbole werden durch *explizite Definitionen* eingeführt. Ein Beispiel ist $a \subseteq b \leftrightarrow \forall x(x \in a \to x \in b)$. Eine solche Spracherweiterung $\mathcal{L}'_\in$ ist unter Beachtung naturgegebener Bedingungen harmlos, genauer gesagt, *konservativ*, d.h. es ist unmöglich, durch logische Manipulation in $\mathcal{L}'_\in$ Aussagen der Ursprache $\mathcal{L}_\in$ zu beweisen, die nicht schon im Rahmen von $\mathcal{L}_\in$ beweisbar wären. In $\mathcal{L}'_\in$ können auch nicht mehr Mengen ausgesondert werden als vorher, obwohl $\mathcal{L}'_\in$ unter Umständigen mehr Primformeln (z.B. $x \subseteq y$) und nebst Variablen auch kompliziertere Terme enthalten kann. Es ist wichtig zu wissen, dass man die neuen Symbole aus den Formeln auch wieder entfernen kann. Der mit Techniken der mathematischen Logik nicht vertraute Leser sollte dies schlicht zur Kenntnis nehmen und sich an der Intuition orientieren. Strenge Beweise werden z.B. in [Rautenberg 1996 oder 2006] ausgeführt.

Tatsächlich ließe sich die Entwicklung der Theorie gänzlich in $\mathcal{L}_\in$ vollziehen, so dass die Verwendung definierter Symbole eine äußerliche Angelegenheit eines riesigen Abkürzungsunternehmens bliebe. Aber es ist viel übersichtlicher, die Sprache $\mathcal{L}_\in$ um definierte Symbole schrittweise zu erweitern und definierte Symbole explizit in der Theorie zu benutzen. Unabhängig davon ist angeraten, auch einige weitere wohldefinierte logische Symbole in den Formalismus einzubeziehen. Wir erwähnten schon $\exists!$ (es gibt genau ein). Ebenso nützlich ist der Quantor $\exists^{\leqslant 1}$ (es gibt höchstens ein). Es sei $\exists^{\leqslant 1} x\varphi(x) := \forall xy(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \to x = y)$, so dass die bereits definierte Formel $\exists! x\varphi(x)$ dasselbe bedeutet wie $\exists x\varphi(x) \wedge \exists^{\leqslant 1} x\varphi(x)$.

Bei der Einführung von Symbolen gemäß (b) und (c) sind gewisse Bedingungen zu beachten. Zwecks einheitlicher Formulierung seien Konstanten auch als 0-stellige Operationssymbole bezeichnet. Dann lässt sich eine einzige Vorsichtsmaßnahme zur Sicherung des konservativen Charakters der Spracherweiterung um Symbole für überall definierte Operationen wie folgt formulieren:

($*$) Ein n–stelliges Operationssymbol F, definiert durch die Formel $\varphi(\vec{x}, y)$, darf dann eingeführt werden, wenn vorher $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ bewiesen wurde.

Die Einführung von F geschieht durch Hinzufügen der expliziten Definition

$$(\delta) \quad F(\vec{x}) = y \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$$

zur Theorie. $\varphi(\vec{x}, y)$ heißt die *definierende Formel*. Die Bedingung der Beweisbarkeit von $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ ist gleichwertig mit der von $\forall\vec{x}\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$. Sie sichert den konservativen Charakter der Spracherweiterung und ist dafür nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Denn (δ) ergibt durch Substitution von $F(\vec{x})$ für y links in (δ) die Beweisbarkeit von $\varphi(\vec{x}, F(\vec{x}))$, also von $\exists y\varphi(\vec{x}, y)$ und alsdann von $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$. Dabei steht $\vec{x}$ hier überall für $x_1, \dots, x_n$ ($n \geqslant 0$). Höchstens dies sind nebst y die freien Variablen von φ. Hier und überall steht $\forall\vec{x}$ für $\forall x_1 \dots \forall x_n$. Für $n = 0$ sind $\vec{x}$ und $\forall\vec{x}$ leer und (δ) hat die Gestalt $c = y \leftrightarrow \varphi(y)$ mit einer Konstanten c.

Beispiele. Als definierende Formel $\varphi(y)$ für die Konstante $\emptyset$ bietet sich $\neg\exists x\, x \in y$ an. AE und AS werden es gestatten, $\exists! y\varphi(y)$ zu beweisen. Das sogenannte Potenzmengenaxiom wird lauten $\exists y\, y = \{x \mid x \subseteq a\}$, oder ausführlicher $\exists y\forall x(x \in y \leftrightarrow x \subseteq a)$. Auch hier ist $\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$, im vorliegenden Falle also $\exists! y\, y = \{x \mid x \subseteq a\}$ beweisbar. Damit darf das Symbol $\mathfrak{P}$ für die entsprechende Operation in $\mathcal{L}_\in$ eingeführt werden.

Am häufigsten kommen Erweiterungen von $\mathcal{L}_\in$ um sogenannte Mengenterme vor. Ein Klassenterm $\{v \mid \varphi\}$ heiße ein *Mengenterm*, wenn $\exists y\, y = \{v \mid \varphi\}$, d.h. wenn (nach Konvention auf Seite 9) $\exists y\forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi)$ beweisbar ist. Dabei ist y eine in φ nicht frei vorkommende Variable. Mit AE folgt hieraus unschwer $\exists! y\forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi)$, was der weniger erfahrene Leser unbedingt verifizieren sollte (Übung). Mengenterme dürfen ähnlich wie Operationssymbole in die Theorie eingeführt werden. Wir werden nämlich zeigen, dass sie nur Bezeichnungen für die Werte gewisser Operationen darstellen. Wegen der Beweisbarkeit von $\exists! y\, y = \{v \mid \varphi\}$ bezeichnet z.B. $\{v \mid \varphi\}$ ein wohlbestimmtes Element (eine Konstante, etwa $\emptyset$), falls φ außer v keine freien Variablen enthält, und im Falle $\varphi = \varphi(v, x)$ das Ergebnis einer einstelligen Operation, wie z.B. der mit $\mathfrak{P}(x)$ bezeichnete Mengenterm $\{v \mid v \subseteq x\}$ in obigen Beispielen. Im allgemeinen Falle ist die Formel φ im Mengenterm von der Gestalt $\varphi = \varphi(v, \vec{x})$ mit dem Tupel $\vec{x}$ der von v verschiedenen freien Variablen in φ, und es ist $\exists! y\forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi(v, \vec{x}))$ beweisbar. Sei y nicht frei in φ. Dann definiert

$$\psi(\vec{x}, y) := \forall v(v \in y \leftrightarrow \varphi(v, \vec{x}))$$

wegen der Beweisbarkeit von $\exists! y\psi(\vec{x}, y)$ offenbar eine n–stellige Operation F. Also ist $y = F(\vec{x})$ äquivalent zu $\psi(\vec{x}, y)$, was gerade $y = \{v \mid \varphi(v, \vec{x})\}$ bedeutet. Daher folgt $F(\vec{x}) = \{v \mid \varphi(v, \vec{x})\}$. Der Mengenterm auf der rechten Seite ist mithin nichts anderes als eine Bezeichnung für den Wert der auf $\mathcal{V}$ definierten Operation F an der Stelle $\vec{x}$, ohne dass F explizit erwähnt wird. Diese Bezeichnung trägt die gesamte, F auszeichnende Information mit sich, das ist ihr großer Vorteil.

Von der Erlaubnis zur Einführung von Mengentermen macht man meistens nur vorübergehend Gebrauch, z.B. in Beweisen. Ist ein Mengenterm von bleibender Bedeutung, so erteilt man der ihm entsprechenden Operation sowohl ein neues Symbol als auch einen neuen Namen. wie in den Beispielen auf der Vorseite.

Es ist bequem, auch die Einführung von Symbolen für partiell (nicht überall) definierte Operationen zu gestatten, z.B. für die an der Stelle $x = \emptyset$ nicht sinnvoll definierbare Operation $x \mapsto \bigcap x$, siehe Seite 18. Die Einführung eines solchen, sagen wir gleich n–stelligen Symbols F, lässt sich mit einem Trick rechtfertigen. Für die definierende Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ für F sei $\exists^{\leqslant 1} y \varphi(\vec{x}, y)$, aber nicht notwendig $\exists! y \varphi(\vec{x}, y)$ beweisbar. Anstatt durch φ werde F neu definiert mittels der Formel

$$\varphi'(\vec{x}, y) := \varphi(\vec{x}, y) \vee \neg \exists z \varphi(\vec{x}, z) \wedge y = \emptyset,$$

für die $\exists! y \varphi'(\vec{x}, y)$ gewiss beweisbar ist. Dadurch wird F künstlich zu einer auf $\mathcal{V}$ überall definierten Operation. Eine derartige, willkürliche Resultate liefernde Erweiterung von F hat nur einen sehr begrenzten Nutzen. Es ist besser, sie gar nicht zu erwähnen oder sie anschließend wieder zu vergessen. So kann z.B. durch keine Erklärung von $\bigcap s$ für $s = \emptyset$ das Distributivgesetz $x \cup \bigcap s = \bigcap \{x \cup y \mid y \in s\}$ gerettet werden, ebensowenig wie z.B. durch die Konvention $\frac{1}{0} = 0$ das lästige Problem des Dividierens durch Null nicht aus der Welt zu schaffen ist.

Wichtiger als die künstliche Erweiterung von F ist eine vorsichtige Verwendung des Terms $F(\vec{x})$. So sollte bei der Verwendung von $\bigcap s$ stets $s \neq \emptyset$ zumindest implizit angenommen werden. Der Übersicht halber beschränken wir unsere Betrachtungen auf einstellige partielle Operationen. Nur diese spielen nachfolgend eine Rolle. Wir nennen einstellige partielle Operationen auch *Operatoren* oder *Abbildungen* [4)]. Ist F ein durch $\varphi(x, y)$ definierter Operator, heiße $\mathit{dom}\, F := \{x \mid \exists y \varphi(x, y)\}$ dessen *Definitionsbereich* (domain). Im Falle $\mathcal{A} \subseteq \mathit{dom}\, F$ darf auch $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ für die Mitteilung $(\forall x \in \mathcal{A})(\exists! y \in \mathcal{B}) \varphi(x, y)$ geschrieben werden. Nur unter der Zusatzannahme $x \in \mathit{dom}\, F$ darf von der Definitionsäquivalenz (δ) Gebrauch gemacht werden. Jede darüber hinaus gehende Verwendung von (δ) gefährdet den konservative Charakter der Spracherweiterung.

[4)] Eine solche Sprachreglung ist jedoch nicht allgemeinverbindlich, weil manche Autoren diese Namen z.B. synonym mit Funktionen verwenden.

Der Wert $F(x)$ an der Stelle $x \in \mathit{dom}\, F$ ist wohl zu unterscheiden von der Klasse

$$F[a] := \{y \mid (\exists x \in a) y = F(x)\} \ (= \{y \mid (\exists x \in a)\varphi(x,y)\}),$$

genannt das *Bild* von a unter F. Man beachte, $F[a]$ ist für jede Menge a wohldefiniert, auch wenn $F(x)$ für einige $x \in a$ nicht erklärt ist. Es kann sogar $\mathit{dom}\, F \cap a = \emptyset$ sein. In diesem Falle gilt $F[a] = \emptyset$. Falls $a \subseteq \mathit{dom}\, F$, darf $F[a]$ auch mit $\{F(x) \mid x \in a\}$ bezeichnet werden.

Wir bezeichnen die durch explizit definierte Prädikaten- und Operationssymbole oder auch gewisse Mengenterme schrittweise erweiterte mengentheoretische Sprache im Folgenden einfach wieder mit $\mathcal{L}_\in$. Falls erforderlich, sprechen wir von der *Ursprache* $\mathcal{L}_\in$ als derjenigen, die nur die Originalsymbole $=$ und $\in$ enthält. Dies alles ist natürlich nur deswegen erlaubt, weil die Theorie in der erweiterten Sprache eine konservative Erweiterung der Originaltheorie ist.

Unberührt von diesen Ausführungen sind unsere in **1.4** getroffenen Konventionen über die Benutzung von Klassentermen zwecks Mitteilung von Sachverhalten über Mengen. Klassenterme werden nicht als formale Objekte der Theorie betrachtet, obwohl man auch dieses hätte tun können. Für uns genügt es, dass der Umgang mit ihnen durch gewisse Vereinbarungen geregelt worden ist.

Bemerkung. In diesem Zusammenhang stellt sich folgende Frage: Läßt sich entscheiden, ob ein vorgelegter Klassenterm $\{v \mid \varphi(v)\}$ bezüglich ZFC oder einer ähnlichen Theorie ein Mengenterm ist, jedenfalls dann, wenn $\{v \mid \varphi(v)\}$ keine Parameter enthält? Leider nein. Es gibt nachweislich keinen Algorithmus, der auch nur für die parameterfreien Klassenterme in den gängigen axiomatischen Mengentheorien entscheidet, ob es sich um einen Mengenterm handelt oder nicht, was natürlich von der gewählten Theorie abhängt. Feststellungen, dass diese oder jene Klasse sagen wir in ZFC eine Menge ist oder keine Menge sein kann, sind daher in jedem Einzelfalle zu begründen.

Übungen

1. Es sei $\{v \mid \varphi(v)\}$ ein Mengenterm, d.h. $\exists y\, y = \{v \mid \varphi(v)\}$ sei beweisbar. Man zeige, dann ist auch $\exists! y\, y = \{v \mid \varphi(v)\}$ beweisbar.

   Hinweis. y kommt in φ nicht frei vor.

2. Man gebe eine Formel $\varphi(x, y)$ an, die einen nirgends definierten partiellen Operator F repräsentiert. $F[a]$ ist dann leer für jede Menge a.

Kapitel 2

Die Axiome von Zermelo–Fraenkel

Wir werden nunmehr die Axiome von ZFC (nach Zermelo und Fraenkel) vorstellen und ausführlich diskutieren. Wesentlich zu ihrer Präzisierung hat auch T. Skolem (1887 – 1963) beigetragen. Interessant sind neben diesen Axiomen vor allem die in $\mathcal{L}_\in$ formulierbaren Folgerungen hieraus, die Sätze oder Theoreme der Mengenlehre. Aussagen, die über ZFC reden, in $\mathcal{L}_\in$ selbst aber nicht formulierbar sind, sind streng genommen keine Aussagen der Mengenlehre; sie haben einen anderen Status. Dazu gehören Aussagen wie z.B. ZFC ist nicht endlich axiomatisierbar.

Die Sätze der Mengenlehre werden aus den Axiomen mit logischen Mitteln hergeleitet. Es würde eine zügige Entwicklung die Theorie nur hemmen, wollten wir auch diese Mittel genau spezifizieren, d.h. formalisieren. Es genügt der Hinweis, dass man dazu in der Lage wäre. Das logische Schließen vollzieht sich im Folgenden naiv, wobei wir uns in das jeweils betrachtete Fragment von ZFC hineinversetzen.

Wir benötigen in jedem Falle nur elementare logische Hilfsmittel wie man sie in der Mathematik erlernt und anwendet. Oft reden wir über die Theorie oder ihre Sprache $\mathcal{L}_\in$. Dann bewegen wir uns in der *Metatheorie*. Dort werden wir nur unmittelbar einsichtige, sogenannte *finite* Hilfsmittel verwenden.

Die Existenz wenigstens einer Menge wird in manchen Beschreibungen formaler Systeme der Mengenlehre als Extra-Axiom genannt. In $\mathcal{L}_\in$ lässt sich das formulieren als $\exists v\, v = v$. Dies aber ist aus logischen Gründen schon klar, weil die angegebene Formel eine Tautologie ist. Es gibt also eine Menge. Ein anderes Problem ist es, aus der Existenz einer Menge schon auf die Existenz der leeren Menge zu schließen. Das geht nicht mit logischen Mitteln, ist aber eine einfache Folge des in **2.1** diskutierten Aussonderungsaxioms und des Extensionalitätsaxioms.

2.1 Das Aussonderungsaxiom

Das Extensionalitätsaxiom $\mathsf{AE}: \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$ wurde in Kapitel **1** schon ausführlich diskutiert. Der bloßen Schreibweise nach ist AE keine Aussage. Hier ist gemeint, dass AE für alle x, y gilt, d.h. AE meint eigentlich die Aussage

$$\forall xy(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Dabei vereinbaren wir hier ein für allemal: Enthält φ möglicherweise freie Variablen und ist von der *Aussage* oder dem *Axiom* φ die Rede, dann ist die Generalisierte von φ gemeint. Eine Formel ist in einer Theorie nämlich dann und nur dann beweisbar, wenn ihre Generalisierte dort beweisbar ist. Anschaulich gesprochen: es ist gleichgültig, ob man zeigt 'Für alle ...' oder aber 'Für beliebiges...'.

Es war eine der entscheidenden Ideen Zermelos, die uneingeschränkte Mengenbildung zum sogenannten *Aussonderungsaxiom* AS einzuschränken:

AS : Ist a eine Menge, $\mathcal{E}$ eine definite Eigenschaft, dann existiert die Menge aller $v \in a$ mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Ist $\mathcal{E}$ durch $\varphi(v)$ definiert, lässt AS sich in $\mathcal{L}_\in$ in der Weise $\exists y \forall v(v \in y \leftrightarrow v \in a \wedge \varphi)$ oder kürzer $\exists y\, y = \{v \mid v \in a \wedge \varphi\}$ schreiben, wobei y in φ selbstredend nicht frei vorkommt. Diese Niederschrift von AS besagt offenbar $\{v \mid v \in a \wedge \varphi\}$ ist ein Mengenterm. Man notiert diesen in der Regel kürzer als $\{v \in a \mid \varphi\}$.

AS ist genau gesagt ein *Aussagenschema*, weil $\varphi = \varphi(v, a)$ eine beliebige Formel aus $\mathcal{L}_\in$ sein kann, die v, a in der Regel als freie Variablen enthält (aber nicht enthalten muss) und nebst v, a weitere freie Variablen, sogenannte *Parameter*.

Wie in **1.5** ausführlich erläutert wurde, kann der Mengenterm $\{v \in a \mid \varphi\}$ als bequeme Bezeichnung für diejenige Operation angesehen werden, die definiert wird durch

$$\psi(a, b) := \forall v(v \in b \leftrightarrow v \in a \wedge \varphi).$$

Bevor wir fortfahren, wollen wir uns überzeugen, dass Russells Argument nunmehr nicht zu einem Widerspruch, sondern zu einer wichtigen Schlussfolgerung führt. Der Russellschen Menge entspricht die gemäß AS existierende Menge $b = \{x \in a \mid x \notin x\}$, wobei a eine Menge ist, die wir uns im Hinblick auf eine Strategie, der Russellschen Antinomie so nahe wie möglich zu kommen, als möglichst umfassend denken. Gemäß Definition von b gilt $\forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin x)$, also

$$(*) \quad b \in b \leftrightarrow b \in a \wedge b \notin b.$$

Die Annahme $b \in b$ liefert $b \notin b$ nach $(*)$ und damit einen Widerspruch. Also folgern wir $b \notin b$. Dies und die Zusatzannahme $b \in a$ ergeben $b \in b$ nach $(*)$, und wir entgehen einem Widerspruch nur dadurch, dass die Zusatzannahme $b \in a$ fallengelassen, also der Schluss $b \notin a$ gezogen wird. Kurz gesagt, $(*)$ impliziert $b \notin a$ und daher $\exists x x \notin a$. Damit wurde gezeigt, dass jede noch so große Menge wenigstens eine Menge nicht als Element enthält. Anders formuliert, die Allklasse kann keine Menge sein.

Es erhebt sich die Frage, ob nicht das Aussonderungsprinzip eine eventuell unnötige Einschränkung der Mengenbildung darstellt. Wie kommt man nach diesem Prinzip überhaupt zu neuen Mengen, über Teilmengen schon vorhandener Mengen hinaus?

Dafür müssen jeweils gesonderte Existenzprinzipien angegeben werden. Hierbei lässt man sich von Gesichtspunkten leiten, die teils durch Intuition, im Wesentlichen aber von praktischen Erfordernissen diktiert sind. Zwar handelt es sich nur um wenige Prinzipien; aber diese liefern eine mehr als ausreichende Fülle von Mengen.

Die leere Menge erhält man wie folgt: Nach AS gilt $(*)$ $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin a)$. Nun liefert $\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in a \wedge x \notin a)$ offenbar $\forall x x \notin y$ und $(*)$ damit $\exists y \forall x x \notin y$. AE ergibt darüber hinaus $\exists ! y \forall x x \notin y$. Also ist die Einführung des Konstantensymbols $\emptyset$ durch $y = \emptyset \leftrightarrow \forall x x \notin y$ eine legitime explizite Definition.

Mehr lässt sich in diesem Stadium der Theorie nachweislich noch nicht erhalten. Denn es ist leicht zu sehen, dass AE nd AS in einem Modell erfüllt sind, das einzig aus der leeren Menge besteht. In diesem wäre $\mathcal{V} = \{\emptyset\}$ das „Universum“ und damit keine Menge im Sinne des Modells. Das verdeutlicht, wie schwach Extensionalität und Aussonderung für sich genommen sind.

Warum beschränkt man sich bei der Aussonderung aus einer gegebenen Menge auf definite Eigenschaften? Warum erlaubt man sich die Aussonderung nach irgendwelchen sinnvoll definierten Eigenschaften? Zwar reicht die definite Aussonderung für alle praktischen Zwecke, aber der tiefere Grund ist, dass schrankenlose Aussonderung erneut zu Widersprüchen führen würde, wie folgendes Beispiel zeigt.

Man betrachte in der Theorie die Menge ω der natürlichen Zahlen, die wir wenig später definieren werden. Hier ist nur wesentlich, dass jedes nichtleere $a \subseteq \omega$ ein kleinstes Element μa besitzt. Dabei ist zu beachten, dass $\mu\emptyset$ nicht erklärt ist. Falls $\mu a < n$ für alle $n \in b \subseteq \omega$, so ist auch $\mu a < \mu b$, vorausgesetzt, $b \neq \emptyset$. Man erweitere nun die Aussonderung dahingehend, dass aus einer Menge, insbesondere ω, jede durch einen sinnvollen Ausdruck der deutschen Sprache definierte Menge ausgesondert werden darf. Insbesondere gilt das für ω. Die durch einen sprachlichen Ausdruck H in ω ausgesonderte Menge sei mit $\hat{H}$ bezeichnet. Man betrachte jetzt den folgenden die freie Variable n enthaltenden sprachlichen Ausdruck, den wir mit G bezeichnen:

'n ist größer als $\mu\hat{H}$ für alle sprachlichen Ausdrücke H der Länge kleiner 100'

Dabei sei die Länge des sprachlichen Ausdrucks H die Länge der Buchstabenfolge seiner Niederschrift, Ziffern und Wortzwischenräume mitgezählt. Nach Definition von G ist offenbar $\mu\hat{H} < \mu\hat{G}$ für alle Ausdrücke H einer Länge < 100. Nun ist G selbst ein sinnvoller Ausdruck einer Länge < 100, wovon man sich durch Abzählung leicht überzeugt. Also erhalten wir den Widerspruch $\mu\hat{H} < \mu\hat{H}$.

Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die Ausdrucksmittel zur Mengenbildung klar abgegrenzt werden müssen. Ein Durchdenken der obigen Konstruktion enthüllt ihre Verwandtschaft mit der Russellschen Antinomie: Die Definition nimmt Bezug auch auf ein Objekt, das zu definieren man gerade angetreten ist. Hier berührt man die auch philosophisch interessante Problematik der Selbstreferenz, auf die wir im Rahmen dieser Darstellung nicht näher eingehen können, die aber zum Beispiel in [Rautenberg 1996 oder 2006] ausführlich dieskutiert wird.

AS sichert, dass $a \cap b = \{x \mid x \in a \land x \in b\}$ eine Menge ist. Offenbar gilt $a \cap b = \bigcap\{a, b\}$. Allgemein erweist sich die in **1.4** definierte Klasse $\bigcap\mathcal{C}$ für eine beliebige nichtleere Klasse $\mathcal{C}$ als Menge. $\bigcap\mathcal{C}$ kann nämlich für beliebiges $a \in \mathcal{C}$ als Teilmenge von a ausgesondert werden, kurzum $\bigcap\mathcal{C} = \{x \in a \mid (\forall b \in \mathcal{C})x \in b\}$. Der Operator $x \mapsto \bigcap x$ ist für $x \neq \emptyset$ also wohldefiniert. Dagegen ist $\bigcap\emptyset$ gemäß der allgemeinen Definition $\bigcap\mathcal{C} = \{v \mid (\forall x \in \mathcal{C})v \in x\}$ für $\mathcal{C} = \emptyset$ die Allklasse. Jeder Versuch, $\bigcap\emptyset$ in $\mathcal{V}$ künstlich zu erklären, z.B. $\bigcap\emptyset := \emptyset$ zu setzen, schafft ungewollte Probleme und sollte lieber unterlassen werden.

Übungen

1. Man zeige a ist transitiv genau dann, wenn $\bigcup a \subseteq a$. Diese Bedingung kann nicht zu $\bigcup a = a$ verschärft werden: $a = \{\emptyset\}$ ist transitiv, aber $\bigcup a = \emptyset$.

2. Sei $s \subseteq \mathcal{T}r$. Man zeige $\bigcap s \in \mathcal{T}r$ und $\bigcup s \in \mathcal{T}r$.

3. Eine Klasse $\mathcal{U}$ heiße $\in$*-induktiv*, wenn $\forall a(a \subseteq \mathcal{U} \to a \in \mathcal{U})$, d.h. wenn mit allen Elementen von a auch a selbst zu $\mathcal{U}$ gehört. Man zeige $\mathcal{R}$ ist $\in$-induktiv.

4. Man beweise, keine $\in$-induktive Klasse $\mathcal{C}$ ist Menge.

   Hinweis. Wäre $\mathcal{C}$ Menge, so nach AS auch $\mathcal{R} \cap \mathcal{C} = \mathcal{R}$.

5. Man zeige, eine transitive fundierte Menge enthält $\emptyset$ als Element.

2.2 Das Paarmengenaxiom

Dieses Axiom werden wir später aus dem Ersetzungsaxiom herleiten. Es ist eigentlich überflüssig und wird hier nur aus methodischen Gründen diskutiert. Es lautet

$$\mathsf{Apa}: \quad \text{Die Paarklasse } \{a, b\} \text{ ist eine Menge.}$$

Konventionsgemäß bedeutet dies $\exists p\, p = \{a, b\}$ oder $\exists p \forall x (x \in p \leftrightarrow x \in \{a, b\})$, d.h. $\exists p \forall x (x \in p \leftrightarrow x = a \vee x = b)$. Offenbar ist $\forall a \forall b \exists! p\, p = \{a, b\}$ dann beweisbar, was die Verwendung von $\{a, b\}$ als Mengenterm in $\mathcal{L}_\in$ rechtfertigt. $\{a, a\}$ ist identisch mit der Singleton-Klasse $\{a\}$, denn $x \in \{a, a\} \leftrightarrow x = a$ für alle x ist beweisbar. Also ist auch $\{a\}$ eine Menge. Würde man anstelle von Apa nur das Letztere fordern, könnte der Mengencharakter von $\{a, b\}$ noch nicht bewiesen werden (Übung 5). Mit Apa erhält man zahlreiche paarweise verschiedene, jedoch höchstens zweielementige Mengen: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, usw.

Wir könnten an dieser Stelle schon die Begriffe der Relation und Funktion einführen, beschränken uns aber zunächst auf einen hierfür wichtigen Hilfsbegriff, den des geordneten Paares. Dieser für ein mengentheoretisches Funktionskonzept wichtige Begriff wurde rein mengentheoretisch erstmals in [Hausdorff 1914] definiert. Es bezeichnen 1 und 2 irgend zwei verschiedene, fest gewählte Mengen, die bei jedem vernünftigen axiomatischen Ansatz existieren. Dann lautet die Hausdorffsche Definition $(a, b) := \{\{a, 1\}\{b, 2\}\}$. Wir wählen indes die etwas homogenere Definition nach [Kuratowski 1921], die nicht von den Parametern 1 und 2 abhängt.

Definition. Das *geordnete Paar* (a, b) aus den Mengen a, b sei $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Eigentlich kommt es bei der Definition von (a, b) nur darauf an, dass der folgende Satz gilt; jede andere Definition, welche ihn liefert, wäre ebensogut. Übung 2 zeigt, dass Satz 2.1 auch für die Hausdorffsche Definition gilt. Der Satz hat als unmittelbare Folgerung, dass $(a, b) = (b, a)$ nur im Falle $a = b$ gilt, während aus logischen Gründen $\{a, b\} = \{b, a\}$ für alle a, b richtig ist.

Satz 2.1. *$(a, b) = (a', b')$ impliziert $a = a'$ und $b = b'$.*

Beweis. Im Falle $a = b$ ist $(a, b) = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$. Folglich muss auch (a', b') Einermenge sein, d.h. $\{a'\} = \{a', b'\}$, was $a' = b'$ und somit $(a', b') = \{\{a'\}\}$ impliziert. $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$ ergibt offenbar $a = a'$. Daher gilt auch $b = a = a' = b'$. Sei nun $a \neq b$. Dann ist $\{a, b\} \in (a', b')$, also kann nur $\{a, b\} = \{a', b'\}$ sein, weil $\{a'\}$ Einermenge ist. Weil $\{a\} \in (a', b')$, verbleibt nur $\{a\} = \{a'\}$, was $a = a'$ impliziert. Wegen $b \in \{a', b'\}$ folgt dann aber $b = b'$, weil $b \neq a = a'$. ❏

Das (geordnete) *Tripel* (a, b, c) von Mengen a, b, c sei $(a, b, c) = ((a, b), c)$. Allgemein wird aus einer Definition des n-Tupels $(a_1, \ldots, a_n)$ diejenige des $(n+1)$-Tupels gemäß folgendem Definitionsschema gewonnen:

Definition. $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) = ((a_0, \ldots, a_n), a_{n+1})$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

Durch Induktion über n, beginnend mit $n = 1$, beweist man leicht

Korollar 2.2. $(a_0, \ldots, a_n) = (a'_0, \ldots, a'_n) \to a_0 = a'_0 \wedge \ldots \wedge a_n = a'_n$.

Bemerkung. Hier handelt es sich um eine *Metainduktion* oder *Induktion in der Metatheorie*. Später werdern wir auch mit Induktionen *in* ZFC zu tun haben, z.B. Induktionen über ω. Deswegen ist diese Unterscheidung ratsam. Sei φ_n z.B. Aussage des Korollars für gegebenes $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N}$ wie überall die Menge der natürlichen Zahlen im naiven Sinne bezeichnet (0 eingeschlossen). Bei der Metainduktion konstruieren wir aus einem gegebenen Beweis für φ_n einen solchen für φ_{n+1}. Ausgehend von dem Beweis für φ_1 erhalten wir einen Beweis für φ_2, daraus einen solchen für φ_3, usw. Dass somit φ_n für jedes konkrete n bewiesen ist, leuchtet unmittelbar ein. Diese Schlussweise spielt sich auf einer unserer Mengentheorie übergeordneten Ebene ab. Metainduktion über n gehört ebenso wie z.B. die Formelinduktion zu den finiten Beweismitteln unserer Metatheorie. Es ist ein Irrglaube anzunehmen, man könne vollständige Induktion mengentheoretisch „begründen“. Man kann sie in der Mengenlehre zwar beweisen indem man $\mathbb{N}$ durch ω modelliert (siehe Satz 6.5), benötigt dafür aber viel stärkere Hilfsmittel.

Übungen

1. Man zeige, die Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ sind paarweise verschieden.

   Hinweis. Metainduktion über die Klammerungstiefe.

2. Man zeige, dass auch die Hausdorffsche Definition eines geordneten Paares ihren Zweck erfüllt, d.h. es ist Satz 2.1 beweisbar.

3. Man zeige unter der Annahme, dass es keine Mengen a, b mit $a \in b \in a$ gibt: Die einzigen höchstens 2-elementigen transitiven Mengen sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

4. Für Klassen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sei $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{p \mid (\exists x \in \mathcal{A})(\exists y \in \mathcal{B}) p = (x, y)\}$. Man zeige: $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \cup \mathcal{A} \times \mathcal{C}$.

5. Man ersetze Apa durch die Forderung Apa$'$: $\{a\}$ ist Menge für jede Menge a. Zeige, AE , AS und Apa$'$ lassen sich in einem Universum $\mathcal{V}$ erfüllen, das nur aus Einermengen besteht, nämlich aus $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}, \ldots$

2.3 Das Vereinigungsaxiom – Natürliche Zahlen

Während der Durchschnitt $a \cap b$ von Mengen a, b unmittelbar durch Aussonderung zu erhalten ist, lässt sich aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen, dass die Klasse $a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$ Menge ist. Man fordert nun sogleich etwas mehr, nämlich die Existenz der Vereinigung aller Mengen einer beliebigen Menge, wobei diese der besseren Veranschaulichung halber oft ein Mengensystem genannt wird.

AU : Für jedes Mengensystem s ist $\bigcup s$ eine Menge.

Das bedeutet $\exists u\, u = \bigcup s$, oder ganz formal $\exists u \forall x(x \in u \leftrightarrow (\exists y \in s) x \in y)$. Man könnte AU durch die schwächere Forderung $\exists v(\forall x(x \in u \to (\exists y \in s) x \in y)$, der Existenz einer Obermenge für $\bigcup s$, ersetzen, denn man erhielte $\bigcup s$ aus einer solchen Menge sofort durch Aussonderung. Anders als $\bigcap s$ bezeichnet $\bigcup s$ stets eine wohlbestimmte Menge. Insbesondere gelten $\bigcup \emptyset = \emptyset$ und $\bigcup \{a, b\} = a \cup b$, also garantiert AU unter Beachtung von Apa speziell den Mengencharakter von $a \cup b$. Ferner können wir jetzt auch in der Theorie die aus a, b, c bestehende Menge $\{a, b, c\} = \{a, b\} \cup \{c\}$ bilden und allgemeiner $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ durch $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$ erklären.

Bemerkung. Das Definitionsschema $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}$ ist ebenso wie dasjenige von $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Beispiel einer *Definition durch Metarekursion* über $\mathbb{N}$. Metarekursionen gehören zu den sogenannten finiten Konstruktionsmitteln und bedürfen ebenso wie Metainduktion keiner Rechtfertigung. Hingegen werden wir bei der Modellierung der Metarekursion durch den Rekursionssatz für ω in **5.1** vor ein völlig neuartiges Problem gestellt. ω reflektiert den Bereich $\mathbb{N}$ in der Theorie.

AU hat unter anderem zur Folge, dass die Klasse $\mathcal{V}^{(1)}$ aller Einermengen eine echte Klasse, also keine Menge ist. Denn wäre $\mathcal{V}^{(1)}$ Menge, so wäre auch $\bigcup \mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{V}$ eine Menge, was nicht der Fall sein kann. Auf ähnliche Weise zeigt man leicht, dass auch die Klasse $\mathcal{V}^{(2)}$ aller Zweiermengen keine Menge sein kann. Ebenso ist die Klasse aller Dreiermengen keine Menge und so fort. Es besteht also keine Hoffnung, $1, 2, 3, \ldots$ der Reihe nach als Menge aller Einermengen, Zweiermengen, usw. zu definieren. Glücklicherweise gibt es hier aber einen eleganten Ausweg, mit dem wir uns in Kapitel **5** befassen werden.

Der ursprüngliche Vorschlag Zermelos, die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ der Reihe nach mit den Mengen $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ zu identifizieren, wurde zugunsten einer weittragenden Idee von Neumanns (1923) aufgegeben, diese der Reihe nach durch die Mengen

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots, n, n \cup \{n\}, \ldots$$

zu definieren [1]. Die Gesamtheit dieser sogenannten *von Neumannschen natürlichen Zahlen* werde mit ω bezeichnet. Naiv betrachtet ist ω die kleinste Menge, welche $0 := \emptyset$ enthält und mit n auch den Nachfolger (Sukzessor) $n^{\mathsf{S}} := n \cup \{n\}$. Deshalb gilt für ω wie für $\mathbb{N}$ das bekannte Beweisprinzip durch Induktion. Damit beweist man zum Beispiel $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Denn dies ist klar für $n = 0$ und die Annahme $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ liefert $n^{\mathsf{S}} = \{0, 1, \ldots, n-1\} \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Die obige naive Definition von ω muss in der axiomatischen Mengenlehre noch etwas präzisiser gefasst werden. Es muss der innertheoretische Mengencharakter von ω deutlich erkennbar sein. Den werden wir in **2.6** erkennen. Erst der Induktionssatz 6.5 reflektiert die native vollständige Induktion in der Theorie.

Jedes $n \in \omega$ ist transitiv, denn $0 = \emptyset$ ist transitiv und mit n auch n^{S}, weil mit *jeder* transitiven Menge a auch ihr „Nachfolger" $a^{\mathsf{S}} := a \cup \{a\}$ transitiv ist: Für $x \in a^{\mathsf{S}}$ ist im Falle $x \in a$ sicher $x \subseteq a \subseteq a^{\mathsf{S}}$ und dasselbe gilt trivialerweise auch für $x = a$.

Nennt man eine Menge a *erblich transitiv*, wenn nebst a auch jedes Element von a transitiv ist, so beweist man auch dies mühelos für jedes $n \in \omega$. Es ist nämlich sehr einfach einzusehen, dass mit a auch a^{S} erblich transitiv ist. Man kann die übliche $<$-Relation auf ω direkt durch die auf ω eingeschränkte $\in$-Relation definieren, die nach Übung 4 zugleich mit der echten Inklusion übereinstimmt.

Übungen

1. Man beweise $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ ist transitiv, aber nicht erblich transitiv.
2. Man zeige, mit a ist auch jedes $x \in a$ erblich transitiv.
3. Man zeige, sind alle $x \in a$ erblich transitiv, so auch $\bigcup a$ und $\bigcap a$.
4. Seien m, n von Neumannsche Zahlen. Man zeige induktiv über n

   (1) $n \notin n$, (2) $n^{\mathsf{S}} = m^{\mathsf{S}} \to m = n$, (3) $m \in n \to m^{\mathsf{S}} \in n \vee m^{\mathsf{S}} = n$,
   (4) $m \in n \leftrightarrow m \subset n$.
5. Eine Menge a heiße $\in$-*geordnet* (ein Sonderfall einer in **3.2** definierten partiellen Ordnung auf a), wenn a folgende Eigenschaften hat:

   (a) $(\forall xyz \in a)(x \in y \in z \to x \in z)$ (Transitivität),
   (b) $(\forall x \in a) x \notin x$, (Irreflexivität),
   (c) $(\forall xy \in a)(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$ (Konnexität).

   Zeige, jedes $n \in \omega$ ist $\in$-geordnet.

[1] J. von Neumann (1903 – 1957) teilte diese Definition Zermelo im Jahre 1923 brieflich mit.

2.4 Das Potenzmengenaxiom

$\mathfrak{P}(a) = \{v \mid v \subseteq a\}$ ist die Klasse aller Teilmengen von a. Das Potenzmengenaxiom fordert, dass diese eine Menge ist. Kurz, $\{v \mid v \subseteq a\}$ ist ein Mengenterm.

AP : Für jede Menge a ist $\mathfrak{P}(a)$ eine Menge, die *Potenzmenge* von a.

Die nackte Niederschrift von AP in $\mathcal{L}_\in$ lautet: $\forall a \exists p\, \forall x\{x \in p \leftrightarrow x \subseteq a\}$. Aufgrund des Aussonderungsaxioms ist klar, dass AP äquivalent ist mit der Forderung, dass zu jeder Menge a irgendeine Menge existiert, welche alle Teilmengen von a als Elemente enthält. Offensichtlich sind $\emptyset$ und a immer Elemente von $\mathfrak{P}(a)$.

Ist a eine Menge und $\mathcal{E}$ durch φ definiert, lässt sich nach AP die Menge $\{u \in \mathfrak{P}(a) \mid \varphi\}$ aller Teilmengen a mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$ bilden; man bezeichnet diese aus suggestiven Gründen meistens mit $\{u \subseteq a \mid \varphi\}$. So ist z.B. $\{u \subseteq a \mid u \neq a\}$ die Menge aller echten Teilmengen von a. Ferner gilt $\{a\} = \{u \subseteq a \mid u = a\}$. Daher sichert AP auch ohne Apa die Existenz solcher Mengen wie $\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots$.

In der mathematischen Praxis betrachtet man häufig die Gesamtheit aller Mengen $a \cup x$ (bzw. $a \cap x$), wo a vorgegeben und x alle Mengen eines vorgegebenen Mengensystems s durchläuft. Es handelt sich hier um die Klasse $\mathcal{C} = \{y \mid (\exists x \in s) y = a \cup x\}$, die gelegentlich auch mit $\{a \cup x \mid x \in s\}$ bezeichnet wird [2)]. AP sichert den Mengencharakter von $\mathcal{C}$ deswegen, weil z.B. $a \cup x \subseteq a \cup \bigcup s$ für alle $x \in s$.

Ebenso entpuppt sich $\{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ $\big(= \{z \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b)(x, y) = z\}\big)$, das mit $a \times b$ bezeichnete *Kreuzprodukt* von a, b, wie folgt als Menge. Da für den Fall $x, y \in a \cup b$ offenbar $\{x\}, \{x, y\} \in \mathfrak{P}(a \cup b)$ und damit $(x, y) \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b))$, ergibt sich

$$(\forall x \in a)(\forall y \in b)\,(x, y) \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b).$$

Daher ist $a \times b = \{p \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b) \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b) p = (x, y)\}$ in der Tat Menge. Hier handelt es sich um eine Aussonderung in $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$. Ähnlich beweist man den Mengencharakter von $\{x \cup y \mid x \in a, y \in b\}$ $\big(= \{z \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b) x \cup y = z\}\big)$.

Allgemein ließe sich mit den bisherigen Axiomen folgendes beweisen: Ist τ ein beliebiger aus den Variablen $x_1, \dots, x_n$ und den Operationssymbolen $\cap, \cup, \mathfrak{P}, \{,\}, (,)$ aufgebauter Term und sind $a_1, \dots, a_n$ Mengen, so auch die Klasse

$$\{\tau \mid x_1 \in a_1, \dots, x_n \in a_n\} := \{y \mid (\exists x_1 \in a_1) \dots (\exists x_n \in a_n)\, y = \tau\}.$$

2) Bei Verwendung dieser und ähnlicher Schreibweisen muss klar verabredet sein, welche Variable durch den Klassenterm gebunden und welche die Rolle von Parametern spielt. Im Beispiel sind a und s Parameter und die Variable x ist gebunden.

Ein Beispiel eines derartigen Terms τ ist das in **2.3** definierte n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$. Damit erklärt man für beliebge $a_1, \ldots, a_n$ dann

$$a_1 \times \cdots \times a_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in a_1, \ldots, x_n \in a_n\}$$

Bei komplizierteren Termen τ kann es mühsam sein, eine Menge explizit anzugeben, aus der ausgesondert wird. Das ist oft aber gar nicht erforderlich. Das im nächsten Abschnitt vorgestellte Ersetzungsaxiom AR (R von Replacement) macht nämlich viele Aussonderungen überflüssig. Dieses Axiom garantiert den Mengencharakter von zahlreichen Klassen der Gestalt $\{\tau \mid x_1 \in a_1, \ldots, x_n \in a_n\}$ auch ohne Rückgriff auf das Potenzmengenaxiom, darunter insbesondere $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$. AR ist sogar so stark, dass es das Aussonderungsschema AS insgesamt überflüssig macht.

Übungen

1. Man zeige $\mathfrak{P}(a \cup \{e\}) = \mathfrak{P}(a) \cup \{u \cup \{e\} \mid u \in \mathfrak{P}(a)\}$. Man kann also die Potenzmenge einer $(n+1)$-elementigen Menge leicht aus der einer n-elementigen Teilmenge zusammenbauen.
2. Man zeige $\{\mathfrak{P}(x) \mid x \in a\}$ ist Menge.

   Hinweis. $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup a)$ für $x \in a$.
3. Man zeige $\{x \cup y \mid x \in a, y \in b\}$ ist Menge. Analoges gilt für $\cap$, $\setminus$, $\{,\}, \ldots$

   Hinweis. Betrachte $\{z \subseteq \mathfrak{P}(a \cup b) \mid (\exists x \in a)(\exists y \in b) z = x \cup y\}$.
4. Man beweise die Äquivalenz von (i) $a \in \mathcal{T}r$, (ii) $a \subseteq \mathfrak{P}(a)$, (iii) $\mathfrak{P}(a) \in \mathcal{T}r$.
5. a habe eine transitive Obermenge. Man zeige, es gibt eine kleinste transitive Obermenge $a^{tc} = \bigcap\{v \mid v \supseteq a \wedge v \in \mathcal{T}r\}$, genannt die *transitive Hülle* von a. Also $a^{tc} \subseteq b$ für jedes transitive $b \supseteq a$ [3)].
6. Beweise $a \cap \bigcup s = \bigcup\{a \cap x \mid x \in s\}$ und $\bigcup s \cap \bigcup t = \bigcup\{x \cap y \mid x \in s, y \in t\}$.
7. Man zeige, $\bigcup \mathcal{A} \times \bigcup \mathcal{B} = \bigcup\{a \times b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$.
8. Man beweise mit Hilfe von AP : Mit $\bigcup \mathcal{A}$ ist auch $\mathcal{A}$ eine Menge.

   Hinweis. Mit $\bigcup \mathcal{A}$ ist auch $\mathfrak{P} \bigcup \mathcal{A}$ Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P} \bigcup \mathcal{A}$.

3) Hier handelt es sich um eine Definition „von oben“. Die für diese Definition erforderliche Existenz einer transitiven Obermenge für jede Menge folgt erst aus dem Ersetzungaxiom im nächsten Abschnitt. Dort wird auch eine Definition der transitiven Hülle „von unten“ angegeben.

2.5 Das Ersetzungsaxiom

Dieses von Fraenkel den Axiomen von Zermelo hinzugefügte Axiom besagt grob, dass das Bild einer Menge unter einem Operator wieder eine Menge ist. Dabei sei ein Operator wie in **1.5** eine durch eine $\mathcal{L}_\in$-Formel $\varphi = \varphi(x, y)$ mit mindestens den freien Variablen x, y definierte Vorschrift, die jedem x höchstens ein y zuordnet. Für $x \in \mathit{dom}\, F$, gilt dann auch $\varphi(x, F(x))$. Enthält φ weitere freie Variablen (Parameter) so hängt F dann auch von diesen Parametern ab.

Operatoren dienen wie Klassen dem besseren Verständnis der komplizierten deduktiven Struktur der Mengenlehre. Man kann einen durch $\varphi(x, y)$ definierten Operator F immer auch als Klasse der geordneten Paare (x, y) mit $F(x) = y$ (oder $\varphi(x, y)$) verstehen, wenn dies gewollt ist. In manchen Darstellungen wird dieses Verständnis bevorzugt, weil es der üblichen Vorgehensweise bei mengentheoretisch definierten Funktionen entspricht, siehe **3.1**. Am einfachsten aber ist es jedoch, den Operator F mit der ihn definierenden Formel zu identifizieren. Nur in besonderen Fällen erhält der Operator auch ein eigenes Symbol, wie etwa der Operator $x \mapsto \bigcap x$ mit der definierenden Formel $\varphi(x, y) = (\forall z \in x)(y \in x)$.

Sei a eine Menge und F durch $\varphi(x, y)$ partiell definiert. Es entspricht der Anschauung, dass mit a auch das stets wohldefinierte Bild $F[a] = \{y \mid (\exists x \in a)\varphi\}$ wieder eine Menge ist. Das ist nicht selbstverständlich, sondern wird gesichert durch das sogenannte *Ersetzungsaxiom*

$$\mathsf{AR}: \quad \forall x \exists^{\leqslant 1} y \varphi(x, y) \to \forall a \exists b \forall y (y \in b \leftrightarrow (\exists x \in a)\varphi(x, y)).$$

Wie bei AS handelt es sich hier um ein Axiomenschema. φ enthält a, b nicht frei, aber nebst x, y in der Regel noch andere freie Variablen (Parameter). AR besagt nach unseren Konventionen nichts anderes als $\forall x \exists^{\leqslant 1} y \varphi(x, y) \to \forall a \exists b\, b = F[a]$, oder etwas salopp und ohne Nennung der definierenden Formel formuliert,

Für jeden Operator F und jede Menge a ist $F[a]$ eine Menge.

Dies ist mit den von Zermelo angegebenen Axiomen unbeweisbar, wie 1923 von Fraenkel und etwas früher u.a. schon von Skolem bemerkt wurde. Häufig wird AR nur für überall definierte Operatoren gefordert. Aber diese Verschärfung von AR ist nicht nötig, weil ein partiell definierter Operator F nach den Darlegungen in **1.5** ja immer künstlich zu einem überall definierten Operator F' erweitert werden kann und weil mit $F'[a]$ auch $F[a] \subseteq F'[a]$ eine Menge ist.

In mathematischen Anwendungen ist F meist durch einen (geschachtelten) Term in $\cup, \cap, \{,\}, \ldots$ darstellbar. In diesem Fall ist der Mengencharakter von $\{F(x) \mid x \in a\}$

oft schon durch frühere Axiome gesichert, wie z.B. von $\{\mathfrak{P}(x) \mid x \in a\}$ oder von $\{(x,y) \mid x \in a, y \in b\}$ wie in **2.4** ausgeführt wurde. Beispiel einer Anwendung, in der AR nachweislich benötigt wird, ist der Existenzbeweis einer transitiven Obermenge für jede Menge a (Übung 3), womit auch die Existenz der transitiven Hülle a^{tc} als der kleinsten transitiven Obermenge von a gesichert wird.

AR ist ein sehr starkes Axiom. Es macht z.B. das Axiom Apa und sogar das Aussonderungsaxiom AS überflüssig. Wir verifizieren dies und beginnen mit dem einfachen Beweis von AS. Sei $b = \{x \in a \mid \varphi(x)\}$ und komme y in φ nicht frei vor. Für $\psi(x,y) := \varphi(x) \wedge y = x$ gilt dann offenbar $\forall x \exists^{\leqslant 1} y \psi(x,y)$. Der entsprechende Operator F (im Wesentlichen die identische Abbildung), erfüllt offenbar $b = \{F(x) \mid x \in a\}$.

Der Leser sollte sich vergegenwärtigen, dass auch die ursprünglich mit AS bewiesene Existenz der leeren Menge durch AR gesichert wird, nämlich durch Wahl des trivialen, nirgends definierten Operators.

Nun zum Beweis von Apa. Seien a, b gegeben. Dann ist $\{a,b\}$ gerade die Werteklasse des Operators $F_{a,b}$, definiert durch $\varphi(x,y) := (x = \emptyset \to y = a) \wedge (x \neq \emptyset \to y = b)$. Mit anderen Worten,

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} a \text{ für } x = \emptyset, \\ b \text{ für } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Hier sind a, b Parameter. Es ist plausibel, dass $\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ ohne Benutzung von Apa beweisbar ist. Um mit AR zu schließen, dass die Klasse $\{a,b\}$ Menge ist, genügt es eine von a, b unabhängige Menge c mit $F_{a,b}[c] = \{a,b\}$ anzugeben. Dazu betrachte man die nach AP existierende Menge $c := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $(= \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))\,)$. Diese leistet das Verlangte, einfach weil $F_{a,b}(\emptyset) = a$ und $F_{a,b}(\{\emptyset\}) = b$.

Ist F eine durch $\varphi(\vec{x}, y)$ partiell definierte Operation und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{V}$, so sei

$$\{F(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in a_1, \ldots, x_n \in a_n\} = \{y \mid (\exists x_1 \in a_1) \ldots (\exists x_n \in a_n) \varphi(\vec{x}, y)\}.$$

AR sichert, dass auch dies eine Menge ist. Es genügt den Fall $n = 2$ zu behandeln. Man betrachte $\psi(x,y) := \varphi((x_1, x_2, y) \wedge x = (x_1, x_2)$ anstelle von $\varphi(x_1, x_2, y)$. Offenbar gilt $\forall y \exists^{\leqslant 1} y \psi(x,y)$. Sei G der entsprechende Operator. Nach AR ist $G[a_1 \times a_2]$ Menge und damit auch $\{F(x_1, x_2) \mid x_1 \in a_1, x_2 \in a_2\}$, denn man beweist leicht

$$\{F(x_1, x_2) \mid x_1 \in a_1, x_2 \in a_2\} = G[a_1 \times a_2].$$

Es sei erwähnt, dass insbesondere auf AP beruhende Mengenbildungen oft einfacher durch AR realisiert werden. So existiert $a \times b = \{(x,y) \mid x \in a, y \in b\}$ auch wegen AR, obwohl man wie in **2.4** auch aus $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$ hätte aussondern können.

Ein Operator auf dem Universum ist eigentlich ein Spezialfall eines (zweistelligen) *Prädikats* $\mathcal{P}(x, y)$, worunter eine durch eine $\mathcal{L}_\in$-Formel $\varphi = \varphi(x, y)$ definierte Beziehung zwischen Mengen x, y verstanden sei. So sind das $\in$-Prädikat und das Inklusionsprädikat $\subseteq$ definiert durch die Formeln $x \in y$ bzw. $\forall z(z \in x \to z \in y)$. In einigen Fällen ist $\{y \mid \varphi(x, y)\}$ für gewisse x eine Menge, etwa für das durch $y \subseteq x$ definierte Prädikat. Dann sagt man, es gibt *höchstens mengenviele* y mit $\mathcal{P}(x, y)$. Unter Beachtung von AU erweist sich dann folgendes Schema als gleichwertig zu AR:

$$\mathsf{AR}' \quad (\forall x \in a)\exists u \forall y(\varphi(x, y) \to y \in u) \to \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow \exists x \varphi(x, y)).$$

In Worten: Ist a Menge und $\mathcal{P}(x, y)$ ein Prädikat, so dass $b_x = \{y \mid \mathcal{P}(x, y)\}$ für jedes $x \in a$ Menge ist, so existiert die Vereinigung aller Mengen b_x für $x \in a$.

In manchen Zusammenhängen ist es vorteilhaft, statt AR das folgende wesentlich schärfere Axiom zu fordern, das *Kollektionsschema*:

$$\mathsf{Acol}: \quad (\forall x \in a)\exists y \varphi(x, y) \to \exists b(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x, y).$$

Acol impliziert unschwer AR; denn im Falle $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ ist $\{y \mid \varphi(x, y)\}$ für jedes $x \in a$ eine Einermenge, und eine Menge b in Acol liefert gerade das Bild von a des durch $\varphi(x, y)$ definierten Operators. Ein Beweis von Acol benutzt nebst AF auch das erst später vorgestellte Fundierungsaxiom.

Übungen

1. Sei F ein völlig beliebiger 2-stelliger (partiell definierter) Operator auf $\mathcal{V}$. Man zeige, $\{F(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ ist Menge.

   Hinweis. Zeige zuerst $\{F(x, y) \mid x \in a, y \in b\} = \bigcup_{y \in b}\{F(x, y) \mid x \in a\}$. Nach AR ist $\{F(x, y) \mid x \in a\}$ für festes y (als Parameter) eine Menge, daher nach demselben Axiom auch $\bigcup_{y \in b}\{F(x, y) \mid x \in a\}$.

2. Man zeige, AR′ ist zu AR äquivalent.

3. Man beweise in naiver Weise die Existenz einer transitiven Obermenge für eine Menge a. Später wird dies auch in der Theorie bewiesen.

   Hinweis. Sei $a_0 = a$ und $a_{n+1} = \bigcup a_n$ für jedes n. Dann ist $a^* := \bigcup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ transitiv. Anschaulich formuliert: $a^* = a \cup \bigcup a \cup \bigcup\bigcup a \cup \ldots$ In der Mengen-Eigenschaft von $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ verbirgt sich AR, siehe hierzu **5.1**.

4. Man zeige, die in Übung 3 definierte Menge a^* ist identisch mit der transitiven Hülle von a.

2.6 Das Unendlichkeitsaxiom

Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik resultiert vor allem auf der Erschließung des Transfiniten. Die abstrakten Bereiche mathematischer Untersuchungen sind in der Regel unendlich und die Mathematiker kümmern sich bei ihren Abstraktionen selten um die Frage, ob unendliche Gesamtheiten in der Realität wirklich existieren. Sie existieren jedenfalls in ihren Gedanken.

Bevor wir innerhalb unserer Theorie über unendliche Mengen reden können, muss dieser Begriff erst definiert werden. Es genügt natürlich, den Begriff endlich zu definieren, denn unendliche Mengen sind per definitionem die nicht endlichen.

Eine Menge a ist im naiven Sinne endlich, wenn sie durch schrittweises Wegnehmen ihrer Elemente ausgeschöpft wird. Vor jedem Schritt ist der Haufen x der bereits entfernten Elemente eine Teilmenge von a, beginnend mit $x = \emptyset$. In jedem Schritt wird eines der in a noch verbliebenen Elemente herausgenommen. Im letzten Schritt ist a ausgeschöpft und $x = a$. Dieses Kleinkind-Experiment lässt sich in $\mathcal{L}_\in$ beschreiben, und zwar durch folgende, von der Kunst des Zählens unabhängige

Definition. a ist *endlich*, wenn jedes $s \subseteq \mathfrak{P}(a)$ folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{(fin)} \quad \emptyset \in s \wedge (\forall x \in s \setminus \{a\})(\exists y \in a \setminus x) x \cup \{y\} \in s \rightarrow a \in s.$$

In Worten: a ist endlich genau dann, wenn a zu jedem System s von Teilmengen von a gehört, welches $\emptyset$ enthält und mit jeder echten Teilmenge x von a auch $x \cup \{y\}$ für mindestens ein $y \in a \setminus x$. Man könnte statt $\emptyset \in s$ übrigens auch $s \neq \emptyset$ fordern.

Beispiele endlicher Mengen sind $\emptyset$, jede Einermenge, jede Zweiermenge, usw. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 6.2 unten. Es gibt eine Vielzahl weiterer Endlichkeitsdefinitionen des Begriffs einer endlichen Menge, z.B. diejenige von Tarski: a ist endlich genau dann, wenn jedes nichtleere $s \subseteq \mathfrak{P}(a)$ ein maximales Element bez. $\subseteq$ hat. Man muss diese Definitionen nicht alle kennen. Wichtig ist allein der folgende Satz. Nur in dessen Beweis und in Lemma 6.2 wird auf obige Definition Bezug genommen. Diese ist schon im Tarski-Fragment sinnvoll. Weitere Axiome (nämlich AS und AP) benötigt lediglich der fast triviale Beweis von

Satz 6.1 (Induktionsschema für endliche Mengen). *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse mit den Eigenschaften* (a): $\emptyset \in \mathcal{C}$ *und* (b): $\forall x \forall y (x \in \mathcal{C} \rightarrow x \cup \{y\} \in \mathcal{C})$*. Dann gehören alle endlichen Mengen zu $\mathcal{C}$.*

Beweis. Sei a endlich und $s = \{x \subseteq a \mid x \in \mathcal{C}\}$. (a) und (b) implizieren offenbar die Prämisse von (fin), so dass dann auch $a \in s$ und damit $a \in \mathcal{C}$. ❏

Die nachfolgend mit $\mathcal{F}in$ bezeichnete Klasse der endlichen Mengen erfüllt selbst die Bedingungen von Satz 6.1. Das folgt sofort aus dem von Satz 6.1 unabhängigen

Lemma 6.2. *Mit $a \in \mathcal{F}in$ ist auch $a \cup \{e\} \in \mathcal{F}in$ für jedes $e \notin a$.*

Beweis. Sei $a \in \mathcal{F}in$. Annahme: $s \subseteq \mathfrak{P}(a \cup \{e\})$ erfüllt die Prämisse von (fin) mit $a \cup \{e\}$ für a. Zu zeigen ist $(*)$: $a \cup \{e\} \in x$. Es hat $s' := \{x \cap a \mid x \in s\}$ $(\subseteq \mathfrak{P}(a))$ die Eigenschaft $(\forall x \in s' \setminus \{a\})(\exists y \in a \setminus x) x \cup \{y\} \in s'$ wie man unschwer verifiziert. Folglich $a \in s'$, weil $a \in \mathcal{F}in$. Das ergibt $(*)$. Denn dies ist nach obiger Annahme klar, falls $a \in s$, weil $a \subset a \cup \{e\}$. Falls aber $a \notin s$, muss $(*)$ wegen $a \in s'$ notwendig erfüllt sein. ❑

Satz 6.1 ergibt unter Beachtung von Lemma 6.2 leicht, dass mit a, b auch $a \cup b$, $a \times b$ und $\mathfrak{P}(a)$ endlich sind. Die Beweise verlaufen nach dem Muster desjenigen von

Satz 6.3. *Mit einer Menge ist auch jede ihrer Teilmengen endlich.*

Beweis. Sei $\mathcal{C} = \{x \mid (\forall u \subseteq x) u \in \mathcal{F}in\}$. Man überprüft leicht die Bedingungen (a) und (b) in Satz 6.1. Für (b) benötigt man gerade Lemma 6.2. Also $\mathcal{F}in \subseteq \mathcal{C}$, d.h. für jedes $x \in \mathcal{F}in$ gilt $(\forall u \subseteq x) u \in \mathcal{F}in$, was zu zeigen war. ❑

Offenbar liefert obige Definition durch Kontraposition sofort folgende

Satz 6.4 (Charakterisierungsatz unendlicher Mengen). *a ist unendlich genau dann, wenn es ein System s echter Teilmengen von a gibt, welches mit jedem $x \in s$ noch ein $x \cup \{y\} \neq x$ enthält und damit keine maximalen Elemente besitzt.*

Mit den bisherigen Axiomen kann die Existenz unendlicher Mengen nachweislich noch nicht bewiesen werden, siehe hierzu **5.1**. Diese ergibt sich vielmehr erst im Anschluss an das traditionell wie folgt formulierte *Unendlichkeitsaxiom*

$$\mathsf{AI}: \quad \exists u (\emptyset \in u \land (\forall x \in u) x^{\mathsf{s}} \in u).$$

Dabei steht wie überall x^{s} für $x \cup \{x\}$. Eine Klasse $\mathcal{C}$ mit den Eigenschaften $\emptyset \in \mathcal{C}$ und $(\forall x \in \mathcal{C}) x^{\mathsf{s}} \in \mathcal{C}$ heiße vorübergehend *induktiv*. Da $\mathcal{E}$ zugleich eine definite Eigenschaft darstellt, spricht man auch von der *induktiven Eigenschaft* $\mathcal{E}$. So ist z.B. die Eigenschaft 'v ist endlich' induktiv, aber z.B. auch 'v ist transitiv', denn $\emptyset$ ist transitiv und mit v auch v^{s}, siehe **2.3**.

AI fordert die Existenz einer induktiven *Menge* u. In jedem derartigen u liegen alle von Neumannschen Zahlen $0 = \emptyset$, $1 = 0^{\mathsf{s}}$, usw. Das zeigt man problemlos induktiv. Dies beweist aber noch nicht, dass u unendlich ist im präzisierten Sinne. Bevor wir dies nachweisen, formalisieren wir die ursprüngliche Definition von ω wie folgt:

Definition. $\omega := \bigcap\{u \mid u \text{ induktiv}\}$ heißt in ZF die Menge der natürlichen Zahlen.

ω selbst ist induktiv, wovon man sich mühelos überzeugt. Kurzum, ω ist die kleinste induktive Menge. Diese Definition ist sinnvoll, weil nach AI mindestens eine induktive Menge existiert, aus welcher ω ausgesondert werden kann. Die Definition ergibt fast trivial das klassische Beweisprinzip durch Induktion:

Satz 6.5 (Induktionssatz für ω). *Ist v eine Menge mit $0 \in v$, so dass mit $n \in v$ stets auch $n^{\mathsf{S}} \in v$, so ist $\omega \subseteq v$.*

Denn ω ist ja die kleinste induktive Menge. Man könnte diesen Satz allgemeiner in der Klassenform *Ist $\mathcal{C}$ induktiv, so ist $\omega \subseteq \mathcal{C}$* formulieren. Aber dies ist mit Satz 6.5 leicht beweisbar. Statt $\mathcal{C}$ muss nur die Menge $v = \omega \cap \mathcal{C}$ betrachtet werden. Man verdeutliche sich, dass der Satz in der Klassenformulierung eigentlich ein Aussagenschema in $\mathcal{L}_\in$ darstellt. Mit $\mathcal{C} = \{v \mid \varphi(v)\}$ lautet dieses

$$\varphi(\emptyset) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x^{\mathsf{S}})) \to (\forall z \in \omega)\varphi(z).$$

Weil z.B. die Eigenschaft '$x \notin x$' induktiv ist, liefert Satz 6.5 sofort $(\forall n \in \omega) n \notin n$, was die Eigenschaft $n \notin n$ der einzelnen $n \in \omega$ nunmehr als unverselle Aussage in die Theorie überträgt. Ebenso folgt $\omega \subseteq \mathcal{T}r$, was die auf Seite 22 bewiesene Transitivität jedes einzelnen $n \in \omega$ als universelle Aussage formuliert. Auch ω selbst ist transitiv, denn man verifiziert leicht $\{n \in \omega \mid n \subseteq \omega\}$ ist induktiv. Das nun hat nach folgendem Satz die Konsequenz, dass jede induktive Menge unendlich ist, womit die Formulierung des Unendlichkeitsaxioms nachträglich gerechtfertigt wird. Hingegen ist jedes $n \in \omega$ endlich, denn $\mathcal{F}in$ ist induktiv und damit gilt $\omega \subseteq \mathcal{F}in$.

Satz 6.6. *ω ist unendlich.*

Beweis. Man betrachte das Teilmengensystem $s = \omega$ von ω – man beachte, dass jedes $n \in \omega$ wegen $\omega \in \mathcal{T}r$ auch Teilmenge von ω ist, und zwar echte Teilmenge, weil $n = \omega$ wegen $n \notin n$ entfällt. Dieses s erfüllt die Bedingungen in Satz 6.4. ❑

Satz 6.7. *ω ist $\in$-geordnet.*

Beweis. Da $n \notin n$ und n transitiv ist, verbleibt nur $(*)$: $m \in n \lor m = n \lor n \in m$ zu beweisen. Das gilt gewiss für $n = 0$. Sei $(*)$ für $m, n \in \omega$ angenommen. Wir zeigen dasselbe für n^{S}. Falls $m \in n$ oder $m = n$ ist sicher $m \in n^{\mathsf{S}}$. Falls aber $n \in m$, so ist $n^{\mathsf{S}} \in m$ oder $n^{\mathsf{S}} = m$ (Übung 4 in **2.3**). Also gilt $(*)$ auch für n^{S}. ❑

Von jetzt an schreiben wir für $m, n \in \omega$ meistens $m < n$ anstatt $m \in n$. Eine häufig benutzte, auf dieser Anordnung von ω benutzende Variante von Satz **6.5** ist

Satz 6.8 (**$<$-Induktionssatz für ω**). *Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, so dass $n \in \mathcal{E}$ wenn immer $k \in \mathcal{E}$ für alle $k < n$. Dann ist $\omega \subseteq \mathcal{E}$.*

Beweis. Sei $\mathcal{E}' := \{n \in \omega \mid (\forall k < n) k \in \mathcal{E}\}$. Sicher gilt $0 \in \mathcal{E}'$. Sei $m \in \mathcal{E}'$. Wir zeigen $m^{\mathsf{S}} \in \mathcal{E}'$. Denn für $n \leqslant m^{\mathsf{S}}$ ist entweder $n \leqslant m$ und damit $n \in \mathcal{E}$, oder $n = m$ und damit $n \in \mathcal{E}$ nach Voraussetzung des Satzes. Also $\omega \subseteq \mathcal{E}'$ ($\subseteq \mathcal{E}$) nach Satz **6.5**. ❏

Bemerkung. Da ω die kleinste induktive Menge ist und alle von Neumannschen Zahlen im naiven Sinne enthält, erhebt sich folgende Frage: Enthält ω genau diese Zahlen oder vielleicht noch weitere Elemente? Dazu ist zu bemerken, dass die einzelnen von Neumannschen Zahlen wie sie in **2.3** definiert wurden zwar Objekte unserer deduktiven Theorie sind, nicht aber ihre äußerlich gegebene Gesamtheit, die eine Kopie von $\mathbb{N}$ darstellt. Daher lässt sich nicht erwarten, dass diese sich in $\mathcal{L}_\in$ aussondern lässt. In der mathematischen Logik wird gezeigt, dass unter der Annahme der Konsistenz von ZFC auch ein ZFC-Modell existiert, in welchem ω neben den von Neumannschen Zahlen noch andere Elemente enthält, sogenannte Nichtstandard-Zahlen. Aber ω verhält sich insgesamt so wie $\mathbb{N}$, d.h. es gelten für $\mathbb{N}$ und für ω dieselben zahlentheoretischen Eigenschaften. Es gibt unterschiedliche Definitionen von ω, z.B. ist ω die Menge aller endlichen transitiven $\in$-geordneten Mengen.

Übungen

1. Man zeige, mit a, b ist auch $a \cup b$ immer endlich.

   Hinweis. Satz 6.1. Für $\mathcal{C} = \{x \mid a \cup x \text{ endlich}\}$ gilt $\mathcal{F}in \subseteq \mathcal{C}$.

2. Sei F ein Operator auf $\mathcal{V}$ und a endlich. Man zeige (ohne AR): $\{F(x) \mid x \in a\}$ ist endliche Menge. Kurzum, für endliche Mengen ist AR beweisbar.

   Hinweis. Satz 6.1 mit $\mathcal{C} = \{a \mid F[a] \text{ endlich}\}$.

3. Man zeige, mit a ist $\mathfrak{P}(a)$ endlich, und mit a, b auch $a \times b$.

   Hinweis. $\mathfrak{P}(x \cup \{y\}) = \mathfrak{P}(x) \cup \{u \cup \{y\} \mid u \in \mathfrak{P}(x)\}$. Übungen 1 und 2.

4. Man beweise, unsere Endlichkeitsdefinition ist äquivalent mit der Tarskischen.

   Hinweis. Letztere erfüllt die Voraussetzungen des Endlichkeitsschemas.

5. Eine $\in$-geordnete Menge a heiße $\in$-*wohlgeordnet*, wenn jede nichtleere Teilmenge $u \subseteq a$ ein kleinstes Element bezüglich dieser Ordnung hat. Man zeige induktiv: jedes $n \in \omega$ ist $\in$-wohlgeordnet. Beachte Übung 5 in **2.3**.

6. Eine Menge a heiße *erblich endlich*, wenn a eine endliche transitive Obermenge besitzt. a ist dann natürlich selbst auch endlich und hat eine endliche transitive Hülle. Man zeige, mit a ist auch jedes Element von a erblich endlich.

2.7 Das Auswahlaxiom

Das berühmteste aller mengentheoretischen Axiome ist das von Zermelo als solches bezeichnete *Auswahlaxiom*:

AC: Ist s ein System paarweise disjunkter Mengen, so existiert eine Menge z (eine sogenannte *Auswahlmenge*), die mit jedem nichtleeren $a \in s$ genau ein Element gemeinsam hat.

In dieser Formulierung sieht es recht harmlos aus, und tatsächlich wurde AC schon vor seiner expliziten Formulierung lange vorher als eine Art logisches Hilfsmittel verwendet, etwa von Cauchy und Weierstraß in ihrer neu begründeten Analysis. Auch Cantor verwendete das Auswahlprinzip naiv, ohne dies hervorzuheben. Erst erst nach seiner allgemeinen Formulierung und seine zielgerichtete Anwendung zum Beweis des Wohlordnungssatzes durch Zermelo wurde den Mathematikern bewusst, das man es hier in der Anwendung auf unendliche Gesamtheiten nicht mit einem logischen Prinzip zu tun hat. Seither ist es ein permanentes Diskussionsthema. Man beachte, für $s = \emptyset$ oder $s = \{\emptyset\}$ ist $z = \emptyset$ Auswahlmenge. Man kann diese Trivialfälle auch von Anfang an ausschließen und 'Auswahlmenge' nur für nichtleere Systeme paarweise disjunkter nichtleerer Mengen definieren, wie dies oft geschieht.

Es ist nicht die Tatsache einiger höchst unanschaulicher und paradox anmutender Konsequenzen von AC welche die Diskussionen über AC verursacht. Es wird auch nicht ernsthaft an seiner universellen Gültigkeit gezweifelt. Auch mit unangenehmen Konsequenzen hat man sich abgefunden, z.B. der Existenz nicht messbarer Mengen reeller Zahlen oder der Zerlegbarkeit einer Kugel in endlich viele Teile, aus denen man zwei Kugeln derselben Größe wie die usprüngliche zusammenbauen kann (das berühmte *Banach-Tarski Paradoxon*).

Mathematiker haben gelernt mit gewissen Diskrepanzen zwischen Anschauung und Wirklichkeit zu leben und ihre Anschauung entsprechend zu schärfen. Vielmehr resultiert das fortwährende Interesse an AC aus seinem besonderen Charakter im Vergleich mit den übrigen mengentheoretischen Axiomen. Diese sind nämlich von der Art, dass sie den Mengencharakter gewisser explizit definierbarer Gesamtheiten postulieren; sie versichern uns, dass gewisse definite Klassen als Mengen bezeichnet werden dürfen, ohne dass Widersprüche zu befürchten sind. Hingegen ist AC ein bloßes Existenzpostulat: es wird keine Vorschrift angegeben, in welcher Weise aus den nichtleeren Mengen eines disjunkten Mengensystems je ein Element auszuwählen wäre. Noch deutlicher wird diese Unbestimmtheit der Art und Weise des Auswählens bei vielen Konsequenzen von AC. Obwohl sich z.B. die reellen Zahlen auf vielerlei Weisen anschaulich beschreiben lassen, ist es nie gelungen, eine gemäß AC existierende Wohlordnung von $\mathbb{R}$ auch nur andeutungsweise zu beschreiben.

Diese Besonderheiten von AC haben dazu geführt, den Gebrauch von AC in Sätzen der Mengenlehre in der Regel anzuzeigen und AC nur dann zu verwenden, wenn dies unumgänglich ist. Dies ist nun auch wieder nicht verursacht durch eine Furcht vor Widersprüchen, die durch AC verursacht werden könnten – denn für Widersprüche wäre AC nicht verantwortlich, wie in **4.1** etwas näher ausgeführt wird – sondern wird verursacht durch den stark nichtkonstruktiven Charakter dieses Axioms. Wir werden uns erst in Kapitel **4** mit Konsequenzen von AC und einigen zu AC gleichwertigen Formulierungen beschäftigen.

Übungen

1. Man zeige *ohne* Verwendung von AC: Es sei s ein endliches System paarweise disjunkter Mengen. Dann existiert eine Auswahlmenge z für s, d.h. $z \cap a$ ist ein Singleton für alle nichtleeren $a \in s$.

   Hinweis. Satz 6.1. Für $s = \emptyset$ wähle $z = \emptyset$. Sei s ein System paarweise disjunkter Mengen mit einer Auswahlmenge z. Ferner sei b eine Menge derart, dass $a \cap b = \emptyset$ für alle $a \in s$. Ist $b = \emptyset$, so ist z auch Auswahlmenge für $s \cup \{b\}$. Sei $b \neq \emptyset$, etwa $e \in b$. Dann ist $z \cup \{e\}$ Auswahlmenge für $s \cup \{b\}$.

2. AC_n laute *Für die Menge a_n aller n-elementigen Teilmenge einer Menge a gibt es eine Auswahlmenge* $(n = 2, 3, \ldots)$. Man zeige, AC_2 impliziert AC_4 (Tarski; hingegen gilt nicht $\mathsf{AC}_2 \to \mathsf{AC}_n$ weder für $n = 3$ noch für $n > 4$).

   Hinweis. Sei f Auswahlfunktion für a_2 und $u \in a_4$. Für $x \in u$ sei q_x Anzahl aller $\{x, y\} \in a_2$ mit $f(\{x, y\}) = x$, q das kleinste aller q_x und $v = \{x \in u \mid q_x = q\}$. Zeige $v \subset u$. Bestimme Auswahl g(u) wie folgt: Ist $v \in u_1$, sei g(u) das Element in v. Ist $v \in u_3$, sei $g(u)$ das Element in $u \setminus v$. Ist $v \in u_2$, sei $g(u) = f(v)$.

3. Auf AC beruht die häufig vollzogene *Klassenauswahl*: Sei $(\forall a \in s)\exists y\, \varphi(a, y)$ bewiesen und die Klassen $\mathcal{C}_a = \{y \mid \varphi(a, y)\}$, $a \in s$, seien paarweise disjunkt. Zeige mittels AC und Acol *es gibt eine* Menge c*, so dass* $(\forall a \in s)(\exists! y \in c)\varphi(a, y)$.

   Hinweis. Acol liefert ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen.

2.8 Das Fundierungsaxiom

Eine kurzgefaßte wenn auch unvollständige Motivierung für die Einführung des Fundierungsaxioms ist die Tatsache, dass in der Mathematik nirgendwo Mengen $a, a_1, a_2, \dots$ auftreten, die eine unendliche absteigende $\in$-Kette $\dots \in a_2 \in a_1 \in a$ bilden. Ebensowenig begegnet man dort „$\in$-Kreisen“ $a_0 \in a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_0$. Jede Menge a mit $a \in a$ wäre ein Beispiel für $n = 1$. Die Existenz solcher Mengen kann auch mit den bisherigen Axiomen nicht gefolgert werden; sie kann aber ebensowenig widerlegt werden. Solche Mengen passen jedenfalls nicht in unser intuitives Bild. Sie werden ausgeschlossen durch das folgende Axiom, dessen Diskussion die Vorstellung des Axiomensystems ZFC beendet. Die vollen Konsequenzen dieses Axioms zeigen sich erst im Zusammenhang mit der von Neumannschen Hierarchie.

$$\mathsf{AF}: \quad (\forall x \neq \emptyset)(\exists v \in x)(\forall z \in x) z \notin v \quad (\textit{Fundierungsaxiom}).$$

So wurde es in [Zermelo 1930] formuliert. AF besagt: Jede nichtleere Menge enthält mindestens ein $\in$-minimales Element. Bezeichnet $\mu x := \{y \in x \mid x \cap y = \emptyset\}$ die Menge der $\in$-minimalen Elemente von x, dann lässt sich AF auch in der Weise $\mu x \neq \emptyset$ für alle $x \neq \emptyset$ formulieren. Anwendung von AF auf $\mathfrak{P}(a)$ ergibt die Fundiertheit einer jedem Menge. Eine kürzere Formulierung von AF ist $(\forall x \neq \emptyset)(\exists v \in x)\, x \cap v = \emptyset$, und eine Verallgemeinerung ist das unten mit AF und AI bewiesene *Fundierungsschema*

$$\mathsf{FuS}: \quad \mathcal{C} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists v \in \mathcal{C}) v \cap \mathcal{C} = \emptyset \quad (\mathcal{C} \text{ beliebige Klasse}).$$

Kurz formuliert, jede nichtleere Klasse hat ein $\in$-minimales Element.

AF schließt insbesondere die Existenz von Mengen $a \in a$ aus, weil das einzige Element von $\{a\}$ wegen $\mu\{a\} \neq \emptyset$ dann auch das $\in$-minimale sein muss. AF spielt eine gewisse Sonderrolle in ZFC. Trotz seiner Bedeutung für die Mengenlehre selbst bringt es nur geringe zusätzliche Erträge ein, was Anwendungen in der Mathematik betrifft. Wenn dem so ist, kann man natürlich die Frage stellen, wird durch AF die Mengenbildung nicht unnötig eingeschränkt? Nun, aus pragmatischer Sicht gibt es keine Anhaltspunkte dafür, dass AF die Reichhaltigkeit der Theorie beeinträchtigt. Man kann AF als ein Normierungsprinzip ansehen, dass uns unnötigen Ballast fernhält. AF verursacht eine hierarchische Struktur des Mengen-Universums wie in Kapitel **5** detailliert dargelegt wird. Ein erstes Indiz hierfür ist die weiter unten bewiesene Äquivalenz von AF mit dem sogenannten *Schema der $\in$-Induktion*

$$\mathit{Ind}_\in: \quad (\forall v \subseteq \mathcal{C}) v \in \mathcal{C} \rightarrow \forall v\, v \in \mathcal{C} \quad (\mathcal{C} \text{ beliebige Klasse}).$$

Kurzum, eine $\in$-induktive Klasse (siehe Seite 18) umfasst ganz $\mathcal{V}$. So ist z.B. die Russell-Klasse $\mathcal{R}$ nach Übung 3 in **2.1** $\in$-induktiv, also ist diese mit $\mathcal{V}$ identisch, was $v \notin v$ beweist. Auch die Klasse aller Mengen, die eine transitive Obermenge besitzen, gibt sich unschwer als $\in$-induktiv zu erkennen: Hat jedes $x \in a$ eine solche und existiert damit die transitive Hülle x^{tc}, so ist $a \cup \bigcup\{x^{tc} \mid x \in a\}$ transitive Obermenge von a, womit zugleich die Existenz von a^{tc} nachgewiesen wurde. Ist $\mathcal{C}$ definiert durch $\varphi = \varphi(v)$, kann $\mathit{Ind}_\in$ natürlich auch in der Weise $\forall v((\forall x \in v)\varphi(x) \to \varphi(v)) \to \forall v \varphi(v)$ geschrieben werden. $\mathit{Ind}_\in$ ist logisch äquivalent mit FuS. Das eine geht aus dem anderen hervor durch Kontraposition und Übergang zur Komplementärklasse, wie man mit etwas Geduld unschwer nachrechnet, Übung 2.

$\mathit{Ind}_\in \Rightarrow \mathsf{AF}$ ist klar, weil natürlich $\mathsf{FuS} \Rightarrow \mathsf{AF}$ und FuS mit $\mathit{Ind}_\in$ gleichwertig ist. $\mathsf{AF} \Rightarrow \mathit{Ind}_\in$ ist äquivalent mit $\mathsf{AF} \Rightarrow \mathsf{FuS}$. Dies zeigen wir indirekt. Angenommen $\mathcal{C}$ verletze das Schema FuS, etwa $a \in \mathcal{C}$ und $(\forall v \in \mathcal{C})\, v \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Die transitive Hülle a^{tc} lässt sich statt wie oben mit $\in$-Induktion auch mit dem u.a. auf dem Unendlichkeitsaxiom beruhenden Rekursionssatz für ω konstruieren, ganz nach dem Muster von Übung 3 in **2.5**. Man sieht sehr leicht, dass die Menge $\mathcal{C} \cap a^{tc}$ kein $\in$-minimales Element besitzen kann, was zu zeigen war.

Mitunter wird schlichtweg behauptet, AF sei wahr (wie auch die übrigen Axiome, siehe z.B. [Shoenfield 1977]). Wir wollen uns auf eine riskante Diskussion über den Wahrheitsbegriff in der Mathematik nicht einlassen, sondern lediglich festhalten, dass AF im Grunde nur ein besonders bequemes Axiom für die Mengenlehre darstellt. Natürlich stellt sich dann die Frage, wozu ein zusätzliches Axiom, weil zusätzliche Axiome immer auch die Frage der Widerspruchsfreiheit aller Axiome neu aufwerfen. Diese Frage muss man im Allgemeinen sehr ernst nehmen. Im vorliegenden Falle könnte man z.B. durchaus den Verdacht hegen, dass gewisse mittels der übrigen Axiome konstruierbare Mengen nicht fundiert sind. Deren Existenz stünde dann mit dem Postulat AF im Widerspruch und dies hätte die Inkonsistenz des gesamten Systems zur Folge und AF müsste aufgegeben werden.

Nun kann das Problem dieser relativen Widerspruchsfreiheit im vorliegenden Falle wenn auch nicht unmittelbar, so doch mit verhältnimäßig einfachen Überlegungen aus dem Wege geräumt werden. Wir werden im nächsten Abschnitt schon beweisen, dass die Widerspruchsfreiheit von ZFC garantiert ist, wenn nur die von ZFC^- gewährleistet ist. Der wesentliche Grund hierfür ist der sogleich erbrachte Nachweis, dass alle aus $\emptyset$ mittels der Operatoren $\bigcup, \mathfrak{P}, \{,\}$, sowie der Teilmengenbildung konstruierten Mengen die in AF geforderte Eigenschaft haben und dass AI auch die Existenz einer fundierten induktiven Menge sichert. Aber das reicht noch nicht hin. Wir betrachten aus diesem Grunde und als Vorbereitung auf den nächsten Abschnitt eine Verschärfung der Eigenschaft der Fundiertheit.

Definition. Eine Menge x heiße *grundiert*, wenn $\mu a \neq \emptyset$ für jede Menge a mit $x \in a$.

So ist sicher $\emptyset$ grundiert, denn wenn $\emptyset \in a$, so ist $\emptyset$ ein $\in$-minimales Element von a. Entscheidend für die nachfolgenden Konstruktionen ist der nichttriviale

Satz 8.1. *x ist genau dann grundiert, wenn alle $y \in x$ grundiert sind.*

Beweis. Das ist trivialerweise richtig für $x = \emptyset$. Sei also $x \neq \emptyset$ grundiert, $y \in x$ und $y \in a$. Wir haben zu zeigen $\mu a \neq \emptyset$. Wegen $x \in a \cup \{x\}$ ist $\mu(a \cup \{x\}) \neq \emptyset$. Weil $y \in x \cap (a \cup \{x\})$, kann x nicht $\in$-minimales Element von $a \cup \{x\}$ sein, also existiert ein $u \in a$ mit $u \cap (a \cup \{x\}) = \emptyset$. Erst recht ist dann $u \cap a = \emptyset$, folglich $u \in \mu a$. Seien umgekehrt alle $y \in x$ grundiert und $x \in a$. Zu zeigen ist $\mu a \neq \emptyset$. Ist $x \cap a = \emptyset$, so ist $x \in \mu a$. Andernfalls existiert ein $y \in x \cap a$ und y ist gemäß Annahme grundiert. Wegen $y \in a$ ist auch jetzt $\mu a \neq \emptyset$. ❏

Korollar 8.2. *Eine grundierte Menge x ist auch fundiert.*

Denn ist $u \subseteq x$ nichtleer, etwa $y \in u$, so ist y nach Satz **8.1** grundiert, also $\mu u \neq \emptyset$.

Damit wären alle bisher explizit konstruierten Mengen $a \neq \emptyset$ fundiert, falls uns der Nachweis gelingt, dass sie sämtlich grundiert sind. Das aber wird sich leicht aus Satz **8.1** ergeben, der unter sehr schwachen Voraussetzungen gilt. Es wird dort nebst AE nämlich im Wesentlichen nur der Mengencharakter von $a \cup \{x\}$ benutzt. Daher gelten auch die folgenden Aussagen unabhängig von AF :

Satz 8.3. *Mit x ist auch jede Teilmenge von x grundiert, ebenso wie die Mengen $\bigcup x$, $\mathfrak{P}(x)$ und $x^{\mathsf{s}} = x \cup \{x\}$.*

Beweis. Sei x grundiert. Dann sind gemäß Satz **8.1** alle Elemente von x grundiert und wiederum nach Satz **8.1** alle Teilmengen. Ferner sind die Elemente der Elemente von x grundiert, also auch $\bigcup x$. Da alle Teilmengen von x grundiert sind, ist nach Satz **8.1** auch $\mathfrak{P}(x)$ grundiert. Ferner ist mit x, y offenbar auch $\{x, y\}$ grundiert. Damit ist wegen $x \cup \{x\} \subseteq \bigcup\bigcup\{\mathfrak{P}x, \mathfrak{P}\mathfrak{P}x\}$ dann auch x^{s} grundiert. ❏

Weil $\emptyset$ grundiert ist und mit x auch x^{s}, ist ‘grundiert sein’ induktiv. Nach dem Induktionssatz 6.5 sind damit alle $z \in \omega$ grundiert. Mithin ist auch ω selbst grundiert. Kurzum, es gilt

Korollar 8.4. *ω ist grundiert und damit auch fundiert.*

In **2.9** wird gezeigt, dass auch Ersetzung und Auswahl von grundierten wieder zu grundierten Mengen führen. Es hat plötzlich den Anschein als könnten wir andere als grundierte Mengen mittels unserer Axiome überhaupt nicht konstruieren. Das ist in der Tat so. Man kann sogar viel weniger Mengen wirklich „konstruieren“.

Der tiefere Grund hierfür ist, dass AP uns zwar erlaubt, die Gesamtheit aller Teilmengen einer unendlichen Menge u selbst wieder als Menge zu bezeichnen, aber weder dieses noch die übrigen Axiome erzählen uns genauer, wie komplex Teilmengen von u wirklich sein können. Selbst die uns durch Aussonderung und Auswahl garantierten Teilmengen können so hochkompliziert sein, dass ihre Beschreibung unser Vorstellungsvermögen überschreitet. Das größte Problem in diesem Zusammenhang ist jedoch die in **3.4** bewiesene Überabzählbarkeit der Potenzmenge von u. Da es insgesamt nur abzählbar viele Beschreibungen von Teilmengen von u geben kann, besteht nicht geringste Chance einer vollständigen Beschreibung oder Klassifikation aller dieser Teilmengen.

Von der Konsistenz von AF mit den übrigen Axiomen sind wir nun fast überzeugt. Den rigorosen Beweis erbringen wir im nächsten Abschnitt. Bedeutsamer als das Resultat ist die dort vorgeführte Methode.

Übungen

1. Man beweise unter Verwendung von AF die Aussagen

   (a) $\forall x\, x \neq x^{\mathsf{S}}$,

   (b) $\forall xy(x^{\mathsf{S}} = y^{\mathsf{S}} \to x = y)$,

   (c) $\neg\exists x_0 \dots x_n(x_0 \in x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in x_0)$ $(n = 1, 2, \dots)$.

   Hinweis. (a): Wäre $x = x^{\mathsf{S}}$, so hätte $\{x\}$ kein $\in$-minimales Element. (b): Sei $x^{\mathsf{S}} = y^{\mathsf{S}}$. Aus $x \neq y$ folgt dann $x \in y$ und $y \in x$.

2. Man beweise im Detail, dass FuS und $Ind_{\in}$ logisch äquivalent sind.

3. Man beweise ohne AF: Ist a eine mindestens n-elementige transitive fundierte Menge, so ist $n \subseteq a$. Es gibt demnach nur eine n-elementige Menge dieser Art, nämlich n, und man hat eine weitere Definitionsmöglichkeit natürlicher Zahlen in schwachen Mengentheorien vor sich.

4. Sei $a \in \mathcal{T}r$. Man zeige $a \cup \{b\} \in \mathcal{T}r$ genau dann wenn $b \subseteq a$.

2.9 Relative Konsistenz des Fundierungsaxioms

Wir wollen jetzt detailliert darlegen, dass AF mit den übrigen Axiomen von ZFC verträglich oder konsistent ist. Kurzum, lässt sich in ZFC^- kein Widerspruch herleiten – das ist unsere Grundannahme – so gelingt dies auch nicht in ZFC. Der Anfänger kann diesen Abschnitt auch ohne Nachteil vorerst übergehen.

Wir machen uns erst eine bildhafte Vorstellung unseres Vorhabens. Gegeben sei ein Universum $\mathcal{V}$, auf welchem die Axiome von ZFC^- gelten. $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ sei die nach Satz 8.1 gewiss transitive Teilklasse aller grundierten Mengen. Unser Ziel ist der Nachweis, dass in $\mathcal{W}$ alle Axiome von ZFC gelten. $\mathcal{W}$ ist demnach selbst ein Universum, das nicht nur die Axiome von ZFC^-, sondern auch AF erfüllt. Wie schon gesagt, ist dies nur eine Veranschaulichung dessen, was wirklich getan wird. Wir verbleiben nämlich bis einschließlich Satz 9.1 gänzlich im Rahmen von ZFC^- (genauer, in der um die Definition von $\mathcal{W}$ erweiterte konservative Erweiterung von ZFC^-) und beweisen dort gewisse Fakten ohne über Universen zu reden. Gewisse Kenntnisse der Logik sind für ein volles Verständnis des Konsistenzbeweises leider unumgänglich. Die hier vorgeführte Methode heißt *Methode der inneren Modelle*. Bildlich gesprochen wird in ZFC^- ein Modell unter Erhalt des $\in$-Prädikats auf einer Teilklasse $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ konstruiert und bewiesen, dass $\mathcal{W}$ alle Axiome von ZFC erfüllt.

Bemerkung 1. Es gibt eine zweite grundlegende Methode zur Modellkonstruktion, die Forcing-Methode. Dort wird, bildlich gesprochen, der Bereich $\mathcal{V}$ vergrößert, was allerdings ungleich schwieriger zu bewerkstelligen ist. Nebenbei bemerkt ist $\mathcal{W}$ bereits in Z nachweislich echte Klasse gemäß Übung 4ze. Der Vorteil des hier vorgeführten rigorosen Konsistenzbeweises ist nicht nur ein didaktischer – nämlich dass er in einem ganz frühen Entwicklungsstadium der Mengentheorie ausgeführt werden kann – er wird zugleich auch die Konsistenz von Z bezüglich Z^- zeigen. Denn weder im Nachweis, dass $\mathcal{W}$ transitiv und $\in$–induktiv ist, noch im Beweis der relativierten Axiome (außer bei AR selbst) ist AR involviert. Dieser Konsistenzbeweis gelingt nicht mit dem inneren Modell der von Neumannschen Hierarchie oder dem Modell aller Mengen, deren transitive Hülle fundiert ist. Dort benutzt man mindestens die Existenz der transitiven Hülle. Diese ist aber in Z und auch in ZC nicht beweisbar (Jensen, Schröder 1969).

Wir benutzen jetzt neben den Variablen $x, y, \dots$ auch entsprechende Großbuchstaben $X, Y, \dots$ als Variablen, aber ausschließlich für Mengen aus $\mathcal{W}$. Jedem $\varphi \in \mathcal{L}_\in$ ordnen wir die Formel $\varphi^{\mathcal{W}}$ zu, die sich von φ nur dadurch unterscheidet, dass alle gebundenen Variablen $x, y, \dots$ von φ durch entsprechende Großbuchstaben $X, Y, \dots$ ersetzt wurden. Diese Formeln interpretieren wir so, dass die gebundenenen Variablen nur über $\mathcal{W}$ laufen. So bedeutet etwa $\forall X \exists Y\, X \in Y$, dass zu jedem $x \in \mathcal{W}$ ein $y \in \mathcal{W}$ mit

$x \in y$ existiert, also die (immer noch abgekürzte) $\mathcal{L}_\in$-Aussage $(\forall x \in \mathcal{W})(\exists y \in \mathcal{W}) x \in y$. Und $\exists X \in y$ bedeutet $(\exists x \in \mathcal{W}) x \in y$. Man nennt $\varphi^\mathcal{W}$ die auf $\mathcal{W}$ *Relativierte* von φ. $\varphi^\mathcal{W}$ kann auch ohne Benutzung großer Variablen mit einem in $\mathcal{L}_\in$ einführten Konstantensymbol $\mathcal{W}$ wie folgt erklärt werden: Für Primformeln φ sei $\varphi^\mathcal{W} = \varphi$. Ferner sei $(\neg\varphi)^\mathcal{W} = \neg\varphi^\mathcal{W}$, $(\varphi \wedge \psi)^\mathcal{W} = \varphi^\mathcal{W} \wedge \psi^\mathcal{W}$ und analog für $\vee$ und $\to$. Entscheidend sind hier die Klauseln $(\exists x \varphi)^\mathcal{W} = (\exists x \in \mathcal{W})\varphi^\mathcal{W}$ und $(\forall x \varphi)^\mathcal{W} = (\forall x \in \mathcal{W})\varphi^\mathcal{W}$.

Wenn wir jetzt behaupten, AF gelte in $\mathcal{W}$, so ist gemeint, dass die Aussage

$$\mathsf{AF}^\mathcal{W}: \quad \forall X[\exists Z\, Z \in X \to (\exists Y \in X)(\forall Z \in X) Z \notin Y]$$

in ZFC^- beweisbar ist. Dies ist nach obiger Erklärung die Kurzschrit der $\mathcal{L}_\in$–Aussage

$$(\forall x \in \mathcal{W})[(\exists z \in \mathcal{W}) z \in x \to (\exists y \in \mathcal{W})(y \in x \wedge (\forall z \in \mathcal{W})(z \in x \to z \notin y))].$$

Diese besagt ‘jedes nichtleere $x \in \mathcal{W}$ hat ein $\in$–minimales Element im Sinne von $\mathcal{W}$’. Um dies verständlich zu machen beginnen wir mit folgender

Definition. Ähnlich wie ein zweistelliges sei ein *n-stelliges* Prädikat definiert durch eine Formel $\varphi = \varphi(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ein derartiges Prädikat $\mathcal{Q}$ heißt *absolut* für $\mathcal{W}$ wenn $(\forall \vec{x} \in \mathcal{W})(\varphi^\mathcal{W}(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}))$ in ZFC^- beweisbar ist.

Damit diese Definition Sinn macht, umfasst ZFC^- selbstverständlich stillschweigend die explizite Definition von $\mathcal{W}$. Bezeichnet $\mathcal{Q}^\mathcal{W}$ das durch $\varphi^\mathcal{W}$ auf $\mathcal{W}$ definierte Prädikat, so heißt dies, $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}^\mathcal{W}$ stimmen auf $\mathcal{W}$ überein. Kurzum, für $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{W}$ gilt $\mathcal{Q}(x_1, \dots, x_n)$ genau dann, wenn „$\mathcal{Q}(x_1, \dots, x_n)$ im Sinne von $\mathcal{W}$“. Für $n = 0$ bedeutet dies, dass die Aussagen φ und $\varphi^\mathcal{W}$ in ZFC^- äquivalent sind. Man kann den Begriff der Absolutheit in diesem Sinne auch auf andere nichtleere Klassen $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ beziehen, wobei die Relativierte $\varphi^\mathcal{U}$ völlig analog erklärt sei.

Beispiel. Wir behaupten, das Prädikat ‘$x \subseteq y$’ ist absolut für $\mathcal{W}$. Dazu ist ohne Fundierungsaxiom zu beweisen $(\forall x, y \in \mathcal{W})(\forall Z(Z \in x \to Z \in y) \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y))$. Seien $x, y \in \mathcal{W}$ und $\forall Z(Z \in x \to Z \in y)$ angenommen. Zum Nachweis von $z \in x \to z \in y$ für beliebiges z sei $z \in x$. Weil $x \in \mathcal{W}$, ist wegen der Transitivität von $\mathcal{W}$ sicher auch $z \in \mathcal{W}$ und daher $z \in y$. Die andere Richtung von $\leftrightarrow$ ist offensichtlich. Hier wurde lediglich die Transitivität von $\mathcal{W}$ benutzt. Allein aufgrund dieser Eigenschaft gibt es eine sehr reiche Klasse absoluter Prädikate, nämlich alle diejenigen, die durch beschränkte Quantifikation definierbar sind, Übung 3.

Wir schreiben $\Sigma \vdash \varphi$ für ‘φ ist aus den Axiomen des Axiomensystems Σ beweisbar’.

Satz 9.1. $\mathsf{ZFC}^- \vdash \varphi^\mathcal{W}$ *für jedes Axiom* φ *von* ZFC.

Beweis. Wir beweisen zuerst $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$. Sei ein nichtleeres $x \in \mathcal{W}$ gegeben. Dann hat x nach Korollar **8.2** ein $\in$–minimales Element y. Da $\mathcal{W}$ transitiv ist, gilt auch $y \in \mathcal{W}$. Weil $z \notin y$ für alle $z \in x$, gilt das erst recht für alle $z \in \mathcal{W}$. Damit gilt $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$, d.h. $\mathsf{AF}^{\mathcal{W}}$ wurde in ZFC^- bewiesen [4)]. Als nächstes beweisen wir $\mathsf{AE}^{\mathcal{W}}$, also die Aussage $(\forall x \in \mathcal{W})(\forall y \in \mathcal{W})[(\forall z \in \mathcal{W})(z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y)]$. Denn seien $x, y \in \mathcal{W}$ und sei $z \in x \leftrightarrow z \in y$ für alle $z \in \mathcal{W}$. Obgleich x, y nur die gleichen Elemente aus $\mathcal{W}$ besitzen, enthalten x, y insgesamt genau dieselben Elemente, weil alle $z \in x$, $z \in y$ wegen $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{T}r$ auch in $\mathcal{W}$ liegen. Also $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ und damit tatsächlich $x = y$.

Auf diese Weise überprüfen wir alle übrigen Axiome. Dabei kann auf AS und Apa verzichtet werden, weil diese aus den verbleibenden Axiomen herleitbar sind. Dass $\mathsf{AU}^{\mathcal{W}}$ und $\mathsf{AP}^{\mathcal{W}}$ beweisbar sind, ist ziemlich genau der Inhalt des Satzes 8.3 in **2.8**. Man verdeutliche sich, dass $\bigcup a$ auch die Vereinigungsmenge im Sinne von $\mathcal{W}$ ist und dasselbe für $\mathfrak{P}(a)$; kurz, $\bigcup$ und $\mathfrak{P}$ sind absolut für $\mathcal{W}$. Ebenso ist $\mathsf{AI}^{\mathcal{W}}$ beweisbar, denn das läuft auf die Behauptung hinaus, dass eine induktive grundierte Menge existiert: ω ist eine solche. Also muss man nur noch überlegen, dass eine induktive Menge auch induktiv ist im Sinne von $\mathcal{W}$. Das ist nicht schwer, denn das Prädikat ‘induktiv’ erweist sich leicht als absolut (Übung 2).

$\mathsf{AC}^{\mathcal{W}}$ ist beweisbar, weil ein System $s \neq \emptyset$ nichtleerer grundierter Mengen, die im Sinne von $\mathcal{W}$ paarweise disjunkt sind, auch tatsächlich paarweise disjunkt sind. Eine Auswahlmenge a für s ist wegen $a \subseteq \bigcup s$ grundiert und daher auch Auswahlmenge im Sinne von $\mathcal{W}$. Was verbleibt, ist für vorgegebenes $\varphi(x, y)$ der Beweis von

$$\mathsf{AR}^{\mathcal{W}}: \quad \forall X \exists^{\leqslant 1} Y \psi \rightarrow \exists U \forall Y((\exists X \in A)\psi \leftrightarrow Y \in U),$$

mit $\psi = \psi(X, Y) := \varphi^{\mathcal{W}}$. Dabei denken wir uns nebst A auch eventuelle Parameter als Großbuchstaben generalisiert. Sei also $\forall X \exists^{\leqslant 1} Y \psi(X, Y)$ angenommen. $\psi(x, y)$ erfüllt nicht unbedingt $\forall x \exists^{\leqslant 1} y \psi(x, y)$. Aber dem kann leicht abgeholfen werden durch Modifikation von $\psi(x, y)$ zu $\chi(x, y) := x \in \mathcal{W} \wedge \psi(x, y) \vee x \notin \mathcal{W} \wedge x \neq x$. Der Leser sollte keine Mühe haben, aus $\forall X \exists^{\leqslant 1} Y \psi(X, Y)$ nunmehr $\forall x \exists^{\leqslant 1} y\, \chi(x, y)$ herzuleiten. Sei F der durch $\chi(x, y)$ definierte Operator, der offenbar $\mathit{dom}\, F \subseteq \mathcal{W}$ erfüllt. Wegen $A \subseteq \mathcal{W}$ und $\forall X \exists^{\leqslant 1} Y \psi$ ist auch $F[A] \subseteq \mathcal{W}$. Daher ist klar, dass $U = F[A]$ die Konklusion der Implikation $\mathsf{AR}^{\mathcal{W}}$ erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen. ❑

Eine Theorie T' heiße *relativ konsistent* zur Theorie T, wenn die Konsistenz von T' die von T impliziert, d.h. ist in T' kein Widerspruch herleitbar, so auch nicht in T.

---

4) Wir haben hier gezeigt: hat X ein $\in$–minimales Element, so hat X auch ein minimales Element im Sinne von $\mathcal{W}$. Auch die Umkehrung gilt, denn für jedes nichtleere $x \in \mathcal{W}$ ist bekanntlich $\mu x \neq \emptyset$. Also ist die Eigenschaft ‘x hat ein $\in$–minimales Element’ absolut für $\mathcal{W}$.

Obwohl von Anbeginn an stillschweigend angenommen wird, ZFC sei konsistent, lässt sich diese Annahme zumindest auf diejenige von ZFC^- reduzieren:

Satz 9.2. ZFC *ist relativ konsistent zu* ZFC^-.

Kurzum, mit ZFC^- ist auch ZFC konsistent. Der naive Beweis ist einfach. Nach Satz 9.1 wurde in der als konsistent vorausgesetzten Theorie ZFC^- ein Modell für ZFC auf der Menge $\mathcal{W}$ konstruiert, und es ist unmittelbar einsichtig, dass eine Theorie konsistent ist, wenn sie ein Modell hat.

Bemerkung 2. Der angegebene naive Beweis überschreitet wegen seiner modelltheoretischen Natur den Rahmen einer finiten Metatheorie. Der relative Konsistenzbeweis läßt sich jedoch mit ein wenig Mehraufwand wie folgt rein beweistheoretisch ausführen. Wir schreiben die Axiome von ZFC in der Sprache $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$ auf und nehmen an, es sei in ZFC ein Widerspruch, z.B. $\exists X\, X \neq X$, beweisbar. Dabei unterscheidet sich $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$ von $\mathcal{L}_\in$ nur dadurch, dass alle Variablen Großbuchstaben sind. Ein Beweis dieses Widerspruchs ist, formal gesprochen, eine Folge $(\pi_i)_{i\leqslant n}$ von Formeln aus $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$, endend mit der Aussage $\exists X\, X \neq X$. $(\pi_i)_{i\leqslant n}$ enthält gewisse der im Beweis benötigten Axiome von ZFC, also Aussagen der Gestalt $\alpha^{\mathcal{W}}$, wobei $\alpha \in \mathcal{L}_\in$ entweder ein Axiom von ZFC^- oder die Aussage AF ist. $(\pi_i)_{i\leqslant n}$ ist nach wohlbestimmten Regeln eines Logikkalküls aufgebaut, der sich um die Inhalte dieser Formeln nicht kümmert. Diese Regeln sind nun von der Art, dass $(\pi_i)_{i\leqslant n}$ auch ein Beweis in $\mathcal{L}_\in$ ist, wenn man die vorkommenden $\mathcal{L}_\in^{\mathcal{W}}$-Formeln wie angegeben als $\mathcal{L}_\in$-Formeln deutet und wenn man vorher $\exists X\, X = X$ (d.h. $\exists x\, x \in \mathcal{W}$) bewiesen hat, was offensichtlich ist. Hier benutzen wir einen aus der mathematischen Logik bekannten Sachverhalt, der rein beweistheoretischer Natur ist (siehe z.B. [Rautenberg 1995 oder 2006]). Fügt man für jedes der in $(\pi_i)_{i\leqslant n}$ vorkommenden Formeln π_i noch den Beweis von $\pi_i^{\mathcal{W}}$ gemäß Satz 9.1 hinzu, so erhält man damit insgesamt einen Beweis für $\exists X\, X \neq X$ in $\mathcal{L}_\in$, d.h. für $\exists x(x \in \mathcal{W} \wedge x \neq x)$, und daraus einen etwas verlängerten Beweis für $\exists x\, x \neq x$. Das aber wäre ein Beweis für die Inkonsistenz von ZFC^-. Satz 9.2, eigentlich ein Metatheorem, ist wie alles in dieser Darstellung auch in ZFC beweisbar, weil ZFC seine eigene Syntax und das Beweisen problemlos beschreiben kann. Tatsächlich ist der Satz schon in PA und noch weitaus schwächeren arithmetischen Theorien beweisbar, was hier nur am Rande erwähnt sei.

Der Beweis von Satz 9.1 zeigt klar, dass man ein inneres Modell für ZFC^- auf jeder Klasse $\mathcal{U}$ hätte konstruieren können, welche wie $\mathcal{W}$ folgende Eigenschaften hat:

(a) $\mathcal{U}$ ist transitiv, d.h. es ist beweisbar $(\forall x \in \mathcal{U})x \subseteq \mathcal{U}$,

(b) $\mathcal{U}$ ist $\in$-induktiv, d.h. es ist beweisbar $(\forall x \subseteq \mathcal{U})x \in \mathcal{U}$.

Verlangt man darüber hinaus die Gültigkeit von AF auf $\mathcal{U}$, so gibt es keine große Auswahl: $\mathcal{W}$ ist das einzige innere Modell mit den Eigenschaften (a),(b) (Übung 5). Wir haben sozusagen Glück gehabt.

Bemerkung 3. Es ist höchst bemerkenswert, dass es ein inneres Modell von $\mathcal{V}$ (auf der Basis von ZF und damit auch von ZF^-) gibt, welches weit mehr Aussagen erfüllt als nur ZFC selbst, und zwar das 1938 von K. Gödel (1906 - 1978) entdeckte und seither mit L bezeichnete Universum der sogenannten *konstruktiblen* Mengen. In dem Universum $V = L$ gilt u.a. das Auswahlaxiom und auch die Kontinuumhypothese, womit deren Konsistenz relativ zu ZF bewiesen sind. Um L zu erhalten, muss man sich erheblich mehr anstrengen, siehe z.B. [Kunen 1980]. Auf die Absolutheit von L bezüglich $\mathfrak{P}$ und der von $\mathfrak{P}$ abhängigen Operationen muss dabei allerdings verzichtet werden. Gödel sebst hat das Axiom $V = L$ als nicht unserer Intuition gerecht werdend angesehen. Aber bis heute fehlen überzeugende Argumente, die gegen $V = L$ sprechen.

Übungen

1. Man beweise $\mathsf{Z}^- \vdash \alpha^{\mathcal{W}}$ für jedes der Aussonderungsaxiome α direkt.
2. Man zeige, ist $\mathcal{U}$ transitiv, so sind folgende Prädikate absolut für $\mathcal{U}$:

   '$x \subseteq y$', '$x = \emptyset$', $x_1 \cap x_2 = \emptyset$', 'x hat ein $\in$–minimales Element',

   'x ist transitiv', 'x ist induktiv', '$y = x_1 \cup x_2$', [5)]

   '$y = \{x_1, x_2\}$', '$y = \bigcup x$', '$x = \omega$', '$x \in \omega$'.
3. Man verallgemeinere Übung 2 zu folgendem

   Satz. *Ist* $\mathcal{U} \neq \emptyset$ *transitiv, so ist jedes* Δ_0*–definierbare Prädikat absolut für* $\mathcal{U}$.

   Dabei heißt $\mathcal{Q}$ Δ_0–*definierbar*, wenn für $\mathcal{Q}$ eine definierende Δ_0–Formel gibt. Δ_0–*Formeln* sind solche, die aus den Primformeln mittels $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ und beschränkter Quantifikation aufgebaut sind: es wird nur zugelassen, dass mit φ auch $(\exists x \in y)\varphi$ und $(\forall x \in y)\varphi$ Δ_0–Formeln sind ($x \neq y$). So ist z.B. $\subseteq$ durch die Δ_0–Formel $(\forall z \in x) z \in y$ definierbar.

   Hinweis. Induktion über den Aufbau von Δ_0-Formeln.
4. Sei F eine ein– oder mehrstellige Operation und sei $\mathcal{U} \neq \emptyset$ transitiv. F heiße *absolut* für $\mathcal{U}$, wenn $\mathcal{U}$ abgeschlossen ist bez. F (d.h. $x \in \mathcal{U} \to F(x) \in \mathcal{U}$ ist beweisbar) und wenn das Prädikat '$y = F(x)$' absolut ist. Man zeige, ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$ transitiv und gegenüber $\cup, \mathfrak{P}, \{,\}$ abgeschlossen, so sind diese Operationen automatisch absolut für $\mathcal{U}$. Zugleich ist $\mathcal{U}$ inneres Modell für ZC^-.
5. Man zeige in ZF^-: Es gibt genau eine transitive und $\in$-induktive Klasse $\mathcal{U}$, so dass AF in $\mathcal{U}$ gilt. Weil AF in $\mathcal{W}$ gilt, ist $\mathcal{W}$ diese Klasse.

[5)] Das bedeutet nicht, dass $\mathcal{U}$ gegenüber der Operation $\cup$ abgeschlossen sein muss. Es soll nur festgestellt werden: Ist $Y = X_1 \cup X_2$ im Sinne von $\mathcal{U}$, so ist tatsächlich $Y = X_1 \cup X_2$, und umgekehrt.

Kapitel 3

Funktionen und Relationen

Man hört oft die Meinung, der Funktionenbegriff ordne sich dem Mengenbegriff unter und es sei erst mengentheoretisch möglich, unter Benutzung der geordneten Paare den Funktionsbegriff in seiner vollen Allgemeinheit zu präzisiern. Das ist so nicht ganz richtig und diese Meinung erklärt auch nicht, warum eine rein mengentheoretische Definition des Funktionsbegriffs historisch gesehen erst relativ spät in der Mengenlehre Eingang fand. Vielmehr erwuchs diese Definition aus dem Bestreben, die Mengenlehre als universelles Fundament der Mathematik zu etablieren. Inzwischen sind Funktionen als Mengen geordneter Paare allerdings auch innerhalb der Mengenlehre zu einem unentbehrlichen Werkzeug geworden. Nicht zuletzt deswegen behandeln wir hier Funktionen vor den Relationen. Im Mittelpunkt stehen der Satz von Cantor über die Nichtäquivalenz einer Menge mit ihrer Potenzmenge, und der Cantor–Bernsteinsche Äquivalenzsatz. Letzteren formulieren wir in voller Allgemeinheit auch für Klassen.

Wegen ihrer besonderen Bedeutung für die Anwendungen werden nebst abzählbaren auch einige wichtige überabzählbare Mengen schon in diesem Kapitel betrachtet. In **3.5** werden die Wohlordnungen behandelt, die für das „Zählen“ unendlicher Mengen unentbehrlich sind.

In **3.6** treffen wir alle Vorbereitungen im Hinblick auf die Beweise des Wohlordnungssatzes und anderer Maximalprinzipien in Kapitel **4**, wobei wir methodisch etwas anders vorgehen als in traditionellen Lehrbüchern. Es wird überwiegend mit Fixpunktsätzen gearbeitet. Im Mittelpunkt steht eine AC–freie Konstruktion von Ketten (Theorem 1 in **3.6**), die einen Extrakt klassischer Beweise der erwähnten Sätze darstellt und sehr anwendungsfähig ist.

3.1 Funktionen

Intuitiv ist eine Funktion f einer Menge a in eine Menge b eine Vorschrift, nach der jedem $x \in a$ eindeutig ein $y \in b$ zugeordnet wird. Von dieser verlangen wir nur, dass sie definit ist, d.h. durch eine Formel $\varphi(x,y)$ definiert wird, so dass beweisbar ist

$$(*) \quad (\forall x \in a)(\exists! y \in b)\varphi(x,y).$$

Genau dies ist die Art und Weise, in der man Funktionen naiv zu definieren pflegt, wenn man davon absieht, dass φ in $(*)$ nicht nur eine $\mathcal{L}_\in$–Formel, sondern oft auch eine Formel einer anderen formalisierten Sprache ist.

Völlig analog stellt man sich unter einer auf a definierten binären Operation f eine durch $\varphi = \varphi(x, x', y)$ definierte Operation vor, so dass $(\forall x \in a)(\forall x' \in a)\exists! y\varphi(x, x', y)$ erfüllt ist. Hier ist von geordneten Paaren nicht die Rede. Die Reihenfolge der Argumente ist durch φ selbst gegeben, indem man z.B. sagt, x sei das linke, x' das rechte Argument. Dies ist völlig ausreichend, wenn φ oder die Beschreibung von φ konkret vorliegen. Hier liegt die Ursache, warum eine mengentheoretische Definition des geordneten Paares, eine Voraussetzung für die mengentheopretische Definition des Funktionsbegriffs, erst recht spät in die Mengenlehre eingeführt wurde.

Definition. $f \in \mathcal{V}$ heißt eine *Funktion*, wenn f eine Menge von geordneten Paaren ist, so dass $(x,y) \wedge (x,y') \in f \to y = y'$. Man nennt $\mathit{dom}\, f := \{x \mid \exists y (x,y) \in f\}$ den *Definitionsbereich* (*domain*) von f und $\mathit{ran}\, f := \{y \mid \exists x\, (x,y) \in f\}$ den *Bildbereich* (*range*) von f. Ist $a = \mathit{dom}\, f$ und $b \supseteq \mathit{ran}\, f$, heißt f eine Funktion von *a nach b*, kurz $f : a \to b$. Für $u \subseteq \mathit{dom}\, f$ heißt $f[u] := \{y \in \mathit{ran}\, f \mid (\exists x \in u)(x,y) \in f\}$ auch das *Bild* von u. Ist $\mathit{dom}\, f = \omega$ oder $\mathit{dom}\, f = n$ mit $n \in \omega$, so heißt f eine *Folge*. Im letzteren Falle spricht man von einer *endlichen* Folge, Bezeichnung $f = \langle f(0), \ldots, f(n-1)\rangle$ oder kürzer $f = \langle f_i \rangle_{i<n}$. Es bezeichne $\mathcal{F}n$ die Klasse aller Funktionen.

Mit f sind auch $\mathit{dom}\, f$ und $\mathit{ran}\, f$ Mengen, und zwar Teilmengen von $\bigcup\bigcup f$. Das für $x \in \mathit{dom}\, f$ eindeutig bestimmte y mit $(x,y) \in f$ wird standardmäßig mit $f(x)$ bezeichnet, aber auch Bezeichnungen wie fx oder f_x oder x^f oder gar xf sind gebräuchlich. Man kann den zweistelligen Operationsterm $f(x)$ aus Formeln, die diesen enthalten, mittels der Äquivalenz $f(x) = y \leftrightarrow (x,y) \in f$ wieder eliminieren. Zweistellig deshalb, weil der Operationsterm $f(x)$ ja von den Mengenvariablen f und x abhängt.

$f : a \to b$ kürzt das etwas längliche Prädikat 'f ist Funktion mit $\mathit{dom}\, f = a$ und $\mathit{ran}\, f \subseteq b$' ab. Aber auch Redeweisen wie 'es gibt ein f mit $f : a \to b$ und …' verkürzt man mitunter zu 'es gibt ein $f : a \to b$ mit …'. Dieser traditionelle Sprachmissbrauch verursacht keine Missverständnisse, wie auch die ähnlich verkürzende Formulierung ‘es gibt ein $x < a$ mit $x^2 = a$’ kaum zu Missverständnissen führt.

Ganz analog erklärt man mehrstellige Funktionen von a nach b, auch *Verknüpfungen* von a nach b genannt. So ist eine binäre Verknüpfung von a mit Werten in b eine Menge f mit $f : a \times a \to b$. Damit ist man imstande, z.B. den Begriff einer Gruppe mengentheoretisch zu definieren. Eine *Gruppe* ist ein Tripel (g, f, e) derart, dass $e \in g$ und $f : g \times g \to g$ und f die bekannten Eigenschaften einer Gruppenoperation mit dem neutralen Element e hat. Der Gruppenbegriff ist also eine definite Eigenschaft und es lässt sich von der Klasse aller Gruppen reden. Völlig analoges gilt für andere Strukturklassen, wie Ringe, topologische Räume, geometrische Räume usw.

Diese Tatsache mag grundlagentheoretisch befriedigend sein. Aber weder für die Gruppentheorie, noch für irgendeine andere mathematische Disziplin wird damit sachlich gesehen irgendetwas gewonnen. Immerhin kann man bei tiefergehenden Fragestellungen innerhalb einer Disziplinen auf Probleme stoßen, die mit gewissen Unabhängigkeitsresultaten über ZFC zusammenhängen. Dann muss man über die Grundlagen der betreffenden Disziplin sehr genau nachdenken.

Kehren wir zu den mengentheoretischen Funktionen zurück. Zunächst ist auch $\emptyset$ eine Funktion, die *leere Funktion*, denn $\emptyset$ ist die leere Menge von geordneten Paaren und die Definitionsbedingung ist trivial erfüllt. Es gilt $dom\,\emptyset = ran\,\emptyset = \emptyset$ und $\emptyset : \emptyset \to b$ für beliebiges b.

Offenbar ist mit $g \subseteq f \in \mathcal{F}n$ auch $g \in \mathcal{F}n$. Kurzum, $\mathcal{F}n$ ist unter Teilmengenbildung abgeschlossen. Für $f : a \to b$ und $u \in \mathcal{V}$ bezeichne $g := f{\restriction}u := \{(x, y) \in f \mid x \in u\}$ die *Einschränkung* von f auf u. Offenbar ist $g \subseteq f$. Daher heißt f auch *Fortsetzung* oder *Erweiterung* der Funktion g. Für Operatoren wird alles sinngemäß erklärt.

Wir sagen, die Funktion f sei *injektiv*, wenn $(\forall x, y \in dom\, f)(f(x) = f(x') \to x = x')$ und schreiben $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ für den Fall $f : a \to b$. So ist z.B. $f : a \xrightarrow{\text{inj}} \mathfrak{P}(a)$, wobei f durch $f(x) = \{x\}$ definiert sei; mit anderen Worten, $f = \{(x, \{x\}) \mid x \in a\}$). Anstelle von $f(x) = \{x\}$ darf wie üblich auch $f : x \mapsto \{x\}$ geschrieben werden und analog für andere „Term-definierte“ Funktionen.

Für $f : a \to b \wedge ran\, f = b$, schreiben wir meistens $f : a \xrightarrow{\text{sur}} b$ und sagen f sei Funktion *von a auf b*, oder kurz $f : a \to b$ sei *surjektiv*. Schließlich stehe $f : a \xrightarrow{\text{bij}} b$ für

$$f : a \xrightarrow{\text{inj}} b \ \wedge \ f : a \xrightarrow{\text{sur}} b.$$

Man sagt dann, f sei *bijektiv* von a auf b, oder f sei eine *Bijektion* von a auf b. Ein Beispiel ist die *identische Funktion* id_a mit $id_a(x) = x$ für alle $x \in a$. Man beachte, eine Funktion f als mengentheoretisches Objekt ist nicht von Natur aus surjektiv oder bijektiv, sondern in der Formulierung $f:a \to b$ immer nur bezüglich der Zielmenge b. Bijektionen ermöglichen es uns, Mengen ihrem Umfang nach miteinander zu vergleichen. Daher präsentieren wir bereits an dieser Stelle folgende

Definition. a und b heißen *gleichmächtig* oder *äquivalent* wenn ein $f \in \mathcal{F}n$ mit $f:a \xrightarrow{\text{bij}} b$ existiert, symbolisch $a \sim b$.

Offensichtlich gelten $a \sim a$ und $a \sim b \to b \sim a$, sowie $a \sim b \sim c \to a \sim c$, für alle Mengen a, b, c. Kurzum, $\sim$ ist Beispiel einer (auf dem gesamten Universum erklärten) Äquivalenzrelation, über die wir im nächsten Abschnitt reden werden. Mit einigen weiteren einfachen Eigenschaften von $\sim$ befassen sich vorerst einige Übungen. Für eine endliche Menge a ist mit $a \sim b$ auch b endlich, weil das Bild einer endlichen Menge unter einem beliebigen Operator nach Übung 2 in **2.6** wieder endlich ist.

Ist f injektiv, so sei $f^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in f\}$. Dann ist auch $f^{-1} \in \mathcal{F}n$ und selbst wieder injektiv. f^{-1} heißt die *Inverse* oder die *Umkehrfunktion* von f. Ferner ist sehr wichtig festzuhalten, dass die Inverse einer Bijektion von a auf b eine Bijektion von b auf a ist. Wichtige Bijektionen sind Abzählungen endlicher Mengen.

Sei a endlich. Eine *Abzählung von a der Länge n* ist eine Bijektion $\alpha : n \xrightarrow{\text{bij}} a$. Es wird a hier gezählt mit den Zahlen aus $n = \{0, \dots, n{-}1\}$, was in der Mathematik nicht unüblich ist. Aus dem Induktionssatz **2.6.1** folgt leicht, dass jede endliche Menge a eine Abzählung besitzt: Die leere Funktion ist Abzählung von $\emptyset$; hat a eine Abzählung der Länge n und ist $b \notin a$, so hat $a \cup \{b\}$ offenbar eine Abzählung der Länge n^{s}. Nicht unmittelbar klar ist hingegen die experimentelle Erfahrung, dass jede endliche Menge ihre Abzählungslänge eindeutig bestimmt. Dies besagt der

Satz 1.1 (Zählsatz). *Abzählungen derselben endlichen Menge sind gleichlang.*

Beweis mit Satz **2.6.1**. Nur die leere Funktion ist Abzählung von $\emptyset$. Ihre Länge ist 0. Seien nach Induktionsannahme alle Abzählungen einer Menge x gleichlang, $\xi : n \xrightarrow{\text{bij}} x$ Abzählung von x und $y \notin x$, so dass $a := x \cup \{y\} \neq x$. Dann ist offenbar $\alpha := \xi \cup \{(n, y)\}$ Abzählung von a der Länge n^{s}. Sei $\beta : m^{\mathsf{s}} \xrightarrow{\text{bij}} a$ eine weitere Abzählung von a, die gewiss nicht $\emptyset$ sein kann. Betrachten wir zunächst den Fall $\beta(m) = y$. Dann ist $\beta \restriction m$ Abzählung von x. Also $m = n$ und damit $m^{\mathsf{s}} = n^{\mathsf{s}}$, d.h. α und β sind gleichlang. Im Falle $\beta(m) = c \neq y = \beta(k)$ entstehe die Abzählung β' von a aus β durch „Vertauschen der Nummern“ von y und c. Also $\beta'(m) = y$, $\beta'(k) = c$ und $\beta'(i) = \beta(i)$ sonst. β' und β sind gleichlang und haben nach dem Sonderfall dieselbe Länge wie α. Damit sind α und β auch in diesem Falle gleichlang. ❑

Zu jeder endlichen Menge a gibt es demnach genau ein $n\in\omega$ mit $a\sim n$, symbolisch $n=|a|$, genannt die *Anzahl* der Elemente von a. Die Definition von $|a|$ wird in **6.2** auf beliebige Mengen a erweitert. Dann spricht man einer Tradition folgend von der *Kardinalzahl* $|a|$.

Mit ${}^a b$ bezeichnet man die Menge aller Funktionen $f: a\to b$. Offenbar gilt ${}^a\emptyset=\emptyset$ für $a\neq\emptyset$, sowie ${}^{\emptyset}b=1$ $(=\{\emptyset\})$. Die Menge ${}^a 2$ mit $2=\{0,1\}$ steht in enger Beziehung zu den Teilmengen von a. Ist $u\subseteq a$, erklärt man die *charakteristische Funktion* $\chi_u^a\in{}^a 2$ durch $\chi_u^a(x)=1$ für $x\in u$ und $\chi_u^a(x)=0$ sonst. Es ist plausibel, dass eine natürliche Bijektion zwischen $\mathfrak{P}(a)$ und ${}^a 2$ besteht (Übung 4).

Sind f,g Funktionen und ist $\mathit{ran}\, g\subseteq \mathit{dom}\, f$, so erklärt man die *Verkettung* oder das *Produkt* $h=f\cdot g$ durch $h(x)=f(g(x))$ für alle $x\in \mathit{dom}\, g$. Sind für $f,g,h\in\mathcal{F}n$ die Produkte $f\cdot g$ und $g\cdot h$ erklärt, beweist man mühelos folgende Gleichung, in der dann automatisch alle vorkommenden Produkte wohldefiniert sind:

$$f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h.$$

Man beachte, dass für $f,g\in{}^a a$ das Produkt $f\cdot g$ immer erklärt ist. Die Teilmenge S_a aller $f\in{}^a a$ mit $f: a\xrightarrow{\text{bij}} a$ bildet bezüglich $\cdot$ eine Gruppe mit dem neutralen Element id_a, die *Permutationsgruppe* von a.

Sind a und I Mengen, so heißt eine Funktion $f: I\to a$ auch eine *Familie von Elementen aus* a – hier darf man sich aussuchen, ob mit Familie die Funktion f oder das Tripel (f,I,a) gemeint ist. $f(i)$ wird oft mit a_i oder ähnlich bezeichnet. I heißt die *Indexmenge* dieser zuweilen auch mit $(a_i)_{i\in I}$ bezeichneten Familie, im Unterschied zum Bild $\{a_i\mid i\in I\}$. Man erklärt $\bigcup\limits_{i\in I} a_i := \bigcup\{a_i\mid i\in I\}$ (analog für $\bigcap$).

Manche Rechengesetze sind in dieser Notation etwas einprägsamer, z.B. gilt

$$\Big(\bigcup_{i\in I} a_i\Big)\cap b=\bigcup_{i\in I}(a_i\cap b),$$

$$\bigcup_{i\in I} a_i\ \cap\ \bigcup_{j\in J} b_j=\bigcup_{i\in I,\,j\in J}(a_i\cap b_j)\ \ \big(:=\textstyle\bigcup_{i\in I}(\bigcup_{j\in J} a_i\cap b_j)\big).$$

Diese und ähnliche Notationen erklären sich in der Regel selbst. Übrigens gilt die letztgenannte Formel auch, wenn I,J beliebige Klassen bezeichnen.

Es ist gelegentlich von Vorteil, einen durch die Formel $\varphi(x,y)$ definierten Operator F (siehe **1.5**) mit der Klasse $\{(x,y)\mid\varphi(x,y)\}$ zu identifizieren und alle für Funktionen erklärten Definitionen und Redeweisen sinngemäß auf Operatoren (Abbildungen) zu übertragen, was ja in **1.5** weitgehend schon geschehen ist. So lässt sich z.B.

$F\restriction a$ ($\in\mathcal{F}n$) definieren als $\{(x,y) \mid (\exists x\in a)\exists y\, F(x)=y\}$. Diese Einschränkung von F auf eine Menge a ist nach AR in jedem Falle eine Menge.

Übungen

1. Sei $f : a \to b$. Zeige (a): $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ genau dann, wenn es ein $f' : b \to a$ gibt mit $f' \cdot f = id_a$. (b): $f : a \xrightarrow{\text{sur}} b$ genau dann, wenn es ein $f' : b \to a$ gibt mit $f \cdot f' = id_b$. (c): $f : a \xrightarrow{\text{bij}} b$ genau dann, wenn es ein $f' : b \to a$ gibt mit $f' \cdot f = id_a$ und $f \cdot f' = id_b$.
2. Man beweise $a \times b \sim b \times a$ und $a \times (b \times c) \sim (a \times b) \times c$.
3. Man beweise ${}^c(a \times b) \sim {}^ca \times {}^cb$.
4. Sei $f : \mathfrak{P}(a) \to {}^a2$ erklärt durch $f(u) = \chi_u^a$ für $u \leqslant a$. Beweise $f : \mathfrak{P}(u) \xrightarrow{\text{bij}} {}^a2$.
5. Sei a endlich und $f : a \xrightarrow{\text{inj}} a$. Man zeige $f : a \xrightarrow{\text{bij}} a$. Mit anderen Worten, es gibt keine echte Teilmenge $b \subset a$ mit $a \sim b$.
6. Statt mit Satz 2.6.1 läßt sich der Beweis von Eigenschaften für alle endlichen Mengen oft auch durch Induktion über $|a|$ führen. Damit beweise man z.B. *eine endliche Menge a mit $|a| = n$ hat genau 2^n Teilmengen.*
7. Man zeige mit AF (indirekt), es gibt keine Folge f mit $f(n^{\mathsf{S}}) \in f(n)$ für alle $n \in \omega$. Kurz, ist $f(n) = a_n$, so kann nicht gelten $\ldots \in a_2 \in a_1 \in a_0$.
8. $K \subseteq \mathcal{F}n$ heißt *Funktionenkette*, wenn $f \subseteq g$ oder $g \subseteq f$ für alle $f, g \in K$. Man zeige $h := \bigcup K$ ist Funktion mit $dom\, h = \bigcup\{dom f \mid f \in K\}$.
9. Eine Funktion ζ mit $dom\, \zeta = \mathfrak{P}(a)$ heißt eine *Auswahlfunktion für* $\mathfrak{P}(a)$, wenn $\zeta u \in u$ für alle nichtleeren $u \in \mathfrak{P}(a)$. Zeige ohne AC: Ist a abzählbar, so existiert eine Auswahlfunktion für $\mathfrak{P}(a)$.

   Hinweis. $a \sim n$ für ein $n \in \omega$ oder aber $a \sim \omega$. Wähle das kleinste Element.
10. In der Algebra und anderswo ist man oft genötigt, zu gegebenen Mengen a, b ein $a' \sim a$ anzugeben mit $a' \cap a = \emptyset = a' \cap b$. Sei $z \notin \bigcup(a \cup b)$. Man zeige, dass $a' = \{\{x, z\} \mid x \in a\}$ das Verlangte leistet.

3.2 Relationen

Ähnlich wie Abbildungen sind Relationen ihrem Ursprung nach nichts weiter als formal wohldefinierte Beziehungen zwischen den Elementen einer Menge oder Klasse. Man redet z.B. von der $\in$–Relation oder der Inklusionsrelation $\subseteq$ auf dem Universum $\mathcal{V}$. Diese sind definiert durch die besonders einfachen mengentheoretischen Formeln $x \in y$ bzw. $x \subseteq y$. Jede Formel $\varphi(x, y)$ beschreibt in diesem Sinne eine Relation auf dem Mengenuniversum, oft auch ein Prädikat genannt.

In der Mathematik treten Relationen (z.B. die $<$–Relation zwischen reellen Zahlen) meistens als Beziehungen zwischen Elementen konkreter Mengen auf. Will man über die Menge der Relationen auf den reellen Zahlen reden, dann ist es erforderlich, Relationen ähnlich wie Funktionen durch Mengen zu modellieren, und das kann leicht geschehen, indem man eine Relation auf einer Menge mit der Menge der ihr entsprechenden geordneten Paare identifiziert. Dies motiviert folgende

Definition. Eine Relation *auf* einer Menge a ist eine Teilmenge $r \subseteq a \times a$. Eine Relation schlechthin ist eine Menge geordneter Paare.

Definiert man $\mathit{fld}\, r = \bigcup\bigcup r$ (das *Feld* der Relation r), sieht man sofort $r \subseteq a \times a$ mit $a = \mathit{fld}\, r$. Also ist jede Relation eine solche auf ihrem Feld, aber natürlich auch auf jeder Menge b mit $b \subseteq \mathit{fld}\, r$. $\mathcal{R}el$ bezeichne die Klasse aller Relationen. Offenbar ist $\mathcal{F}n \subseteq \mathcal{R}el$. Man erklärt $\mathit{dom}\, r$ und $\mathit{ran}\, r$ für $r \in \mathcal{R}el$ genau wie für Funktionen, also z.B. $\mathit{dom}\, r := \{x \mid \exists y (x, y) \in r\}$. Offenbar gilt $\mathit{dom}\, r \cup \mathit{ran}\, r = \mathit{fld}\, r$. Genau wie $\mathcal{F}n$ ist auch $\mathcal{R}el$ abgeschlossen gegenüber Teilmengen, d.h. $q \subseteq r \in \mathcal{R}el \to q \in \mathcal{R}el$.

Statt $(x, y) \in r$ schreibt man oft $x\, r\, y$, vor allem dann, wenn r ein gebräuchliches Symbol ist wie $<$ oder $\leqslant$.

Natürliche Beispiele für Relationen auf einer Menge a sind die *Identitätsrelation* $\{(x, x) \mid x \in a\}$, die auf a relativierte *Epsilon–Relation* $\in_a = \{(x, y) \in a \times a \mid x \in y\}$ und die *Inklusion* $\subseteq_a = \{(x, y) \in a \times a \mid x \subseteq y\}$. Dabei bezeichne hier r_a oder auch $r \restriction a$ die auf a *eingeschränkte* Relation, $r_a = \{(x, y) \in a \times a \mid x\, r\, y\}$. Meist unterschlägt man den Index einfach. Analog ist die Einschränkung $\mathcal{P}_a$ eines (binären) Prädikats $\mathcal{P}$ auf a definiert: $\mathcal{P} \restriction a = \{(x, y) \in a \times a \mid x\, \mathcal{P}\, y\}$.

Zuweilen bezeichnet man Relationen im obigen Sinne auch als *binäre* Relationen und nennt Mengen von n–tupeln dann *n–stellige* Relationen. Auch spricht man gelegentlich von Relationen zwischen a und b und meint damit Teilmengen $r \subseteq a \times b$. Das ist aber nur scheinbar allgemeiner, denn es ist dann $r \subseteq c \times c$ mit $c = a \cup b$.

Relationen sind obiger Definition gemäß Mengen. Doch wird der Name Relation wie schon gesagt wurde auch für Klassen von geordneten Paaren verwendet. Man spricht z.B. von der auf ganz $\mathcal{V}$ erklärten Relation $\sim$ der Gleichmächtigkeit. Eine durch $\varphi(x,y)$ definierte Relation auf $\mathcal{V}$ kann immer auch mit der Klasse $\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ identifiziert werden. Daher redet man besser von einem Prädikat statt von einer Relation. Man könnte z.B. auch von *internen* und *externen* oder von *lokalen* und *globalen* Relationen reden. In all diesen Dingen gibt es keine verbindliche Reglung des Sprachgebrauchs und häufig lässt nur der Kontext erkennen, ob eine Relation als Menge oder Klasse verstanden werden soll. Denn so wie Operatoren ähnliche Eigenschaften haben wie Funktionen, so verhalten sich auch Prädikate ähnlich wie Relationen auf Mengen. Jedenfalls lässt sich immer sprechen von der Menge aller Relationen auf einer Menge a. Es ist dies einfach $\mathfrak{P}(a \times a)$.

Ist R ein durch $\varphi(x,y)$ definiertes Prädikat und a eine Menge, so gibt es genau eine Relation $r \subseteq a \times a$ derart, dass $\forall xy(x\,r\,y \leftrightarrow x\,R\,y)$, nämlich $\{(x,y) \in a \times a \mid x\,\mathcal{R}\,y\}$. Man kann dies das *Komprehensionsprinzip* für Relationen nennen.

Es gibt zwei Arten von Relationen, die uns im mathematischen Alltag ständig begegnen, nämlich die Äquivalenzrelationen und die partiellen und totalen Ordnungsrelationen. Der Rest dieses Abschnittes befaßt sich nur mit diesen.

Allgemein heißt $\approx\ \subseteq a \times a$ eine *Äquivalenzrelation* auf a, wenn für alle $x, y, z \in a$:

(a) $x \approx x$ ($\approx$ ist *reflexiv*),

(b) $x \approx y \to y \approx x$ ($\approx$ ist *symmetrisch)*,

(c) $x \approx y \approx z \to x \approx z$ ($\approx$ ist *transitiv*).

Sei $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf a und $x \in a$. Dann heiße $k_{\approx}(x) = \{y \in a \mid y \approx x\}$ die durch x bestimmte *Äquivalenzklasse*, obwohl es sich hier natürlich um eine Menge handelt und $k_{\approx}$ eine wohlbestimmte Funktion von a nach $\mathfrak{P}(a)$ ist, die *kanonische Funktion* zu $\approx$. Aber es gibt auch „Äquivalenzprädikate“ auf Klassen, z.B. die Gleichmächtigkeit $\sim$ auf $\mathcal{V}$. Hier trifft die traditionelle Bezeichnung Äquivalenz*klasse* sozusagen ins Schwarze, denn wir zeigen später, dass jede Äquivalenzklasse gleichmächtiger Mengen eine echte Klasse ist.

Durchschnitt und Vereinigungen von Äquivalenzrelationen auf a sind offenbar wieder Äquivalenzrelationen auf a. Es gibt eine kleinste Äquivalenzrelation auf a, die Identitätsrelation, und eine größte, nämlich $a \times a$.

Eine Äquivalenzrelation $\approx$ auf a erzeugt eine *Partition* von a. Darunter versteht man allgemein ein System p paarweise disjunkter nichtleerer Teilmengen von a derart, dass $\bigcup p = a$. Im vorliegenden Falle ist $p = p_{\approx} := \{k_{\approx}(x) \mid x \in a\}$ die von $\approx$ induzierte oder zu $\approx$ *gehörige* Partition von a. Dass $p_{\approx}$ wirklich Partition ist, folgt unmittelbar aus den für $x, y \in a$ leicht beweisbaren Eigenschaften

(a) $x \in k_{\approx}(x)$, (b) $x \approx y \leftrightarrow k_{\approx}(x) = k_{\approx}(y)$, (c) $x \not\approx y \rightarrow k_{\approx}(x) \cap k_{\approx}(y) = \emptyset$.

Umgekehrt rührt jede Partition von a von einer Äquivalenzrelation her und es existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Äquivalenzrelationen auf a und den Partitionen von a (Übung 2). Ferner gibt es eine einfache aber nützliche, in der Mathematik überall verwendete Beziehung zwischen Partitionen von a und auf a definierten Funktionen. Jede Funktion f mit $dom\, f = a$ erzeugt offenbar eine Äquivalenzrelation $\approx_f$ auf a mit $x \approx_f y \leftrightarrow f(x) = f(y)$. Dann lässt f sich in einer speziellen Weise „faktorisieren“:

Satz 2.1. *Sei $f : a \xrightarrow{sur} b$, $k = k_{\approx}$ die kanonische Funktion zu $\approx_f$ und $p_{\approx}$ die von $\approx_f$ induzierte Partition von a. Dann gibt es eine Bijektion $g : p \xrightarrow{bij} b$ mit $f = g \cdot k$.*

In der Tat, sei $g := \{(k(x), f(x)) \mid x \in a\}$, oder etwas lapidar, $g(k(x)) = f(x)$. Dieses g ist „korrekt definiert“, d.h. eine Funktion. g ist auch injektiv und surjektiv. Dies alles folgt leicht aus $k(x) = k(x') \leftrightarrow f(x) = f(x')$ für $x, x' \in a$, und letzteres ist offensichtlich. Schließlich gilt auch $f = g \cdot k$ nach Definition von g. Es ist nützlich, sich den eben bewiesenen Sachverhalt anhand eines Diagramms einzuprägen:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f", "\text{sur}"'] \arrow[dr, "\text{sur}", "k"'] & & b \\ & p \arrow[ur, "\text{bij}", "g"'] & \end{tikzcd}$$

Halbordnungen und Ordnungen sind nebst den Äquivalenzrelationen sicher die wichtigsten Relationen innerhalb und außerhalb der Mathematik.

Definition. Eine auf ihrem Feld irreflexive und transitive Relation $<$ heißt eine *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*. Ein Paar $(a, <)$ mit einer einer Halbordnung $<$, so dass $fld(<) \subseteq a$ heißt eine *partiell geordnete* (oder *halbgeordnete*) Menge, kurz, eine p.o. (gelesen partiell geordnete) Menge. Eine solches $(a, <)$ heißt eine *geordnete Menge*, falls $<$ auch *konnex* ist, d.h. falls $(\forall xy \in a)(x < y \vee x = y \vee y < x)$. Man nennt $<$ dann auch eine *Ordnung*, mitunter auch eine *totale Ordnung* von a.

Es ist klar, dass jede Teilmenge einer p.o. Menge wieder eine solche ist. Sei $(a, <)$ p.o. Menge. Schreibt man wie üblich $x \leqslant y$ für $x < y \vee x = y$, so ist $\leqslant$ reflexiv, transitiv und *antisymmetrisch*, d.h. $(\forall x, y \in a)(x \leqslant y \leqslant x \rightarrow x = y)$. Relationen mit den drei letztgenannten Eigenschaften heißen auch *reflexive* Halbordnungen [1)]. $<$ wird daher der Deutlichkeit halber zuweilen eine *irreflexive* Halbordnung genannt. So ist die echte Inklusion $\subset$ zwischen den Elementen von a, genauer $\{(x,y) \in a \times a \mid x \subset y\}$ eine irreflexive, und die Inklusion $\subseteq$ ist die zugehörige reflexive Halbordnung von a. Ist allgemein $<$ eine (partielle) Ordnung einer Menge a, so heisst die durch

$$x \leqslant y \leftrightarrow x < y \vee x = y$$

definierte Relation auf a die *zugehörige reflexive (partielle) Ordnung.* Definiert man ausgehend von $\leqslant$ alsdann $x < y \leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y$, so erhält man die ursprüngliche irreflexive Ordnung zurück (Übung 4). Deshalb kann man zur Beschreibung von $<$ auch mit einer reflexiven partiellen Ordnung starten.

Eine p.o. Menge $(a, \subset)$ mit $\subset = \{(x,y) \in a \times a \mid x \subset y\}$ ist der Prototyp einer p.o. Menge. Es lässt sich nämlich unschwer zeigen, dass eine beliebige p.o. Menge zu einem derartigen $(a, \subset)$ isomorph ist. Die Irreflexivität und Transitivität umfasst also sämtliche Informationen über die echte Inklusion. Jede andere Eigenschaft ist eine Folge dieser beiden.

Sei $(a, <)$ eine vorgegebene p.o. Menge. Ein Element $x \in a$ heißt ein *maximales Element* in a (genauer in $(a, <)$), wenn kein $x' \in a$ mit $x < x'$ existiert. Analog definiert man den Begriff *minimales Element.* Eine p.o. Menge muss weder minimale noch maximale Elemente besitzen. So besitzt z.B. ω bezüglich der $<$–Relation, welche ja nichts anderes als die Einschränkung von $\in$ auf ω ist, kein maximales Element. In total geordneten Mengen bedeuten maximales und größtes Element dasselbe.

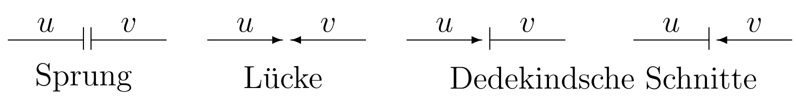
Es ist anschaulich klar und lässt sich induktiv leicht beweisen, dass eine endliche p.o. Menge sowohl ein minimales als auch ein maximales Element besitzt. Damit enthält jede echte Teilmenge von $\mathfrak{P}(a)$ für $a \in \mathcal{F}in$ ein maximales Element; dies ist kennzeichnend für endliche Mengen (Tarskis Endlichkeitsdefinition, Übung).

Eine Teilmenge $b \subseteq a$ einer p.o. Menge $(a, <)$ heißt (nach oben) *beschränkt*, wenn sie eine obere Schranke $s \in a$ hat, d.h. $x \leqslant s$ für alle $x \in b$, und *echt beschränkt*, wenn $x < s$ für alle $x \in b$. Ist $b \subseteq a$ beschränkt und s_0 eine obere Schranke mit $s_0 \leqslant s$ für alle oberen Schranken s von b, so heißt s_0 das *Supremum* von b, $s_0 = \sup b$. Analog definiert man *nach unten beschränkt* und *Infimum* von b, $\inf b$. Es kann offenbar nur höchstens eine obere Schranke für die Gesamtmenge a geben. Falls diese existiert, heißt sie das *größte Element* von a. Analog definiert man den Begriff

[1)] Diese Terminologie ist für die Mathematik nicht verbindlich, für uns aber bequem. So nennt man (reflexive) Halbordnungen häufig nur Ordnungen, und Ordnungen im Sinne der Definition oben dann totale oder lineare Ordnungen.

kleinstes Element. Geht man von einer reflexiven Halbordnung aus, definiert man die Begriffe kleinstes und größtes Element sinngemäß.

Die folgenden Begriffe betreffen spezielle geordnete Mengen und sind wichtig z.B. für die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen. Sei $(a,<)$ geordnet. Ein *Schnitt* von a sei eine Partition $a = u \cup v$ (d.h. $u \cap v = \emptyset \neq u, v$) derart, dass $(\forall x \in u)(\forall y \in v)x < y$. Der Schnitt (u,v) heißt ein *Sprung*, wenn u ein größtes und v ein kleinstes Element enthält, bzw. eine *Lücke*, wenn weder u ein größtes noch v ein kleinstes Element hat. Die Figur veranschaulicht diese und die beiden verbleibenden Fälle, die hier als *Dedekindsche Schnitte* bezeichnet werden.



Sei a geordnete Menge ohne Randelemente. a heißt *dicht geordnet*, wenn zwischen je zwei Elementen ein weiteres liegt, und sie heißt *stetig geordnet*, wenn jeder Schnitt ein Dedekindscher ist. Ein Beispiel ist $(\mathbb{R},<)$. Dicht geordnete Mengen wie z.B. $(\mathbb{Q},<)$ sind unendlich. Stetig geordnete Mengen sind darüber hinaus immer überabzählbar, was hier nur erwähnt sei. Man kann für dicht und stetig geordnete Mengen auch Randelemente zulassen, muss dann aber obige Definitionen entsprechend modifizieren. Jede dicht geordnete Menge ist auf kanonische Weise in eine stetig geordnete Menge dicht einbettbar (Übung 7).

Übungen

1. $\approx\ \subseteq a \times a$ heiße *euklidisch*, wenn $(\forall xyz \in a)((x \approx z \wedge y \approx z) \to x \approx y)$. Man zeige, folgende Eigenschaften sind gleichwertig:

   (i) $\approx$ ist Äquivalenzrelation auf a, (ii) $\approx$ ist reflexiv und euklidisch.

2. Sei η die Menge aller Äquivalenzrelationen $\approx\ \subseteq a \times a$ für festes a, und π die Menge aller Partitionen von a. Ferner sei $p_{\approx}$ die von $\approx$ induzierte Partition. Man zeige $\varphi : \eta \xrightarrow{\text{bij}} \pi$, wobei $\varphi(\approx) = p_{\approx}$.

3. Ein Paar (a,r) mit $r \subseteq a \times a$ heiße eine *Struktur* [2)]. Seien $A = (a,r)$, $B = (b,s)$ Strukturen. f heiße ein *Isomorphismus* von A auf B, symbolisch $f : A \simeq B$, wenn $f : a \xrightarrow{\text{bij}} b \wedge (\forall x, y \in a)(x\,r\,y \leftrightarrow f(x)s\,f(y))$, kurz $f : A \xrightarrow{\text{iso}} B$. Falls ein solches f existiert, schreibt man $A \simeq B$ und sagt, A, B seien isomorph. Sind

[2)] Dies ist eine vorerst ausreichende Erklärung. Allgemein besteht eine Struktur aus einer Menge a mit mehreren (nicht notwendig zweistelligen) Relationen und Operationen auf a.

A, B geordnete Mengen, nennt man einen Isomorphismus von A auf B auch eine *ordnungstreue Bijektion*. Man zeige, $\simeq$ ist ein Äquivalenzprädikat auf der Klasse aller Strukturen, d.h $\simeq$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

4. Sei $(a, <)$ partiell geordnet und sei $\leqslant$ die zu $<$ gehörende reflexive partielle Ordnung von a. Man zeige wie im Text behauptet, dass die zu $\leqslant$ gehörende irreflexive partielle Ordnung mit $<$ übereinstimmt.

5. Man beweise den *Repräsentationssatz für p.o. Mengen*. Sei $(a, <)$ p.o. Menge und $a' = \{s_x \mid x \in a\}$ mit $s_x = \{y \in a \mid y \leqslant a\}$. Dann ist $(a, <) \simeq (a', \subset)$.

6. Man zeige, für eine dicht geordnete Menge a sind gleichwertig

   (i) *a ist stetig geordnet,*
   (ii) *In a gilt der Satz von der oberen Grenze,*
   (iii) *a ist lückenlos geordnet.*

   Hinweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $x \subseteq a$ nichtleer und beschränkt, v die Menge der oberen Schranken von x, und $u := a \setminus v$. Dann ist (u, v) ein Dedekindscher Schnitt. Dessen Schnittelement s gehört zu v, weil jedes $y \in u$ von einem $z \in x$ übertroffen wird. Wegen $s = \inf v$ ist damit auch $s = \sup x$.

7. Man beweise, zu jeder dicht geordneten Menge $(a, <)$ existiert eine stetig geordnete Menge $(a', <)$ mit $a \subseteq a'$ und $< \; \subseteq \; <'$, so dass zwischen zwei Elementen von a' noch ein Element von a liegt (Dedekind).

   Hinweis. Sei A die Menge aller nichtleeren echten Anfänge von a ohne größtes Element. $(a, <)$ ist in $(A, \subset)$ isomorph einbettbar.

3.3 Der Satz von Cantor

Es handelt sich hier um den Satz 3.1 unten, zu dem Cantor verständlicherweise erst nach mancherlei Umwegen gelangte. Dieser Satz ist von fundamentaler Bedeutung für die transfinite Mengenlehre. Er besagt, dass die Potenzmengen einer beliebigen Menge a in jedem Falls eine höhere Mächtigkeit hat als a. In **3.1** wurde jeder endlichen Menge a ein mit $|a|$ bezeichnetes $n \in \omega$ mit $a \sim n$ zugeordnet. Diese Zuordnung wird später auf unendliche Mengen erweitert. Vorerst betrachten wir nur die folgende anschauliche Relation des Mächtigkeitsvergleichs:

Definition. $a \precsim b \leftrightarrow_{df} \exists f\, f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ (a ist höchstens so mächtig wie b). Falls $a \precsim b$ aber nicht $a \sim b$, heißt b *mächtiger* als a, symbolisch $a \prec b$.

Offenbar gilt $a \precsim b \precsim c \to a \precsim c$. Man beachte ferner $a \subseteq b \to a \precsim b$, denn $id_a : a \xrightarrow{\text{inj}} b$.

Nach Definition ist $a \prec b$ genau dann, wenn zwar eine Injektion, aber keine Bijektion von a nach b existiert. Offenbar ist $a' \prec b'$, falls $a' \sim a$, $b' \sim b$ und $a \prec b$. Auch gilt $a \nprec a$. Dagegen ergibt sich eine merkwürdige Schwierigkeit für den Beweis von

$$(*) \quad a \prec b \prec c \to a \prec c.$$

Diese Implikation ist richtig und unabhängig von AC beweisbar, aber erst als Folge des im nächsten Abschnitt bewiesenen Äquivalenzsatzes, wonach $a \precsim b \precsim a \to a \sim b$. Um den Fluß der Dinge nicht zu unterbrechen, benutzen wir $(*)$ bereits jetzt. In **4.1** beweisen wir mit AC darüber hinaus

$$a \prec b \vee a{=}b \vee b \prec a.$$

Für endliche a, b geht das jedoch ohne AC, und zwar wie folgt. Es genügt zu wissen, dass $n \prec m \vee n{=}m \vee n \prec n$ für beliebige $n, m \in \omega$. Das aber folgt unmittelbar aus

$$(1) \quad m \in n \vee m{=}n \vee n \in m$$

$$(2) \quad m \in n \leftrightarrow m \prec n.$$

Dabei ist (1) klar, weil ω nach Satz 2.6 $\in$-geordnet ist. (2) ergibt sich wie folgt: Ist $m \in n$, so $m \subset n$ (m ist transitiv und sicher $m \neq n$). Nach Übung 5 in **3.1** kann $m \sim n$ für die echte Teilmenge m von n aber nicht gelten, also $m \prec n$. Sei umgekehrt $m \prec n$, so dass sicher $m \neq n$. Wäre $m \notin n$, folgt mit (1) $n \in m$, also $n \prec m$ nach dem eben Bewiesenen, was wegen $m \prec n$ nach $(*)$ den Widerspruch $n \prec n$ ergibt. Also muss $m \in n$ gelten. Man darf sich unter $n < m$ demnach wahlweise $n \in m$ oder $n \subset m$ oder auch $n \prec m$ vorstellen.

$f : a \to \mathfrak{P}(a)$ mit $f(x) = \{x\}$ ist injektiv, also gilt gewiss $a \precsim \mathfrak{P}(a)$. Weil man bei unendlichen Mengen aber auf mancherlei Überraschungen gefaßt ist, lässt $a \sim \mathfrak{P}(a)$ sich nicht von vornherein ausschließen. Selbst für endliche Mengen a ist $a \prec \mathfrak{P}(a)$ nicht selbstverständlich. Dies folgt mit einiger Mühe z.B. durch Induktion über $|n|$. Um so überraschender ist die Einfachheit des Beweises von Satz 3.1, dessen Beweis die Möglichkeiten logischer Argumentation hart ausschöpft.

Satz 3.1 (Satz von Cantor). $a \prec \mathfrak{P}(a)$ *für alle* a.

Beweis. Wir zeigen etwas stärker, dass keine Surjektion von a auf $\mathfrak{P}(a)$ existiert. Sei $f : a \to \mathfrak{P}(a)$ beliebig und $b = \{x \in a \mid x \notin f(x)\}$. Es genügt zu zeigen $b \notin \mathit{ran}\, f$. Angenommen $b = f(z)$ für ein $z \in a$. Ist $z \in b$, so $z \notin f(z)$ nach Definition von b. Das ist ein Widerspruch. Ist $z \notin b$, folgt $z \in f(z)$ nach Definition, also doch $z \in b$ – auch ein Widerspruch. Also $b \notin \mathit{ran}\, f$ und damit kann f nicht surjektiv sein. ❑

Unter den unendlichen Mengen sind besonders ausgezeichnet die abzählbaren. Eine Menge a heiße *abzählbar*, wenn $a \precsim \omega$, und sonst *überabzählbar*. Der Definition entnimmt man unmittelbar, dass alle endlichen Mengen abzählbar sind und dass mit abzählbarem a auch jede Teilmenge von a abzählbar ist. Man zeigt unschwer, dass a genau dann abzählbar ist, wenn a leer ist oder wenn eine Surjektion $f : \omega \xrightarrow{\text{sur}} a$ existiert (Übung 4). Ein solches f heißt dann auch *Abzählung* von a. Was man über abzählbare Mengen unbedingt wissen sollte ist, dass die Vereinigung eines abzählbaren Systems von abzählbaren Mengen stets wieder abzählbar ist, Übung 5.

Speziell gilt $\omega \prec \mathfrak{P}(\omega)$ nach Satz 3.1. $\mathfrak{P}(\omega)$ ist das Paradebeispiel einer überabzählbaren Menge. Denn die Annahme der Abzählbarkeit, also $\mathfrak{P}(\omega) \precsim \omega$, impliziert den Widerspruch $\mathfrak{P}(\omega) \prec \mathfrak{P}(\omega)$. Weil $\mathfrak{P}(\omega) \sim {}^{\omega}2$ nach Übung 4 in **3.1**, gibt es also auch überabzählbar viele Funktionen $f : \omega \to 2$, also erst recht überabzählbar viele $f : \omega \to \omega$, denn jede Obermenge einer überabzählbaren Menge ist sicher überabzählbar. Tatsächlich sind aber alle drei zuletzt genannten Mengen gleichmächtig, wie im nächsten Abschnitt recht einfach bewiesen werden kann. Alle diese Mengen haben dieselbe Mächtigkeit wie die Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen.

Man kann die Frage stellen, wie konnte Cantor obigen Satz beweisen, wenn doch erst nach 1915 Funktionen mittels geordneter Paare als mengentheoretische Objekte zu betrachten begann, während der angegebene Beweis den Funktionsbegriff doch wesentlich benutzt. Um dies zu beantworten, erinnern wir an die Tatsache, dass Dedekind, Cantor, Zermelo und andere, Funktionen als naive, angeblich aus unserem Verstande fließende Hilfsmittel verwendeten und gar nicht beabsichtigten, diese als Objekte der Mengenlehre aufzufassen und zu untersuchen.

Wir analysieren diese ursprüngliche Sichtweise etwas genauer aus heutiger Perspektive. Sei $\varphi(x,y)$ eine Formel derart, dass $(\forall x\in a)(\exists! y\in b)\varphi(x,y)$ beweisbar ist. Dadurch ist eine Abbildung F gegeben, die $\varphi(x,F(x))$ erfüllt und die im Grunde mit der sie definierenden Formel $\varphi(x,y)$ identifiziert werden kann. Jedenfalls ist klar, dass einer durch die Formel $\varphi(x,y)$ definierten Abbildung $F: a\to b$ in natürlicher Weise eine mengentheoretische Funktion entspricht, nämlich $f=\{(x,y)\mid x\in a\wedge\varphi(x,y)\}$.

Wenn man einmal davon absieht, dass praktisch erst nach 1900 damit begonnen wurde, mathematische Theorien zu formalisieren, und wenn man statt Formel einfach „Vorschrift" oder „sinnvoller Ausdruck in den Variablen x,y, der jedem x eindeutig ein y zuordnet" sagt, dann sind Abbildungen im obigen Sinne in etwa das, womit Dedekind, Cantor, Zermelo u.a. naiv operierten.

Genauso verfahren die Mathematiker noch heute, jedenfalls solange sie nicht spezielle mengentheoretische Zielsetzungen verfolgen. Die explizite mengentheoretiche Definition einer betrachteten Abbildung ist in der Regel uninteressant und wird gar nicht angegeben oder ihre Angabe wird dem Leser überlassen.

Ignorieren wir für den Moment unser Wissen über geordnete Paare und die Definition von Funktion in Abschnitt **3.1**, dann zeigt Satz 3.1 die Richtigkeit von

$$(*)\qquad \textit{Es gibt keine surjektive Abbildung } F: a\mapsto\mathfrak{P}(a).$$

Denn obiger Beweis lässt sich für eine durch $\varphi(x,y)$ definierte Abbildung F fast wörtlich wiederholen. Auch jetzt verläuft der Beweis im Prinzip gänzlich in $\mathcal{L}_\in$, so dass z.B. $x\notin F(x)$ einfach die Bedeutung von $\neg\varphi(x,x)$ hat. Zwar besitzt $(*)$ genau genommen nur einen metatheoretischen Charakter, aber das ist unerheblich solange man nur „naive" Mengenlehre zu betreiben wünscht.

Man könnte nun denken, dass $(*)$ doch etwas weniger besagt, weil ja Funktionen $f: a\to\mathfrak{P}(a)$ nur leicht eingeschränkte Teilmengen von $a\times\mathfrak{P}(a)$ sind. Wir hatten eine direkte Folge aus Satz 3.1 schon erwähnt, wonach es überabzählbar viele Funktionen $f:\omega\to 2$ gibt. Andererseits sind definierte Abbildungen $F:\omega\to 2$ durch Formeln beschreibbar und es gibt sicher nur abzählbar viele Formeln.

Wie erklärt sich diese scheinbare Paradoxie? Die Erklärung liegt darin, dass die durchaus richtige Feststellung „Es gibt nur abzählbar viele Formeln" kein Satz der Theorie ist. In der Theorie wird zwar bewiesen, es gibt überabzählbar viele Funktionen $f:\omega\to 2$, aber sobald wir ein solches f beim Namen nennen, wird es sogleich von einer wohldefinierten Abbildung F „eingeholt". Etwas poetisch lässt sich die Situation auch wie folgt beschreiben: Die Bewohner von ZFC glauben, es gäbe überabzählbar viele Funktionen $f:\omega\to 2$ und können dies sogar beweisen. Aber die von oben auf ZFC blickenden Götter wissen, dies ist nur die Sichtweise der ZFC-Bewohner auf ihre Welt.

Man darf sich dennoch nicht täuschen. Denn letztlich sind auch wir auf der Metaebene die Untergebenen von ZFC. Auch Sätze über ZFC werden auf einer höheren Ebene wieder zu Sätzen *in* ZFC. Beweisbarkeit in ZFC ist jedenfalls für die mathematische Forschung bislang das ultimative Wahrheitskriterium. Das bedeutet aber nicht, dass Mathematiker im Besitz eines ultimativen Wahrheitskriteriums sind. Denn erstens ist ZFC unvollständig – so ist die Kontinuumshypothese unabhängig von ZFC – und zweites ist das angegebene Wahrheitskriterium pragmatischer Natur. Eine tiefergehende philosophische Begründung dafür gibt es nicht.

Übungen

1. Injektionen $p : \omega \times \omega \xrightarrow{\text{inj}} \omega$ heißen auch *Paarungsfunktionen* für ω. Man zeige, $p : \omega \times \omega \to \omega$ mit $p(n, m) = 2^n \cdot (2m+1)$ ist Paarungsfunktion[3)]. Also $\omega \times \omega \precsim \omega$.

2. Man zeige, ist $a \precsim \omega$ unendlich, so ist $a \sim \omega$.

   Hinweis. O.B.d.A. $a \subseteq \omega$. Zeige durch Induktion: Zu jedem $n \in \omega$ existiert genau ein ordnungstreues $f_n : n \xrightarrow{\text{inj}} a$, so dass $ran\, f_n$ echter Anfang von a ist und $m \leqslant n \leftrightarrow f_m \subseteq f_n$. Für $f := \bigcup \{ f_n \mid n \in \omega \}$ zeigt man leicht $f : \omega \xrightarrow{\text{bij}} a$.

3. Man beweise $\omega \times \omega \sim \omega$ mit den Übungen 1 und 2. (Mit Satz 4.1 benötigt man für den Beweis nur $\omega \times \omega \precsim \omega$, weil trivialerweise $\omega \precsim \omega \times \omega$.)

4. Sei $a \neq \emptyset$. Man beweise $a \precsim b$ genau dann, wenn ein $g : b \xrightarrow{\text{sur}} a$ existiert.

   Hinweis. Aus $g : b \xrightarrow{\text{sur}} a$ konstruiert man ein $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ leicht mit AC. Für abzählbar unendliches a wird AC nicht benötigt, weil dann $a \sim \omega$.

5. Zeige, mit allen a_i ist auch $a = \bigcup \{ a_i \mid i \in \omega \}$ abzählbar. Kurzum, die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist wieder abzählbar.

   Hinweis. O.B.d.A. $a_i \neq \emptyset$. Man wähle für jedes $i \in \omega$ mit AC ein $f_i : \omega \xrightarrow{\text{sur}} a_i$. Dann ist $f : \omega \times \omega \xrightarrow{\text{sur}} a$ mit $f(i, j) = f_i(j)$. Beachte $\omega \times \omega \sim \omega$.

[3)] Eine häufig verwendete Paarungsfunktion ist $p(n, m) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n$. Für diese gilt sogar $ran\, p = \omega$. Eine arithmetisch einfache Paarungsfunktion für ω, die sich sogar zu einer solchen aller Ordinalzahlen erweitern lässt, ist auch $p(n, m) = (n + m) \cdot (n + m + 1) + n$. Alle diese Beispiele benutzen die arithmetischen Operationen. Man kann jedoch auch ohne diese unschwer eine Paarungsfunktion konstruieren, die sich allein auf die Ordnungseigenschaften von ω stützt.

3.4 Der Äquivalenzsatz von Cantor–Bernstein

Dieser zuerst von Dedekind[4)] explizit formulierte, elegant bewiesene aber leider nicht von ihm selbst publizierte Satz lautet wie folgt

Satz 4.1 (Äquivalenzsatz). *Ist $a \precsim a'$ und $a' \precsim a$, so gilt $a \sim a'$.*

Daraus folgt insbesondere auch $a \prec b \prec c \rightarrow a \prec c$. Denn sei $a \prec b \prec c$, so dass gewiss $a \precsim c$. Wäre $a \sim c$, folgt $a \precsim b \precsim a$, also $a \sim b$ im Widerspruch zu $a \prec b$.

Auch folgende (außerhalb der Theorie formulierte) Anwendung deutet den Nutzen von Satz 4.1 an. Seien $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ die Mengen der natürlichen bzw. der rationalen Zahlen. Wegen $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ist sicher $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$. Die Funktion $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ mit $F(\pm\frac{n}{m}) = 2^\sigma \cdot 3^n \cdot 5^m$ (n, m teilerfremd, $\sigma = 1$ falls $+\frac{n}{m}$ und $\sigma = 0$ falls $-\frac{n}{m}$ gemeint ist) ist offenbar injektiv. Also auch $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{N}$. Folglich gilt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{Q}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Unser Beweis von Satz 4.1 unten benötigt nur sehr schwache axiomatische Annahmen. Weder ist das Auswahlaxiom involviert, noch das Unendlichkeitsaxiom oder das Potenzmengenaxiom. Zunächst aber folgen wir Dedekinds Bemerkung, wonach Satz 4.1 aus dem einfacheren Satz 4.2 unten folgt. In der Tat, sei gemäß Prämisse von Satz 4.1 $f : a \xrightarrow{\text{inj}} a'$ und $g : a' \xrightarrow{\text{inj}} a$. Dann gilt für $b := \mathit{ran}\, g$, $h := g \cdot f$ und $c := \mathit{ran}\, h$ gewiss $c \subseteq b \subseteq a$, sowie $a \sim c$. Also $a \sim b$ nach Satz 4.2. Wegen $a' \sim b$ ergibt sich so $a \sim a'$. Das bestätigt die Dedekindsche Bemerkung. Wir präsentieren hier zwei sehr einfache Beweise dieses Satzes.

Satz 4.2 (Zwischenmengensatz). *Ist $c \subseteq b \subseteq a$ und $a \sim c$, so gilt auch $a \sim b$.*

Beweis I. Sei ein nach Annahme existierendes $f : a \xrightarrow{\text{bij}} c$ fest gewählt. Gewiss ist dann auch $c = \mathit{ran}\, f \subseteq b$. Ferner sei s das System aller $p \subseteq a$ mit den Eigenschaften

$$\text{(A) } p \cap b \subseteq c, \qquad \text{(B) } f(x) \in p \rightarrow x \in p.$$

Sei $u := \bigcup s$ und $x \in u$, etwa $x \in p \in s$. Man sieht leicht, dass (A), (B) auch für $p' = p \cup \{f(x)\}$ gelten. Also $f(x) \in u$. Das beweist (C): $f[u] \subseteq u$. Sei $x \in a \setminus b$. Weil dann gewiss $x \notin c = \mathit{ran}\, f$, gelten (A) und (B) speziell für $p = \{x\}$, daher $x \in u$. Das zeigt $a \setminus b \subseteq u$, also $a \setminus u \subseteq b$ und somit $g : a \to b$, wobei g erklärt sei durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } \ x \in u, \\ x & \text{für } \ x \in a \setminus u \ (\subseteq b). \end{cases}$$

[4)] R. Dedekind (1831 – 1916) notierte den Satz mit vollständigem Beweis in sein Tagebuch von 1887. Weitere historische Bemerkungen finden sich z.B. in [Rautenberg 1987].

Wir behaupten nun $g:a \xrightarrow{\text{bij}} b$. Zuerst zeigen wir $g:a \xrightarrow{\text{inj}} b$. Sei $x \neq x'$. Sicher ist $g(x) \neq g(x')$ für $x, x' \in u$ oder $x, x' \in a \setminus u$; ist $x \in u$ und $x' \in a \setminus u$, so $g(x) = f(x) \in u$ gemäß (C) und $g(x') = x' \in a \setminus u$; also $g(x) \neq g(x')$ auch jetzt. Schließlich ist g auch surjektiv, d.h. $b \subseteq ran\, g$. Denn sei $y \in b$. Für $y \notin u$ gilt gewiss $y = g(y) \in ran\, g$. Falls aber $y \in u$, etwa $y \in p \in s$, so ist wegen $y \in p \cap b$ auch $y \in c = ran\, f$ nach (A). Sei etwa $y = f(x)$. Weil $f(x) \in p$ folgt $x \in p$ nach (B), also $x \in u$. Damit gilt $g(x) = f(x) = y$, also $y \in ran\, g$ auch jetzt. Damit ist $g:a \xrightarrow{\text{bij}} b$ und somit $a \sim b$ bewiesen. ❑

Dieser Beweis bleibt ohne jede Änderung richtig, wenn a, b, c als Klassen verstanden werden. Die im Beweis konstruierte Abbildung g ist dann eine Bijektion von a nach b. Wir haben in Wahrheit daher ein viel schärferes Resultat bewiesen, nämlich

Satz 4.1©. *Seien $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ Klassen und sei $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}$. Dann ist auch $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$. Ferner: Sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Klassen mit $\mathcal{A} \precsim \mathcal{A}' \precsim \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$.*

Hier sind $\precsim$ und $\sim$ für Klassen völlig analog definiert wie für Mengen. Der zweite Teil des Satzes (der Äquivalenzsatz für Klassen) ist dann eine direkte Folge des ersten Teils, genau wie Satz 4.1 eine Folge ist von Satz 4.2.

Bemerkung. Die Aussage von Satz 4.1© hat konstruktiven Charakter – sonst könnten wir sie gar nicht formulieren. Sie behauptet nämlich die Existenz einer Klasse. Auf den Äquivalenzsatz bezogen heisst dies genauer, es lässt sich zu beliebigen Formeln, welche injektive Abbildungen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$ bzw. von $\mathcal{A}'$ nach $\mathcal{A}$ beschreiben, eine Formel $\varphi(x, y)$ explizit angeben, die eine Bijektion zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ vermittelt. Für den Beweis von Satz 4.1© benötigt man bei genauerem Hinsehen lediglich Extensionalität und die Annahme, dass mit x, y auch $x \cup \{y\}$ Menge ist (Tarskis Fragment). Für denselben Beweis in der Theorie benötigt man natürlich etwas mehr. Er lässt sich z.B. ausführen in dem sehr schwachen System von Kripke–Platek.

Hier der zweite der beiden Beweise von Satz 4.2. Dessen Grundidee ist, die Injektion $f:a \to b$ für $b \subseteq a$ zu einer Bijektion h zu „simplifizieren“.

Sei $\mathit{fix}\, f$ die Menge der *Fixpunkte* von $f:a \to a$, d.h. $\mathit{fix}\, f := \{x \in dom\, f \mid f(x) = x\}$. Für $f, g \in {}^a a$ sei $g \leqslant f$ (g ist *einfacher* als f), wenn $\mathit{fix}\, f \subseteq \mathit{fix}\, g$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq g(x)$. Kurz gesagt entsteht g aus f durch Vermehrung der Fixpunkte; aber dort, wo g etwas bewegt, sollen g und f übereinstimmen. g liegt in diesem Sinne näher an id_a, der einfachsten Funktion von a nach a. Es ist klar, dass $\leqslant$ eine reflexive Halbordnung auf ${}^a a$ darstellt, d.h. $\leqslant$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. Mehr benötigt man nicht.

Ist $b \subseteq a$ und $f:a \xrightarrow{\text{inj}} b$, so wird der folgende Beweis zeigen, dass die einfachste aller Funktionen $g \leqslant f$ mit $ran\, g \subseteq b$ gerade eine Bijektion von a auf b darstellt.

Beweis II von Satz 4.2: Sei $f : a \xrightarrow{\text{bij}} c$, also auch $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ und $\mathcal{J}$ die Gesamtheit aller Funktionen $\varphi : a \xrightarrow{\text{inj}} b$ mit $\varphi \leqslant f$. Gewiss ist $f \in \mathcal{J}$. Sei $g : a \to b$ erklärt durch

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ für } x \in d := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{J}} \mathit{fix}\,\varphi \ (\subseteq b), \\ f(x) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir zeigen, dass dieses g eine gesuchte Bijektion darstellt. Sicher gilt (1) $g \leqslant \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{J}$. Zuerst beweisen wir g ist injektiv. Sei $x \neq x'$. Für $x, x' \in d$ oder $x, x' \in a \setminus d$ ist sicher $g(x) \neq g(x')$. Sei nun $x \in d$, $x' \in a \setminus d$. Dann ist $g(x) = x = \varphi(x)$ für ein $\varphi \in \mathcal{J}$, so dass $g(x) = \varphi(x) \neq \varphi(x') = f(x') = g(x')$ auch jetzt. Also $g \in \mathcal{J}$. Nunmehr zeigen wir $b \subseteq \mathit{ran}\, g$, d.h. g ist auch bijektiv. Sei $h \leqslant g$ erklärt durch $h(x) = x$ für $x \in b \setminus \mathit{ran}\, g$ und $h(x) = g(x)$ sonst, so dass (2) $\mathit{ran}\, g \cap \mathit{fix}\, h = \emptyset$. Man sieht leicht, dass auch h injektiv ist. Somit ist $h \in \mathcal{J}$, gemäß (1) also $g \leqslant h$ und daher $h = g$ wegen der Antisymmetrie, so dass nach (2) dann $b \setminus \mathit{ran}\, g \subseteq \mathit{fix}\, g$. Das aber ergibt $b = (b \setminus \mathit{ran}\, g) \cup \mathit{ran}\, g \subseteq \mathit{fix}\, g \cup \mathit{ran}\, g = \mathit{ran}\, g$. Also $b \subseteq \mathit{ran}\, g$. Damit ist g in der Tat eine Bijektion von a auf b. ❏

Bemerkung. Anders als Beweis II liefert Beweis I gerade diejenige unter allen Bijektionen $g \leqslant f$, welche die wenigsten Fixpunkte hat, dafür aber am nächsten bei f liegt. Der Leser kann dies entweder selbst nachrechnen oder sei auf [Rautenberg 1987] verwiesen.

Wir wollen nun einige Beispiele für Anwendungen für Satz 4.1 © angeben. Diese sind zwar nur von marginaler Bedeutung, aber sie sind nützlich und instruktiv für die bildliche Vorstellung über das Mengenuniversum $\mathcal{V}$.

(1) Gibt es „mehr“ oder „weniger“ oder „gleichviel“ endliche Mengen wie Mengen überhaupt? Letzteres ist richtig. Denn $F : \mathcal{V} \to \mathcal{F}\mathit{in}$ mit $F(x) = \{x\}$ ist injektiv und daher ist $\mathcal{F}\mathit{in} \sim \mathcal{V}$ gemäß Satz 4.1 ©. Dieses Argument zeigt zugleich, dass $\mathcal{V}$ mit jeder Klasse äquivalent ist, welche die Klasse $\mathcal{V}^{(1)}$ aller Einermengen enthält.

(2) $\mathcal{V}^{(a)} = \{x \mid x \sim a\}$ heiße die zu a gehörige *Mächtigkeitsklasse* von $\mathcal{V}$. Offenbar zerfällt $\mathcal{V}$ in paarweise disjunkte Mächtigkeitsklassen. $\mathcal{V}^{(1)}$ ist eine dieser Klassen. Es ist mit Satz 4.1 © leicht beweisbar, dass $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}^{(b)}$ für alle $a, b \neq \emptyset$. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}$ für alle $a \neq \emptyset$ (Übung 1).

Schon Beispiel 1 legt die Frage nahe, ob über ZF nicht sogar alle echten Klassen äquivalent sind. Dies wurde von Cantor vermutet [5)] und von von Neumann (in seinem System) sogar als Axiom postuliert. Diese Aufzählung induziert sofort eine Wohlordnung von $\mathcal{V}$ und man kann dann AC leicht beweisen. AC ist also eine notwendige

5)Notiz aus einem seiner Briefbücher. Cantor nannte echte Klassen „inconsistente Vielheiten“

Bedingung für die Äquivalenz aller Klassen. Allerdings ist sie nicht hinreichend, so dass Beispiele wie (1) oder (2) keine Selbstverständlichkeiten sind. Das wurde aber erst durch die Forcing–Methode von P. Cohen (1934 – 2007) klar. Kurzum, es gibt über ZFC keine definierbare Wohlordnung $<$ von $\mathcal{V}$, d.h. keine definierbare Ordnung $<$ auf dem Universum derart, dass (i) jedes $a\in\mathcal{V}$ enthält ein kleinstes Element bzgl. $<$, (ii) für jedes $a\in\mathcal{V}$ ist $\{b \mid b < a\}$ eine Menge. Man kann aber ein inneres Modell für ZFC konstruieren wie Gödel gezeigt hat, das von ihm so genannte Universum der *konstruktiblen Mengen.* Dieses lässt sich definierbar wohlordnen. In diesem Sinne ist das von Neumannsche Axiom daher unabhängig von ZFC.

Übungen

1. Man beweise $\mathcal{V}^{(a)} \sim \mathcal{V}^{(b)}$ für $a, b \neq \emptyset$. Dabei sei $\mathcal{V}^{(a)}$ wie im Text definiert.

   Hinweis. Betrachte $F:\mathcal{V} \to \mathcal{V}^{(a)}$ mit $F(x) = a \times \{x\}$.

2. Man beweise $\mathfrak{P}(\omega) \sim \mathbb{R}$ mittels Satz 4.1.

   Hinweis. Nach Übung 4 in **3.1** ist $\mathfrak{P}(\omega) \sim {}^{\omega}2$. Ferner offenbar $\mathbb{R} \sim I_1^0$, mit $I_1^0 = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < a < 1\}$. Also genügt zu zeigen ${}^{\omega}2 \sim I_1^0$. Jedes $r \in I_1^0$ hat eine eindeutige Darstellung $r = 0, z_0 z_1 \dots$ mit $z_i \in \{0,1\}$, wenn „Einer-Enden" ausgeschlossen werden, d.h. wenn gefordert wird, zu jedem i gibt es ein $j > i$ mit $z_j = 0$. Offenbar ist $f: 0, z_0 z_1 \dots \mapsto \langle z_0, z_1, \dots\rangle$ injektiv, so dass $I_1^0 \precsim {}^{\omega}2$. Jedem $z \in {}^{\omega}2$ kann umkehrbar eindeutig die Zahl $0, z_0 0 z_1 0 \dots$ zugeordnet werden, also auch $I_1^0 \precsim {}^{\omega}2$.

3. Man zeige ${}^{\omega}\omega \sim {}^{\omega}2$ $(\sim \mathfrak{P}(\omega))$.

   Hinweis für ${}^{\omega}\omega \precsim {}^{\omega}2$. Sei $f(\langle n_0, n_1, \dots\rangle) = \langle \underbrace{1,\dots,1}_{n_0}, 0, \underbrace{1,\dots,1}_{n_1}, 0, \dots\rangle$.

4. Man beweise mit dem Satz von Cantor, es gibt transzendente reelle Zahlen.

   Hinweis. Die Menge aller algebraischen Zahlen ist abzählbar.

5. Man beweise: Ist $<$ eine definierbare Wohlordnung von $\mathcal{V}$, dann sind alle echten Klassen äquivalent.

   Hinweis. Sei $\mathcal{C}$ echte Klasse. Es genügt zu zeigen $\mathcal{C} \sim \mathcal{V}$, also nach Satz 4.1 © eine injektive Abbildung $F:\mathcal{V} \to \mathcal{C}$ anzugeben. Diese erhält man ganz analog wie eine Injektion $f:\omega \to a$ für unendliches $a \subseteq \omega$.

3.5 Wohlordnungen und Bäume

Wohlgeordnete Mengen und Bäume sind spezielle p.o. Mengen:

Definition. Hat jede nichtleere Teilmenge b einer geordneten Menge a ein kleinstes Element, heißt $(a,<)$ eine *wohlgeordnete* Menge oder kurz eine *Wohlordnung*. Ist $(a,<)$ eine p.o. Menge, so heißt $b \subseteq a$ eine *Kette* in a, wenn b bzgl. $<$ total geordnet ist. Eine p.o. Menge $(a,<)$ mit kleinstem Element derart, dass $a_{<x} := \{y \in a \mid y < x\}$ für jedes $x \in a$ eine Kette ist, bezeichnet man als einen *Baum*; dessen kleinstes Element heißt die *Wurzel* des Baumes [6)].

Ist a bezüglich $<$ wohlgeordnet bzw. ein Baum, so gilt entsprechendes offenbar für jede Teilmenge $b \subseteq a$.

Beispiele. (a) $(n, \in\restriction n)$ ist nach Übung 5 in **2.6** wohlgeordnet und sogar *diskret geordnet*. Darunter verstehe man eine geordnete Menge $(a,<)$ derart, dass jede nichtleere Teilmenge $b \subseteq a$ sowohl ein kleinstes als auch ein größtes Element besitzt. Das ist nur eine geringfügige Verallgemeinerung der erwähnten Übung.

(b) Nach Satz 2.6.7 ist ω $\in$-geordnet, d.h. $(\omega,<)$ ist geordnet, mit $< := \in\restriction\omega$. Wir zeigen ohne AF, $(\omega,<)$ ist wohlgeordnet (mit AF folgt dies unmittelbar aus der Fundiertheit von ω). Sei $u \subseteq \omega$ nichtleer. Falls u nur ein Element hat, ist dieses auch das kleinste. Andernfalls lassen sich $k, n \in u$ mit $k < n$ so wählen, dass wegen $k \in n$ dann $u \cap n \neq \emptyset$. Daher hat $u \cap n$ ein kleinstes Element m, denn n ist wohlgeordnet. Wir behaupten, m ist auch kleinstes Element von u in ω. Denn sei $k \in u$. Wäre $k < m$ $(\in n)$, so gilt offenbar $k \in u \cap n$ und damit $m \leqslant k$ im Widerspruch zu $k < m$. Also ist $m \leqslant k$, wie zu beweisen war.

(c) Eine Teilmenge $a \subseteq v$ mit $(\forall xy \in a)(y < x \wedge x \in a \rightarrow y \in a)$ heiße ein *Anfang* einer geordneten Menge $(v,<)$, symbolisch $a \trianglelefteq v$. Wir schreiben $a \triangleleft v$ für $a \trianglelefteq v$ und $a \neq v$ und nennen a dann einen *echten Anfang*. Sei A die Menge aller Anfänge von v. Auch $(A, \subset)$ ist geordnet mit kleinstem Element $\emptyset$. Ferner ist $c := \bigcup C$ für jede Teilmenge $C \subseteq A$ wieder ein Anfang von a wie man mühelos verifiziert. c ist das Supremum von C in $(A, \subset)$. Dies ist gleichermaßen der Fall für beliebige $B \subseteq \mathfrak{P}(v)$, sofern für jedes $C \subseteq B$ auch $\bigcup C \in B$ (Übung 3).

(d) Sei $(a,<)$ halbgeordnet und K die Menge aller Ketten $k \subseteq a$. Sicher ist K bez. Inklusion partiell geordnet, aber interessanter ist die p.o. Menge $(K, \triangleleft)$. Diese ist sogar ein Baum. Denn sind k, h Anfänge einer Kette aus K, so ist entweder $k \trianglelefteq h$

[6)]Bisweilen wird gefordert, dass $a_{<x}$ für jedes $x \in a$ sogar wohlgeordnet ist.

oder umgekehrt $h \trianglelefteq k$. $(K, \triangleleft)$ heißt der zu $(a, <)$ gehörige *Kettenbaum*. Er enthält als Teilbaum die Menge K^w aller wohlgeordneten Ketten von a. Beide Bäume haben als Wurzel die leere Menge (eine triviale Kette von a).

(e) Eine *teilweise Ordnung* einer Menge a sei eine Ordnungsrelation p derart, dass $\bar{p} := \mathit{fld}\, p \subseteq a$. Durch p wird nur ein Teil von a total geordnet. Dieser Begriff darf nicht mit der partiellen Ordnung verwechselt werden. Ist z.B. $a = \{x, y, z\}$ und sind x, y, z paarweise verschieden, so ist $p = \{(x, y)\}$ eine teilweise Ordnung von a mit $\mathit{fld}\, p = \{x, y\}$. Sei $T = T_a$ die Menge aller teilweisen Ordnungen von a. Für $p, q \in T$ sei $p \triangleleft q$, wenn $p \subset q$ und wenn $\forall x, y((x, y) \in q \wedge y \in \bar{p} \rightarrow x \in \bar{p})$. Offenbar ist $(T, \triangleleft)$ ein Baum mit der Wurzel $\emptyset$. Dieser enthält als Teilbaum die Menge T^w aller *teilweisen Wohlordnungen* von a, d.h. $p \in T^w$, wenn $\bar{p}$ durch p wohlgeordnet ist.

Definition. Eine p.o. Menge $(a, <)$ heiße *induktiv*, wenn jede nichtleere Kette $k \subseteq a$ ein Supremum in a besitzt.

Diese etwas unglückliche Benennung geht in der angegebenen Bedeutung auf Bourbaki zurück. Von jetzt an wird das Wort „induktiv“ nur noch in diesem Sinne verwendet, solange nichts anderes gesagt wird. Ist z.B. K die Menge aller Ketten einer p.o. Menge a, so ist die p.o. Menge $(K, \subset)$ induktiv. Denn ist $C \subseteq K$ Kette in K, so ist $\bigcup C$ eine Kette in a und diese ist zugleich das Supremum von C in K.

Sämtliche in den Beispielen (d), (e) vorkommenden Bäume sind induktiv. In allen Fällen ist $\bigcup C$ gerade das Supremum einer Kette C. Dies ist jedoch eher ein Zufall und sollte in jedem Einzelfall besser nachgewiesen werden. Seien die $k \in C$ z.B. wohlgeordnet. Dann ist auch $u := \bigcup C$ wohlgeordnet. Denn ist $v \subseteq u$ nichtleer, ist auch $v \cap k$ nichtleer für wenigstens ein $k \in C$ und hat ein kleinstes Element e, das zugleich kleinstes Element in v ist. Denn mit $x \in v$ $(\subseteq u)$ und $x < e$ ist auch $x \in k$, weil $k \triangleleft u$. Also $x \in v \cap k$, was der Bestimmung von e widerspricht. Auch ist plausibel, dass $u := \bigcup C$ das Supremum einer Kette C im Baum $(T^w, \triangleleft)$ der teilweisen Wohlordnungen ist; denn die Vereinigung der Wohlordnungen der $k \in C$ ordnet u so, dass jedes $k \in C$ Anfang von u ist und dies ist wie gerade bewiesen wurde auch eine Wohlordnung von u, also eine teilweise Wohlordnung von a.

Der Begriff p.o. Menge verallgemeinert sich in natürlicher Weise zum Begriff einer *p.o. Klasse*. Es ist dies ein Paar $(\mathcal{A}, <)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Klasse und $<$ ein binäres Prädikat ist, das auf $\mathcal{A}$ irreflexiv und transitiv ist. Die Schreibweise $(\mathcal{A}, <)$ meint hier nicht das für echte Klassen $\mathcal{A}$ gar nicht existierende geordnete Paar, sondern sie deutet nur die momentane Zusammengehörigkeit von $\mathcal{A}$ und $<$ an. Völlig analog definiert man geordnete bzw. wohlgeordnete Klassen.

Konvention. Sei $(\mathcal{A},<)$ eine p.o. Klasse. Wir setzen fortan immer voraus, dass $\{y \in \mathcal{A} \mid y \leqslant x\}$ für jedes $x \in \mathcal{A}$ eine Menge ist.

Kurzum, beschränkte Teilklassen von $\mathcal{A}$ sollen stets Mengen sein. Andere p.o. Klassen spielen kaum eine Rolle. So ist z.B. $(\mathcal{V}, \subset)$ eine p.o. Klasse in diesem Sinne. Denn $\{y \in \mathcal{V} \mid y \subseteq x\} = \mathfrak{P}(x)$ ist sicher eine Menge. Man beachte, ein echter Anfang a einer (wohl)geordneten Klasse $(\mathcal{A},<)$ ist verabredungsgemäß eine Menge, weil a beschränkt ist. Dass es wohlgeordnete echte Klassen überhaupt gibt, liegt nicht auf der Hand und wird sich erst im nächsten Abschnitt herausstellen. Als die wichtigsten wohlgeordneten echten Klassen werden sich diejenigen der Ordinalzahlen und der Kardinalzahlen erweisen.

Satz 5.1 (Satz von Hartogs). *Sei $\mathcal{C}$ eine wohlgeordnete echte Klasse. Dann gibt es zu jeder Menge a einen Anfang $b \lhd \mathcal{C}$ mit $b \not\precsim a$.*

Beweis. Sei T die Menge aller teilweisen Wohlordnungen p von a derart, dass ein Anfang $c \lhd \mathcal{C}$ existiert mit $(c,<) \simeq (\bar{p}, p)$, wobei $\bar{p} := \mathit{fld}\, p$. Nach Übung 2 gibt es zu $p \in T$ genau ein derartiges c, das mit c_p bezeichnet sei. Wegen AR ist $A := \{c_p \mid p \in T\}$ eine Menge, also auch $u := \bigcup A$. Sicher ist $u \lhd \mathcal{C}$. Sei nun $b := u \cup \{\min(\mathcal{C} \setminus u)\}$, so dass auch $b \lhd \mathcal{C}$. Dann ist $b \not\precsim a$; denn andernfalls wäre $b \in A$, weil die Wohlordung von b bei einer Injektion nach a eine teilweise Wohlordnung von a erzeugt. $b \in A$ ist aber ausgeschlossen, sonst wäre $b \subseteq u$ im Widerspruch zu $u \subset b$. ❑

Nachdem wenigstens eine wohlgeordnete Klasse angegeben worden ist – und das wird ganz ohne AC alsbald gelingen – folgt aus obigem Satz, dass es beliebig große wohlgeordnete Mengen gibt. Genauer, zu jeder wohlgeordneten Menge a existiert eine weitere echt größerer Mächtigkeit. Auch das wird im nächsten Abschnitt bewiesen. Demnach gibt es – unabhängig von AC – immer auch überabzählbare wohlgeordnete Mengen. Man kann leicht ganz verschiedene Wohlordnungen einer abzählbar unendlichen Menge konstruieren. Aber überabzählbare Wohlordnungen sind nur sehr schwer zu beschreiben. Am genauesten studiert ist die Wohlordnung von ω_1, der ersten überabzählbaren Ordinalzahl.

Übungen

1. Man beweise, für eine geordnete Menge $(a,<)$ sind äquivalent
   (i) $(a,<)$ ist wohlgeordnet,
   (ii) jedes $x \in a$, das nicht größtes Element in a ist, hat einen unmittelbaren Nachfolger in a und jeder echte Anfang $b \subseteq a$ hat ein Supremum.

Hinweis (ii)$\Rightarrow$(i): $\emptyset$ ist echter Anfang und $\sup\emptyset$ existiert genau dann, wenn a ein kleinstes Element hat.

2. Sei $\boldsymbol{b} = (b,<)$ wohlgeordnet, $\boldsymbol{a} = (a,<)$ ein Anfang von $\boldsymbol{b}$ und $f:\boldsymbol{a} \cong \boldsymbol{b}$. Man zeige, $f = id_a$ und damit $a = b$. Kein echter Anfang von b kann also zu b isomorph sein. Ferner zeige man, sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ isomorphe Anfänge einer beliebigen wohlgeordneten Menge (oder auch Klasse) C, so ist $a = b$.

   Hinweis. Führe Annahme $(\exists x \in a) f(x) \neq x$ zum Widerspruch.

3. Sei $u \subseteq \mathfrak{P}(v)$ und für jedes $w \subseteq u$ sei auch $\bigcup w \in u$. Man zeige $\bigcup w$ ist das Supremum von w in der p.o. Menge $(u, \subset)$.

4. *Ordnungstheoretische Charakterisierung von* ω: Zeige, es gibt eine und bis auf Isomorphie nur eine geordnete Menge $(a,<)$ derart, dass jeder echte Anfang von a diskret geordnet ist und a kein größtes Element hat, nämlich $(\omega,<)$.

   Hinweis. Zeige zu jedem n existiert genau ein f_n mit $f_n : \xrightarrow{\text{inj}} a$ und *ran* f_n ist Anfang von a. Der gesuchte Isomorphismus ist $f = \bigcup_{n \in \omega} f_n$.

5. *Ordnungstheoretische Charakterisierung endlicher Mengen.* Man zeige, eine Menge a ist endlich genau dann, wenn a diskret geordnet werden kann.

   Hinweis. $\Rightarrow$: $a \sim n$ und $(n, \in_n)$ ist diskret geordnet. $\Leftarrow$: Sei $(a,<)$ diskret geordnet. O.B.d.A. $a \cap \omega = \emptyset$. Ordne $a \cup \omega$ geschickt.

6. Sei $(a,<)$ geordnet und PF^a_b die Menge aller *partiellen Funktionen* von a nach b, d.h. aller $f \in \mathcal{F}n$ mit *dom* $f \subseteq a$ und *ran* $f \subseteq b$. Für $f, g \in PF^a_b$ sei $f \lhd g$, wenn $f \subseteq g$ und wenn *dom* f echter Anfang von *dom* g bezüglich der Ordnung $<$ ist. Man zeige, $(PF^a_b, \lhd)$ ist ein induktiver Baum.

7. Sei $(v,<)$ induktive geordnete Menge, $a \subseteq b \subseteq v$. Man zeige $\sup a = \sup b$ genau dann, wenn a *konfinale* Teilmenge von b ist, d.h. zu jedem $x \in a$ gibt es ein $y \in b$ mit $x \leqslant y$.

3.6 Progressionen – Bourbakis Fixpunktsatz

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist das von AC unabhängige Theorem 1. Es ermöglicht simple Beweise für den Wohlordnungssatz, das Zornsche Lemma und anderer Maximalprinzipien und liefert alle Arten von Rekursionstheoremen praktisch als Korollarien. Für den Beweis werden nur die ersten vier Axiome von ZF benötigt, insbesondere weder AP noch AR. Erst in gewissen Anwendungen kommen andere Axiome ins Spiel. Der Beweis ist, wie stets in solchen Fällen, konstruktiv, weil er die Existenz einer Klasse sichert.

Eine nichtleere p.o. Klasse $(\mathcal{A},<)$ heiße *induktiv*, wenn jede Teilkette $k \subseteq \mathcal{A}$, die eine Menge ist, ein Supremum in $\mathcal{A}$ hat und damit insbesondere beschränkt ist. Umgekehrt ist eine beschränkte Kette von $\mathcal{A}$ nach der Konvention auf Seite 65 auch Menge. In diesem Sinne ist z.B. $(\mathcal{V}, \subset)$ induktiv. Denn eine Kette $k \subseteq \mathcal{V}$ hat das Supremum $\bigcup k \in \mathcal{V}$. Dasselbe gilt für die Klasse $(\mathcal{T}r, \subset)$, die nach Übung 2 in **2.1** induktiv ist. Eine induktive Klasse kann auch unbeschränkte Ketten enthalten. Eine solche ist notwendig echte Klasse, andernfalls wäre sie doch beschränkt. Theorem 1.

Sei $(\mathcal{A},<)$ p.o. Klasse. Ein Operator $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heiße *progressiv*, wenn $x \leqslant x^\pi$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Kurz, $x \leqslant x^\pi \leqslant x^{\pi\pi} \dots$ So ist z.B. der Operator $x \mapsto x^{\mathsf{S}} = x \cup \{x\}$ progressiv in $(\mathcal{V}, \subset)$, und zwar echt progressiv, d.h. $x \neq x^{\mathsf{S}}$. Das gilt wegen $x \notin x$.

Für Mengen $\mathcal{A}$ ist alles völlig sinngemäß erklärt. Ein Operator $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist dann eine Funktion und wir reden dann auch von progressiven Funktionen. Man beachte, in einer induktiv p.o. Menge hat *jede* Kette ein Supremum.

Sei $(\mathcal{A},<)$ eine induktive p.o. Klasse und $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ progressiv. Eine π*–Kette* sei eine nichtleere total geordnete Teilklasse $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ mit den Eigenschaften

(A) $(\forall x \in \mathcal{C}) x^\pi \in \mathcal{C}$, (B) für jede nichtleere Menge $a \subseteq \mathcal{C}$ ist $\sup a \in \mathcal{C}$.

Kurz, eine π–Kette $\mathcal{C}$ ist nichts anderes als eine geordnete induktive, gegenüber π abgeschlossene Teilklasse von $\mathcal{A}$. Man beachte nämlich, $\sup a$ ist wegen (B) zugleich das Supremum von a in $\mathcal{C}$. Ist $\mathcal{C}$ selbst Menge, so gilt nach (B) auch $\sup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Dies kann nur dann der Fall sein, wenn $\mathcal{C}$ ein größtes Element besitzt.

Theorem 1. *Sei* $(\mathcal{A},<)$ *eine induktive p.o. Klasse,* $e \in \mathcal{A}$*, und* $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *progressiv. Dann gibt es eine wohlgeordnete* π*–Kette* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ *mit* $\min \mathcal{C} = e$*.*

Der Beweis wird nachgeliefert. Betrachten wir zuerst eine Anwendung dieses machtvollen Theorems für den Fall, dass $(\mathcal{A},<)$ Menge ist. Eine Besonderheit des folgenden Satzes ist seine Unabhängigkeit von AC.

Satz 6.1 (Bourbakis Fixpunktsatz). *Sei $(a,<)$ eine induktive p.o. Menge und $\pi : a \to a$ sei progressiv. Dann hat π einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $e \in a$. Nach Theorem 1 existiert eine von e ausgehende π–Kette $\mathcal{C} \subseteq a$, die jetzt aber Menge ist. Damit folgt nach Bedingung (B) aber auch $s := \sup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Folglich ist $s^\pi \leqslant s$ und mithin muss $s^\pi = s$ gelten. ❏

Auf Möglichkeiten der Verschärfung von Satz 6.1 verweist die Bemerkung am Ende. Um die Nützlichkeit dieses Fixpunktsatzes zu demonstrieren beweisen wir nun den berühmten Wohlordnungssatz von Zermelo (Satz 6.2), der sich in Kapitel **4** mit AC als äquivalent erweisen wird. Von der Existenzannahme einer Auswahlfunktion in diesem Satz befreien wir uns später leicht mittels AC.

Wir erinnern zunächst an den Baum T^w der teilweisen Wohlordnungen von a mit der Anfangsordnung $\lhd$ (Beispiel (d) in **3.5**). Ist $p \in T^w$ mit $\bar{p} = \mathit{fld}\, p$ noch keine Wohlordnung von a und etwa $y \in a \setminus \bar{p}$, so lässt sich durch Hinzunahme von y „um einen Schritt nach rechts verlängern". Denn $p * y := p \cup \{(x,y) \mid x \in \bar{p}\}$ ist wieder eine teilweise Wohlordnung von a mit $\mathit{fld}(p * y) = \bar{p} \cup \{y\}$. Dies verbildlicht die folgende Figur. p ist offenbar echter Anfang von $p * y$, also $p \lhd p * y$.

$$\underbrace{\bullet \;\; \bullet \;\; \bullet \; \bullet \; \bullet \cdots}_{\bar{p}} \;\; \underset{y}{\bullet}$$

Satz 6.2 (Wohlordnungssatz). *Sei a Menge und es gebe eine Auswahlfunktion ζ auf $\mathfrak{P}(a)$, d.h. $\zeta u \in u$ für alle nichtleeren $u \subseteq a$. Dann kann a wohlgeordnet werden.*

Beweis. Sei T^w die induktive p.o. Menge aller teilweisen Wohlordnungen von a mit der Anfangsordnung $\lhd$. Es sei $\pi : T^w \to T^w$ wie folgt erklärt. Für $p \in T^w$ mit $\bar{p} := \mathit{fld}\, p$ sei $p^\pi = p * \zeta(a \setminus \bar{p})$ die Verlängerung von p um einen Schritt, sofern $a \setminus \bar{p} \neq \emptyset$. Falls aber $a \setminus \bar{p} = \emptyset$ – und p damit Wohlordnung von ganz a ist – sei $p^\pi = p$. Offenbar ist π progressiv. Gemäß Satz 6.1 hat π einen Fixpunkt p; der Fall $a \setminus \bar{p} = \emptyset$, d.h. $\bar{p} = a$, tritt also wirklich ein und p ist dann eine Wohlordnung von ganz a. ❏

Hier drei weitere einfache Folgerungen aus Satz 6.1 und Theorem 1.

Korollar 6.3. *(a) Ist $(\mathcal{A},<)$ induktive p.o. Klasse und $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ echt progressiv, so ist jede π–Kette $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ und damit auch $\mathcal{A}$ eine echte Klasse. (b) Es gibt wohlgeordnete echte Klassen in $\mathcal{V}$.*

Beweis. Wäre $\mathcal{C}$ Menge, hätte π nach Satz 6.1 einen Fixpunkt. Das beweist (a). $\mathtt{S} : x \mapsto x^{\mathsf{S}}$ ist echt progressiv in der p.o. Klasse $(\mathcal{V}, \subset)$. Also ist eine nach Theorem 1 existierende $\mathtt{S}$-Kette in $(\mathcal{V}, \subset)$ nach (a) eine wohlgeordnete echte Klasse. ❏

Wendet man dasselbe Argument auf die induktive Klasse $(\mathcal{T}r, \subset)$ an, in der sowohl $x \mapsto x^{\mathsf{S}}$ als auch $x \mapsto \mathfrak{P}(x)$ echte Progressionen sind, so erhielte man schon an dieser Stelle die später auf andere Art definierten Klassen On der Ordinalzahlen und die von Neumannsche Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha \in On}$.

Unter einer *Schrankenfunktion* in einer p.o. Menge $(a. <)$ verstehe man eine auf der Menge aller Ketten von a erklärte Funktion σ mit Werten in a derart, dass $x < \sigma k$ für alle $x \in k$ einer echt beschränkten Kette $k \subseteq a$.

Satz 6.4. *Sei $(a, <)$ p.o. Menge und es gebe eine Schrankenfunktion σ. Ist jede Kette $k \subseteq a$ beschränkt, so hat a ein maximales Element.*

Beweis. Sei $(K, \subset)$ die p.o. Menge aller Ketten $k \subseteq a$. Für $k \in K$ sei $k^\pi = k \cup \{\sigma k\}$, falls k echt beschränkt ist und $k^\pi = k$ sonst. π hat einen Fixpunkt k_0 nach Satz 6.2. Ist b Schranke für k_0, so ist b notgedrungen ein maximales Element in a. ❏

Wieder befreit man sich mittels AC leicht von der angenommenen Existenz einer Schrankenfunktion. So gesehen besagt Satz 6.4 nichts anderes als das in **4.1** formulierte Zornsche Lemma. Mühelos ergibt sich auch der Beweis von

Satz 6.5 (Vergleichbarkeitssatz für Wohlordnungen). *Es seien $a = (a, <)$ und $b = (b, <)$ wohlgeordnete Mengen. Dann ist a zu einem Anfang von b isomorph oder umgekehrt.*

Beweis. Sei P Menge aller f mit $f : a' \simeq b'$, so dass $a' \trianglelefteq a$ und $b' \trianglelefteq b$. Man definiere eine Progression π auf P wie folgt: $f^\pi = f \cup \{(x, y)\}$ mit $x = \min(a \setminus a')$, $y = \min(b \setminus b')$, falls sowohl $a \neq a'$ als auch $b \neq b'$, und $f^\pi = f$ sonst. π hat nach Satz 6.2 einen Fixpunkt, womit alles gezeigt ist. ❏

Man kann diesen Satz auch wie folgt etwas schärfer formulieren: Sind $(a, <)$ und $(b, <)$ beliebige wohlgeordnete Mengen, so sind entweder $(a, <)$ und $(b, <)$ isomorph, oder $(a, <)$ ist einem echten Anfang von $b = (b, <)$, oder $b = (b, <)$ einem echten Anfang von $a = (b, <)$ isomorph. Satz 6.4 wie auch die meisten anderen Sätze über Wohlordnungen gehen direkt auf Cantor zurück.

Satz 6.6. *Zu jeder Wohlordnung $(a, <)$ existiert eine Wohlordnung $(b, <)$ mit $a \prec b$.*

Beweis. Sei $(\mathcal{C}, <)$ echte wohlgeordnete Klasse und $b \triangleleft \mathcal{C}$ nach Satz 5.1 so gewählt, dass $b \not\precsim a$. Nach Satz 6.5 ist $(a, <)$ zu einem Anfang von $(b, <)$ isomorph, weil die andere Möglichkeit entfällt. Daher $a \precsim b$ und wegen $b \not\precsim a$ sogar $a \prec b$. ❏

Dieser Satz garantiert unabhängig von AC beliebig große wohlgeordnete Mengen. Zum Beweis von Theorem 1 behandeln wir zuerst einen Spezialfall.

Lemma. *Sei* $(\mathcal{B},<)$ *ein induktiver Baum und* ${}':\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ *eine Progression, sowie* $(\forall kh\in\mathcal{B})(k<h\to k'\leqslant h)$. *Dann ist* $\mathcal{C}=\{c\in\mathcal{B}\mid(\forall k\in\mathcal{B})(k\leqslant c\vee c\leqslant k)\}$ *eine* ${}'$*–Kette mit der Eigenschaft* $(*)$ $d<c\in\mathcal{C}\to d\in\mathcal{C}$ *für alle* $d\in\mathcal{B}$.

Beweis. $\mathcal{C}$ ist sicher total geordnet und enthält die Wurzel von $\mathcal{B}$, also $\mathcal{C}\neq\emptyset$. Sei $c\in\mathcal{C}$ und $k\in\mathcal{B}$. Falls $k\leqslant c$, ist $k\leqslant c'$; falls aber $c<k$, ist $c'\leqslant k$. Also $k\leqslant c'\vee c'\leqslant k$ in jedem Falle, d.h. $c'\in\mathcal{C}$ und (A) in der Definition Seite 67 ist bewiesen. Sei nun $a\subseteq\mathcal{C}$ Menge, $s=\sup a$ und $k\in\mathcal{B}$. Entweder ist $(\forall h\in a)h<k$ und damit $s\leqslant k$ – oder aber $k\leqslant h\leqslant s$ für ein $h\in a$. Also $s\in\mathcal{C}$. Das beweist (B). Zum Nachweis von $(*)$ sei $d<c\in\mathcal{C}$, $k\in\mathcal{B}$. Ist $c\leqslant k$, so $d\leqslant k$; falls aber $k<c$, also $k,d<c$, gilt $k\leqslant d\vee d\leqslant k$, denn $\mathcal{B}$ ist ein Baum. Folglich $d\in\mathcal{C}$ und $(*)$ ist bewiesen. ❑

Beweis von Theorem 1. Sei $e\in\mathcal{A}$ und $(\mathcal{B},<)$ der Baum aller geordneten Ketten $k\subseteq\mathcal{A}$ mit der hier gleichfalls mit $<$ bezeichneten Anfangsordnung von $\mathcal{B}$, so dass

(1) e ist erstes Element von k,

(2) Ist $x,y\in k$ mit $x<y$, so ist $x^\pi\in k$ und $x^\pi\leqslant y$,

(3) Ist $h\neq\emptyset$ echter Anfang von k, so ist $\sup h\in k$.

$\mathcal{B}$ ist induktiv mit $\sup K=\bigcup K$ für Ketten $K\subseteq\mathcal{B}$ $(K\in\mathcal{V})$ und hat die Wurzel $\{e\}$ wie man leicht sieht. Auch gilt offenbar (4): $k\in\mathcal{B}\to h\in\mathcal{B}$ für jeden nichtleeren Anfang $h\leqslant k$. Man betrachte nun folgende Progression ${}'$ auf $\mathcal{B}$: Hat $k\in\mathcal{B}$ ein größtes Element y, sei $k'=k\cup\{y^\pi\}$; sonst sei $k'=k\cup\{\sup k\}$. Man prüft dann unschwer $(\forall kh\in\mathcal{B})(k<h\to k'\leqslant h)$ mittels der Eigenschaften (2) und (3). Das Lemma garantiert uns eine ${}'$–Kette $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{B}$. Wir behaupten, die Kette $\mathcal{D}=\bigcup\mathcal{C}\subseteq\mathcal{A}$ ist eine π–Kette. Dazu überprüfen wir die Definitionsbedingungen (A) und (B). Für $x\in\mathcal{D}$, etwa $x\in k\in\mathcal{C}$, sei $c_x:=\{y\in\mathcal{D}\mid y\leqslant x\}=\{y\in k\mid y\leqslant x\}$. Es gilt dann $c_x\leqslant k$. Daher $c_x\in\mathcal{B}$ gemäß (4) und sogar $c_x\in\mathcal{C}$ nach $(*)$ im Lemma. Damit ist auch $c_x\cup\{x^\pi\}=c'_x\in\mathcal{C}$; also $x^\pi\in\mathcal{D}$. Das beweist (A). Sei $a\subseteq\mathcal{D}$ eine nichtleere Menge. Um $\sup a\in\mathcal{D}$ zu beweisen, darf man o.B.d.A. annehmen, a ist Anfang von $\mathcal{D}$. Dann ist $a=\bigcup\{c_x\mid x\in a\}=\sup_{\mathcal{B}}\{c_x\mid x\in a\}\in\mathcal{C}$. Falls $\sup a\in a$, gilt (B) trivial. Andernfalls hat a kein größtes Element und mit $a\in\mathcal{C}$ ist $a\cup\{\sup a\}=a'\in\mathcal{C}$. Daher ist $\sup a\in\mathcal{D}$ auch jetzt und (B) ist bewiesen. Auch ist $\mathcal{D}\neq\emptyset$, denn $e\in\mathcal{D}$. Schließlich ist $\mathcal{D}$ auch wohlgeordnet. Denn $\mathcal{D}$ hat offenbar selbst die Eigenschaften (1), (2), (3) mit $\mathcal{D}$ für k und nach (2) hat jedes $x\in\mathcal{D}$, das nicht größtes Element in $\mathcal{D}$ ist, den unmittelbaren Nachfolger $x^\pi\in\mathcal{D}$. Gemäß Übung 1 in **3.5** ist $\mathcal{D}$ damit wohlgeordnet. ❑

Für den Beweis von Theorem 1 würde die Voraussetzung genügen, dass alle nichtleeren *wohlgeordneten* Ketten $k \subseteq \mathcal{A}$ ein Supremum besitzen. Auch Satz 6.2 ließe sich noch verschärfen. Es genügt statt der Induktivität vorauszusetzen, dass eine Schrankenfunktion für $(a, <)$ existiert; es reicht sogar eine Schrankenfunktion für die echt beschränkten wohlgeordneten Ketten $k \subseteq a$.

Bei Theorem 1 handelt es sich ebenso wie bei Satz 4.1 oder beim später bewiesenen Rekursionstheorem um eine Behauptung der Form $\forall\mathcal{A}\exists\mathcal{B}H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Da Klassen jedenfalls innerhalb ZF nicht quantifizierbar sind, ist der Beweis einer solchen Behauptung stets das eingelöste Versprechen, zu einer vorgegebenem Klasse $\mathcal{A}$ eine Klasse $\mathcal{B}$ explizit so anzugeben, dass $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ erfüllt wird. Tatsächlich wird im Beweis von Theorem 1 eine π-Kette explizit konstruiert, wenn man alle Beweisschritte sorgfältig verfolgt.

Übungen

1. Seien $(\mathcal{A}, <)$, $(\mathcal{B}, <)$ echte wohlgeordnete Klassen. Zeige, es gibt (genau) einen Isomorphismus $F : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. Kurz, wohlgeordnete echte Klassen sind isomorph.

   Hinweis. Sei $\mathcal{F}$ Klasse aller f mit $f : a \simeq b$ für Anfänge $a \lhd \mathcal{A}$, $b \lhd \mathcal{B}$ und sei $f^\pi = f \cup \{(\min(\mathcal{A} \setminus a), \min(\mathcal{B} \setminus b))\}$. π ist echt progressiv auf $(\mathcal{F}, \subset)$. Ist $\mathcal{C}$ π–Kette, leistet $F = \bigcup\mathcal{C}$ das Verlangte (beachte $\mathcal{C}$ ist echte Klasse).

2. *Tarskis Fixpunktsatz verallgemeinert.* Sei $(a, <)$ eine induktive p.o. Menge mit kleinstem Element und $\tau : a \to a$ sei *monoton*, d.h. $x \leqslant y \to \tau(x) \leqslant \tau(y)$ für alle $x, y \in a$. Man zeige, τ hat einen Fixpunkt [7].

   Hinweis. Betrachte $b = \{x \in a \mid x \leqslant \tau(x)\}$ und zeige, auch b ist induktiv.

3. Man beweise mit dem Fixpunktsatz von Tarski den Satz von Cantor–Bernstein.

   Hinweis. Sei $b \subseteq a$, $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$, $c := a \setminus b$ und $A = \mathfrak{P}(a)$. Die Funktion $F : A \to A$ mit $F(x) = x \cup c$ ist monoton in $(A, \subset)$. Ist d $(\subseteq a)$ Fixpunkt von F und $e = a \setminus f[a]$, so ist $f{\restriction}d \cup id_e$ Bijektion von a auf b.

4. Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ eine monotone, sonst aber völlig beliebige Funktion, wobei $[0, 1] := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant r \leqslant 1\}$. Man zeige, f hat einen Fixpunkt.

   Hinweis. $([0, 1], <)$ ist induktiv, also greift Tarskis Fixpunktsatz.

5. Man beweise: Ist $(a, <)$ p.o. Menge und $\sigma : a \to a$ echt progressiv, so enthält a eine unbeschränkte Kette.

[7] Tarski setzt voraus, dass $\sup u$ für *jede* Teilmenge $u \subseteq a$ existiert.

Hinweis. Andernfalls ist $k^\pi = k \cup \{\sigma(\sup k)\}$ eine echte Progression im Kettenbaum von $(a, <)$.

6. Sei V beliebiger Vektorraum über dem Körper K und ζ Auswahlfunktion für V, d.h. $\zeta a \in a$ für alle $a \subseteq V$, $a \neq \emptyset$. Zeige mit Satz 6.2, V hat eine Basis.

   Hinweis. Sei $(U, \subset)$ die induktive p.o. Menge aller linear unabhängigen Teilmengen $u \subset V$. Für $u \in U$ bezeichne $\langle u \rangle$ den von u erzeugten Unterraum. Definiere $\pi(u) = u \cup \zeta(V \setminus \langle u \rangle))$, falls $V \setminus \langle u \rangle \neq \emptyset$, und $\pi(u) = u$ sonst. π hat Fixpunkt b und b ist maximal linear unabhängige Menge.

7. Seien $(a, <)$, $(b, <)$ abzählbare dicht geordnete Mengen ohne Randelemente. Man zeige $(a, <) \simeq (b, <)$ (Cantor).

   Hinweis. Sei P die Menge aller $f : a' \simeq b'$, so dass a', b' endliche Teilmengen von a bzw. b sind. Seien $\alpha(f)$, $\beta(f)$ die größten Anfänge von a in a' bzw. b in b' bzgl. der Abzählungen von a, b. Für $f, g \in \mathfrak{P}$ sei $f < g$ wenn $\alpha f \subset \alpha(g) \wedge \beta(f) \subset \beta(g)$. Sei $\pi : P \to P$ definiert durch $f^\pi = f \cup \{(x, x'), (y, y')\}$; dabei sei $x = \min(a \setminus \mathit{dom}\, f)$ und x' kleinstes Element in $b \setminus \mathit{ran}\, f$, so dass auch $f' := f \cup \{(x, x')\} \in P$. So ein x' existiert wegen dichter Ordnung von b. Ferner sei $y' = \min(b \setminus \mathit{ran}\, f')$ und y kleinstes Element in $a \setminus \mathit{dom}\, f'$, so dass auch $f' \cup \{(y, y')\} \in P$. π ist echte Progression auf $(P, <)$; also existiert nach Übung 5 eine Kette $C \subseteq P$ ohne größtes Element. Für $f := \bigcup C$ ist $f : a \simeq b$, weil $\mathit{dom}\, f \subset \bigcup\{\alpha(f) \mid f \in C\} = a$, $\mathit{ran}\, f \subseteq \bigcup\{\beta(f) \mid f \in C\} = b$.

Kapitel 4

Das Auswahlaxiom

In der Mathematik wird das Auswahlaxiom fortwährend verwendet, wenn auch nicht immer explizit darauf hingewiesen wird. Schon in den Anfängen der Analysis und Topologie macht man z.B. davon Gebrauch, dass die Vereinigung u abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Die Idee des von Cantor stammenden naiven Beweises ist, die Elemente von u in einer Matrix mit abzählbar vielen Zeilen und Spalten anzuordnen. Dass AC für diese Tatsache verantwortlich ist, liegt nicht auf Hand, lässt sich aber nachweisen: Es gibt Modelle von ZF, in denen die überabzählbare Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist. In einem solchen Modell kann obige Behauptung nicht gelten, sonst wäre $\mathbb{R}$ ja abzählbar, was unmöglich ist.

Wir werden im ersten Abschnitt einige Konsequenzen von AC vorstellen, wobei wir uns auf solche von allgemeinem Interesse beschränken. Einige davon, wie etwa das Zornsche Lemma, sind auf der Basis der ZF–Axiome äquivalent mit AC. Das gilt z.B. auch für die häufig vorkommende Auswahl eines Repräsentantensystems für die Äquivalenzklassen einer beliebigen Äquivalenzrelation. Weil diese Dinge immer auch in Anwendungen der Mengenlehre eine Rolle spielen, haben wir dieses Kapitel vor das Kapitel über Ordinalzahlen gesetzt, obwohl die Theorie der Ordinalzahlen völlig unabhängig von AC ist. In **4.2** vergleichen wir die explizite Beschreibung mengentheoretischer Objekte mit bloßen Existenzbehauptungen. Dieser und Abschnitt **4.3** über Abschwächungen und Alternativen haben teils nur Diskussionscharakter und vermitteln einen Eindruck über die Verhältnisse im Universum bei Abwesenheit von AC oder Ersetzung von AC durch andere Axiome.

4.1 Gleichwertigkeiten und Konsequenzen von AC

Sei s ein Mengensystem und $s_+ := s \setminus \{\emptyset\}$. Eine Funktion ζ mit $dom\,\zeta = s_+$ heiße eine *Auswahlfunktion* auf s, falls $\zeta(a) \in a$ für alle $a \in s_+$. Häufig formuliert man das Auswahlaxiom wie folgt

AC': *Auf jeder Menge s existiert eine Auswahlfunktion.*

Aus AC folgt AC'. Denn sei $s' = \{\{a\} \times a \mid a \in s_+\}$. Offenbar ist s' ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen der Gestalt $\{(a, x) \mid x \in a\}$ für $a \in s_+$. Sei ζ eine Auswahlmenge für s'. Dieses ζ ist selbst bereits Auswahlfunktion auf s. Denn für jedes $a \in s_+$ existiert offenbar genau ein $y \in a$, so dass $(a, y) \in \zeta$.

Umgekehrt folgt AC aus AC'. Denn sei s ein System paarweise disjunkter nichtleerer Mengen, also $s_+ = s$, und ζ Auswahlfunktion auf s. Dann ist offenbar $ran\,\zeta$ Auswahlmenge für s.

In den meisten Anwendungsfällen ist s die Potenzmenge einer Menge und es würde genügen, die Existenz von Auswahlfunktionen für diesen Spezialfall zu fordern, weil einfach $s \subseteq \mathfrak{P}(\bigcup s)$ für beliebiges s.

Die Existenz einer Auswahlmenge für ein *endliches* System s paarweise disjunkter nichtleerer Mengen lässt sich ohne AC induktiv über die Anzahl der Mengen in s leicht bestätigen, Übung 1 in **2.7**. Aus dieser gleichsam logischen Tatsache ist das Auswahlaxiom durch Extrapolation auf unendliche Mengensysteme entstanden.

Auch wissen wir, dass die Existenz einer Auswahlfunktion ζ auf s auch ohne AC gesichert ist, falls $a := \bigcup s$ abzählbar ist. Denn dann existiert eine Wohlordnung auf a und man gewinnt eine Auswahlfunktion ζ auf s dadurch, dass $\zeta(x)$ für $x \in s_+$ das kleinste Element von x ($\subseteq a$) bezüglich dieser Wohlordnung sein soll. Dagegen hilft es nichts, wenn man nur voraussetzt, alle $x \in s$ seien endlich. Auch wenn jedes derartige x aus nur zwei Elementen besteht, benötigt man in der Regel AC, um aus diesen Zweiermengen je ein Element auszuwählen.

Eine fundamentale Konsequenz von AC in Gestalt von AC' ist nach Satz 3.6.2 der

Satz 1.1 (Wohlordnungssatz). *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Dies impliziert seinerseits AC': Eine Wohlordnung von $\bigcup s$ liefert nach dem Muster des eben Gesagten leicht eine Auswahlfunktion auf s.

Eine besonders beliebte Form von AC ist der folgende Satz, der früher schon von Hausdorff und etwas später auch von Kuratowski formuliert wurde. Aber Zorn hat es (1935) erstmals zielgerichtet in der Algebra angewendet.

Satz 1.2 (Lemma von Zorn). *Ist $(a,<)$ eine nichtleere p.o. Menge und ist jede Kette $k \subseteq a$ beschränkt, so hat a ein maximales Element.*

Beweis. Sei ζ Auswahlfunktion für a und $\hat{k}$ die Menge aller echten Schranken einer Kette $k \subseteq a$. Dann ist σ mit $\sigma(k) = \zeta\hat{k}$ für $\hat{k} \neq \emptyset$ eine Schrankenfunktion für a. Also hat a ein maximales Element nach Satz 3.6.4. ❏

Der Unterschied zwischen den Sätzen 3.6.4 und 1.2 ist lediglich der, dass wir uns in 1.2 von der Zusatznahme einer Schrankenfunktion befreit haben. Eine solche existiert eben aufgrund von AC. Mitunter kann man sich auch ohne AC eine Schrankenfunktion verschaffen, etwa dann, wenn a wohlgeordnet werden kann – man nehme dann für σk die kleinste echte obere Schranke einer echt beschränkten Kette $k \subseteq a$. Daher gilt das Zornsche Lemma jedenfalls für alle abzählbaren nichtleeren p.o. Mengen, ohne dass AC bemüht werden muss.

Das Zornsche Lemma ist äquivalent zu AC. Denn im Baum T^w aller teilweisen Wohlordnungen einer Menge a ist jede Kette beschränkt – z.B. durch ihr Supremum. Also hat T^w ein maximales Element p. Es muss dann $\mathit{fld}\, p = a$ gelten; sonst könnte man p um einen Schritt nach rechts verlängern, was der Maximalität von p widerspräche. Also impliziert das Zornsche Lemma den Wohlordnungssatz und damit AC.

Eine weitere wichtige Folgerung aus AC ist der auf Cantor zurückgehende

Satz 1.3 (Vergleichbarkeitssatz). *Für beliebige Mengen a, b gilt $a \precsim b$ oder $b \precsim a$.*

Beweis. Nach Satz 1.1 lässt sich annehmen, dass $(a,<)$, $(b,<)$ wohlgeordnet sind. Nach dem Vergleichssatz 6.5 für wohlgeordnete Mengen ist $(a,<)$ zu einem Anfang von $(b,<)$ oder $(b,<)$ ist zu einem Anfang von $(a,<)$ isomorph. Im ersten Falle gilt offensichtlich $a \precsim b$ und im zweiten eben $b \precsim a$. ❏

Auch Satz 1.3 ist äquivalent zu AC. Sei die Gültigkeit des Satzes angenommen. Es genügt zu zeigen, dass jede Menge a wohlgeordnet werden kann. Nach Korollar 3.6.3 gibt es eine wohlgeordnete Klasse $\mathcal{C}$. Nach Satz 3.5.1 hat $\mathcal{C}$ einen Anfang b mit $b \not\precsim a$. Also $a \precsim b$ nach Satz 1.3. d.h. $\exists f\, f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$. Dann überträgt f^{-1} die Wohlordnung von $\mathit{ran}\, f$ auf a und a ist damit wohlgeordnet. Eine weitere Folge von AC ist

Satz 1.4 (Hausdorffs Maximalkettensatz). *Es sei $(a,<)$ eine p.o. Menge und $k_0 \subseteq a$ eine gegebene Kette. Dann existiert eine Maximalkette $h \supseteq k_0$, d.h. $h' = h$ für jede Kette $h' \supseteq h$ in a.*

Beweis. Sei ζ Auswahlfunktion von $\mathfrak{P}(a)$ und $(K, \subset)$ die induktive p.o. Menge aller Ketten $k \supseteq k_0$. Für $k \in K$ sei $\tilde{k} := \{x \in a \setminus k \mid k \cup \{x\}$ ist Kette in $a\}$. Offenbar ist $\tilde{k} = \emptyset$

genau dann, wenn k Maximalkette ist. Sei $\pi k = k \cup \{\zeta \hat{k}\}$, falls $\tilde{k} \neq \emptyset$, und $k^\pi = k$ sonst. π hat einen Fixpunkt nach Satz 3.6.1 und dieser ist Maximalkette. ❑

Auch dieser Satz ist äquivalent zu AC, weil er das Zornsche Lemma impliziert: eine beschränkte Maximalkette muss notwendig ein größtes Element haben und dieses ist dann auch maximales Element in a. Es gibt eine sehr große Anzahl weiterer zu AC äquivalenter Aussagen. Einige weitere einfache äquivalente Formulierungen geben die Übungen.

Alle oben angegebenen äquivalenten Formulierungen von AC sind lokaler Natur, d.h. der Äquivalenzbeweis bezieht sich auf eine jeweils vorgegebene Menge. So gibt es z.B. eine Auswahlfunktion auf $\mathfrak{P}(a)$ genau dann, wenn a eine Wohlordnung besitzt. Von anderer Art ist der folgende Satz, den wir ohne Beweis nur zitieren. Dieser Satz wird global (d.h. für alle Mengen) benutzt, um eine vorgegebene Menge wohlzuordnen.

Satz (Rubin 1960). AC ist äquivalent zu der Aussage

Kann a wohlgeordnet werden, so auch $\mathfrak{P}(a)$.

Übungen

1. Das *kartesische Produkt* $\times_{i \in I} a_i$ einer Familie $(a_i)_{i \in I}$ ist die Menge aller Funktionen $f : I \to \bigcup\{a_i \mid i \in I\}$ mit $f(i) \in a_i$. Man zeige, AC ist äquivalent zu

$$\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset \text{ für alle } (a_i)_{i \in I} \text{ mit } a_i \neq \emptyset \text{ für } i \in I.$$

2. Man zeige AC ist äquivalent zur Aussage $(\forall abf)(f : a \xrightarrow{\text{sur}} b \ \rightarrow b \precsim a)$.

   Hinweis. Betrachte die zu f gehörige Partition von a, siehe **3.3**.

3. Man beweise die (ohne AC unbeweisbare) Gleichwertigkeit von

   (i) a ist unendlich,

   (ii) $\omega \precsim a$,

   (iii) Es gibt ein f mit $f : a \xrightarrow{\text{inj}} a$ und $\mathit{ran}\, f \neq a$.

   Hinweis für (i)⇒(ii): $a \precsim \omega \vee \omega \precsim a$ nach Satz 1.3.

4. Man zeige (mit AC), jede geordnete Menge $(a, <)$ enthält eine mit a konfinale wohlgeordnete Teilmenge b, d.h. $(\forall x \in a)(\exists y \in b) x \leqslant y$. Damit ist in einer p.o. Menge a jede Kette beschränkt, wenn nur jede wohlgeordnete Kette $k \subseteq a$ beschränkt ist.

Hinweis. Sei $(W, \lhd)$ die p.o. Menge aller wohlgeordneten $u \subseteq a$, ζ eine Auswahlfunktion für $\mathfrak{P}(a)$, $u^\pi = u \cup \{\zeta v\}$ für $\hat{u} \neq \emptyset$ und $u^\pi = u$ sonst. Dabei sei $\hat{u} := \{s \in a \mid (\forall x \in u) x < s\}$. Es gibt eine π-Kette C in W.

5. Sei (a, r) p.o. Menge. Konstruiere mit dem Hausdorffschen Kettensatz ein $t \supseteq r$, so dass (a, t) geordnet ist. (Dies ist schwächer als AC, siehe **4.3**).

6. Sei $a = (a, <)$ p.o. Menge. Man zeige (mit AC): a ist induktiv genau dann, wenn jede gerichtete Teilmenge $d \subseteq a$ ein Supremum hat. d heißt *gerichtet*, wenn $(\forall x, y \in d)(\exists z \in d) x, y \leqslant z$.

   Hinweis. Ist a induktiv, $d \subseteq a$ gerichtet, betrachte erst den Fall $\sup k \in d$ für Ketten $k \subseteq d$.

7. Eine Menge a heiße *von endlichem Charakter*, wenn $x \in a$ genau dann, falls $y \in a$ für jede endliche Teilmenge $y \subseteq x$. So ist z.B. die lineare Unabhängigkeit einer Menge von Vektoren von endlichem Charakter. Man beweise das sogenannte *Lemma von Teichmüller und Tukey*: Ist a eine Menge von endlichem Charakter, so enthält die p.o. Menge $(a, \subset)$ ein maximales Element.

8. Eine Menge B heißt eine *Boolesche Algebra* mit dem *Einselement* $e \in B$, wenn $x, y \in B \to x \cup y, x \cap y \in B$ und $x \in B \to -x \in B$ mit $-x = e \setminus x$. Wegen $x \cup -x = e$ ist dann e größtes Element in B. $0 := -e (= \emptyset)$ heißt *Nullelement* von B. $F \subseteq B$ heißt *Filter*, wenn (i) $0 \notin F$, (ii) $x, y \in F \to x \cap y \in F$, (iii) $x \in F \wedge x \leqslant y \to y \in F$, und darüber hinaus *Ultrafilter*, wenn $(\forall x \in B)(x \in F \vee -x \in F)$. Man zeige, jedes Filter lässt sich zu einem Ultrafilter erweitern.

   Hinweis. Die Vereinigung einer Kette von Filtern ist wieder Filter.

4.2 Explizite Mengen

Die folgenden Ausführungen sollen in erster Linie den unterschiedlichen Charakter von Existenzaussagen in ZF oder ZFC beleuchten, vornehmlich am Beispiel gewisser Ordnungen auf ω, $\mathfrak{P}(\omega)$ und $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))$. Dieser Abschnitt hat überwiegend beschreibenden Charakter und kann auch ohne Nachteil überschlagen werden.

Eine Menge oder Klasse $\{v \mid \varphi\}$ heiße *explizit* gegeben, kurz *explizit*, wenn φ außer v keine freien Variablen (Parameter) enthält. Beispiele sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}, \dots, \omega$, $\omega \times \omega$, die wohlgeordnete Menge $(\omega, \in_\omega)$, die Menge aller Wohlordnungen von ω, die geordnete Menge $(\mathbb{Q}_+, <)$ der positiven rationalen Zahlen mit der üblichen Anordnung. Ferner ${}^\omega\omega$, $\mathfrak{P}(\omega)$, die Menge aller Wohlordnungen auf $\mathfrak{P}(\omega)$, usw. Diese Objekte wurden jeweils explizit angegeben oder können explizit angegeben werden; anders formuliert, sie sind durch parameterfreie Mengenterme darstellbar.

Dagegen hängt eine aus einem endlichen System s paarweise disjunkter nichtleerer Menge durch Auswahl entstehende Menge, deren Existenz bekanntlich ohne AC gesichert ist, in der Regel von Parametern ab. Dies ist eine ständige Quelle von Mißverständnissen AC betreffend. Betrachten wir ein einfaches Beispiel.

Seien a, b disjunkte nichtleere Mengen, $x \in a$, $y \in b$, und sei $s = \{a, b\}$. Dann ist

$$c = c_{x,y} = \{z \mid (z = x \wedge x \in a) \vee (z = y \wedge y \in b)\}$$

offenbar eine von den Parametern x, y abhängige Auswahlmenge für s. Es gibt in der Regel keine Möglichkeit, selbst für explizit definierte a, b eine parameterfreie Auswahlmenge explizit zu bestimmen.

Ist $f \in \mathcal{F}n$ explizit, so auch $dom\, f = \{x \mid \exists y (x, y) \in f\}$, denn der Parameter f im Term rechts lässt sich mittels seiner expliziten Definition beseitigen. Ist außerdem $x \in dom\, f$ explizit, so auch $f(x) = \{v \mid \exists y (v = y \wedge (x, y) \in f)\}$; ist $a \subseteq dom\, f$ explizit, so auch $f[a] = \{y \mid (\exists x \in a)(x, y) \in f\}$. Und ist $r \subseteq a \times a$ explizit, so auch

$$\{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in r\} = \{p \mid \exists\, uvxy (p = (u, v) \wedge (x, u), (y, v) \in f)\}.$$

Mit anderen Worten, durch explizite Abbildungen übertragene explizite Relationen sind wieder explizit.

Man konstruiert unschwer eine explizite Bijektion von $\mathbb{Q}_+$ auf ω. Damit lässt sich nach dem oben Gesagten die dichte Ordnung von $\mathbb{Q}_+$ auf ω explizit übertragen. Tatsächlich besitzt ω eine enorme Vielfalt verschiedenster expliziter Ordnungen, von denen natürlich die expliziten Wohlordnungen besonders interessant sind.

Wir schreiben $a \sim_e b$, wenn eine explizite Bijektion von a auf b existiert. So ist etwa $\mathfrak{P}(\omega) \sim_e {}^{\omega}2$. Viele explizite Bijektionen liefert der Cantor–Bernsteinsche Äquivalenzsatz. Sein Beweis zeigt $a \sim_e b$, wenn nur explizite $f : a \xrightarrow{\text{inj}} b$, $g : b \xrightarrow{\text{inj}} a$ existieren. Deswegen ist z.B. $\omega \sim_e \omega \times \omega$ und ${}^{\omega}2 \sim_e {}^{\omega}\omega$ (Übung 1). Wichtig ist in diesem Zusammenhang $\mathbb{R} \sim_e \mathfrak{P}(\omega)(\sim_e {}^{\omega}2 \sim_e {}^{\omega}\omega)$ (Übung 4). $\mathbb{R}$ lässt sich daher durch jede dieser Mengen explizit repräsentieren und man könnte $\mathbb{R}$ auch durch jede dieser Mengen direkt definieren.

Sei $\mathbb{E}$ irgendeine nichtleere explizit definierte Menge, d.h. $\mathsf{ZFC} \vdash \exists v\, v \in E$. So ist mittels AC sicher $E \neq \emptyset$ beweisbar, wenn E die vollkommen explizit definierte Menge aller Wohlordnungen auf $\mathfrak{P}(\omega)$ ist. Die Frage entsteht, ob in diesem Falle wenigstens ein Element $e \in E$ explizit definiert werden kann. Es sei erwähnt, dass hier viel weniger verlangt wird als die konstruktive Belegung von Existenzaussagen im Sinne einer konstruktiven Mathematik. Dennoch ist die Antwort sehr konkret *nein*: Obwohl AC Wohlordnungen von $\mathfrak{P}(\omega)$ garantiert, lässt sich keine einzige Wohlordnung von $\mathfrak{P}(\omega)$ explizit definieren ([Fefermann 1965]). Das wäre natürlich auch kaum zu erwarten. Denn eine explizite Beschreibung einer solchen Wohlordnung würde grob gesagt der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese widersprechen.

Bereits Cohen hatte im Jahre 1963 gezeigt, dass in ZF weder die Existenz einer Wohlordnung für $\mathbb{R}$ $(\sim \mathfrak{P}(\omega))$ noch die irgendeiner totalen Ordnung für ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$ $(\sim \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega)))$ bewiesen werden kann. Natürlich können alle diese Mengen in ZFC sogar wohlgeordnet werden.

Die Hypothese des Vorhandenseins einer expliziten Wohlordnung für $\mathfrak{P}(\omega)$ hat eine Reihe interessanter Konsequenzen. Z.B. könnte dann eine Ordnung auf ${}^{\mathbb{R}}2$ explizit definiert werden (Übung 9). Es genügt also, die Existenz einer expliziten Ordnung auf ${}^{\mathbb{R}}2$ zu widerlegen um das Nichtvorhandensein einer expliziten Wohlordnung von $\mathbb{R}$ zu bestätigen.

Natürlich garantiert AC nicht nur eine Ordnung, sondern sogar eine Wohlordnung für die Menge ${}^{\mathbb{R}}2$; aber wie immer man sich bemüht, es wird nicht gelingen, auch nur eine Ordnung auf der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ explizit zu konstruieren. Andererseits sind explizite Ordnungen auf $\mathbb{R}$ (also Ordnungen der Menge aller Funktionen $f : \omega \to \{0, 1\}$) in großer Fülle vorhanden und viele lassen sich relativ leicht explizit beschreiben. Wie gesagt, dies gilt nicht mehr für die durch AC garantierten Wohlordnungen von $\mathbb{R}$.

Es hat den Anschein, als könnte man ohne AC die Existenz eines Objektes in einem explizit definierten Bereich E gar nicht beweisen, wenn dessen Existenz in nichtexpliziter Weise durch AC erst gesichert wird. Es erhebt sich also die Frage: Kann wenigstens ein explizit definiertes Beispiel $e \in E$ dann angegeben werden, wenn $\exists x\, x \in E$ *ohne* AC, also schon in ZF beweisbar ist. Kurz, ist AC allein verantwortlich für die Existenz nicht explizit definierbarer und damit höchst nichtkonstruktiver Objekte?

Leider ist das nicht so. Die folgende durchaus explizit definierte Menge liefert trotz ihres künstlichen Charakters ein Gegenbeispiel. Es sei

$$E_0 = \{v \mid (\exists x\, x \in W\mathbb{R} \to v \in W\mathbb{R})\} \wedge (\neg\exists x\, x \in W\mathbb{R} \to v \in 0\mathbb{R})$$

wobei $W\mathbb{R}$ und $0\mathbb{R}$ die (expliziten) Mengen aller Wohlordnungen bzw. Ordnungen von $\mathbb{R}$ sind. In ZF ist $\exists v\, v \in E_0$ offenbar beweisbar. Aber nicht einmal in ZFC kann $r \in E_0$ für irgendein explizit definiertes r bewiesen werden, also erst recht nicht in ZF. Ein explizites Beispiel $r \in E_0$, nämlich z.B. die übliche Anordnung von $\mathbb{R}$ könnte man ja angeben, falls $\neg\exists x\, x \in W\mathbb{R}$ in ZF beweisbar wäre; aber das ist unbeweisbar. Denn nach Gödel ist ZFC und damit auch $\mathsf{ZF} + \exists x\, x \in W\mathbb{R}$ relativ konsistent zu ZF.

Man könnte ferner den Eindruck haben, dass für eine Menge E, für die $\exists x\, x \in E$ ohne AC unbeweisbar, mit AC aber beweisbar ist, kaum Aussicht besteht, ein Existenzbeispiel explizit anzugeben. Aber auch das ist nicht so. Man betrachte z.B. die explizit definierte Menge

$$E_1 = \{r \in \mathbb{R} \mid (\exists w \in W\mathbb{R}) r \in \mathit{fld}\, w)\}.$$

In ZF ist $\exists x\, x \in E_1$ unbeweisbar; dagegen ist $\mathsf{ZFC} \vdash E_1 = \mathbb{R}$. Und natürlich haben wir dann auch ein explizites Beispiel eines Elements aus E_1, etwa die Zahl 0. Man sieht an diesen Beispielen, dass nicht nur AC, sondern auch die zweiwertige Logik zu gewissen nichtkonstruktiven Aspekten der Mengenlehre beiträgt.

Übungen

1. Man zeige ${}^{\omega}2 \sim_e {}^{\omega}\omega$.

   Hinweis. ${}^{\omega}\omega \subseteq \mathfrak{P}(\omega \times \omega) \sim_e \mathfrak{P}(\omega) \sim_e {}^{\omega}2$. Also existiert explizites $f : {}^{\omega}\omega \xrightarrow{\text{inj}} {}^{\omega}2$. Beachte Satz 3.4.1.

2. Man zeige $\omega \sim_e \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\omega)$ $(= \{v \subseteq \omega \mid v \text{ endlich}\})$.

   Hinweis. Zu $\{z_0, \ldots, z_n\} \subseteq \omega$ betrachte $1 + \bigcup_{i=0}^{n} z_i \cdot 2^i \in \omega$. Beachte Satz 3.4.1.

3. Strukturen a, b seien *explizit isomorph*, $a \simeq_e b$, wenn ein explizit definierter Isomorphismus $f : a \simeq b$ existiert. Seien a, b explizite abzählbare dicht geordnete Mengen ohne Randelemente. Man zeige $a \simeq_e b$.

Hinweis. Man expliziere die bekannte Konstruktion des Isomorphismus.

4. $\mathbb{R}$ ist die Menge aller $r : \omega \to \mathbb{Z}$ (= Menge der ganz-rationalen Zahlen) mit $r(i) \in \{0, 1\}$ für $i > 0$ und $(\forall i \in \omega)(\exists j > i)\, r_j = 0$. Man notiert r in der Weise $r = r_0, r_1 r_2 r_3 \ldots$ (Dualbruchdarstellung mit Ausschluss der Einerenden). Sei $<$ die übliche Anordnung auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{E} = \{r \in \mathbb{R} \mid (\exists i \in \omega)(\forall j > i) r_j = 0\}$ (die Menge der endlichen oder abbrechenden Dualzahlen). Man zeige $(\mathbb{E}, <)$ ist (explizit) abzählbare dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $(\mathbb{R}, <)$ ist die stetige Vervollständigung von $(\mathbb{E}, <)$.
5. Sei $\langle 0, 1\rangle := \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$. Zeige $(\langle 0, 1\rangle, <) \simeq_e (\mathbb{R}, <)$.

   Hinweis. Sei $\mathbb{E}_I := \mathbb{E} \cap \langle 0, 1\rangle$. Dann $(\mathbb{E}, <) \simeq_e (\mathbb{E}_{\langle 0,1\rangle}, <)$, Übung 3. Dieser Isomorphismus hat eine explizite Fortsetzung auf die stetigen Vervollständigung.
6. Man zeige $\mathfrak{P}(\omega) \sim_e \mathbb{R}$.

   Hinweis. $\langle 0, 1\rangle \sim_e \mathbb{R}$.
7. Zeige $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \sim_e \langle 0, 1\rangle$ (und damit $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$).

   Hinweis. Konstruiere Paarungsfunktion $p : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ durch „Mischen“ der Dualziffern.
8. Man konstruiere explizite Bijektionen zwischen ${}^{\mathbb{R}}2$, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.
9. Es existiere eine explizite Wohlordnung von a. Man konstruiere daraus eine explizite Ordnung von $\mathfrak{P}(a)$.

   Hinweis. Verallgemeinerung der Konstruktion von $<_\ell$ auf $\mathfrak{P}(\omega)$.

4.3 Schwache Versionen von AC – Alternativen

Um die Ausführungen dieses Abschnitts in ihren Einzelheiten zu verstehen, wird der Anfänger nicht umhin kommen, weitergehende mengentheoretische Literatur zu konsultieren, weil wir über viele Resultate nur berichten.

AC ist unabhängig von den ZF-Axiomen, d.h. weder $\mathsf{ZF} \vdash \neg\mathsf{AC}$ ([Gödel 1938]) noch $\mathsf{ZF} \vdash \mathsf{AC}$ ([Cohen 1963]), so dass sich der Vergleich mit dem Parallelaxiom in der Geometrie aufdrängt. Analog wie dort müssen in einer Basistheorie Modelle für $\mathsf{ZFC} = \mathsf{ZF} + \mathsf{AC}$ und für $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}$ konstruiert werden. Das erstere ist vergleichsweise einfach durch Konstruktion eines inneres Modell für ZFC in der Basistheorie ZF (Gödel). Dagegen erforderte die Konstruktion eines Modells für $\mathsf{ZF} + \neg\mathsf{AC}$ durch Cohen einen völlig neuen Ansatz.

Abgesehen von dieser Gemeinsamkeit mit der Geometrie hinkt der Vergleich in manchen Hinsichten. Während man z.B. lange Zeit versuchte, das Parallelaxiom aus den übrigen Axiomen zu beweisen, war die Unabhängigkeit von AC von Anbeginn an plausibel, obwohl die endgültige Lösung der Unabhängigkeitsfrage den Anstrengungen der Mathematiker lange Zeit standhielt. Dies ist natürlich kein wesentlicher Aspekt des Unterschieds zum Parallelenaxiom. Vielmehr besteht dieser in folgendem. Während nichteuklidische Geometrie eine durchaus wirklichkeitsnahe Idee ist, gibt es bislang keine Gründe, einer Mengenlehre mit Axiomen, welche dem Auswahlaxiom widersprechen, den gleichen Rang einzuräumen wie ZFC. Jedenfalls nicht, wenn man beabsichtigt, den intuitiven Mengenbegriff im Cantorschen Sinne zu erfassen und nicht einen andersartigen Begriff zu definieren, oder unterschiedliche Verständnisse des Begriffs einer Menge gelten zu lassen.

Davon wird nicht die Tatsache betroffen, dass man gelegentlich gewisse natürliche Fragmente von ZF betrachtet, die gar nicht auf die Erfassung aller Mengen gerichtet sind, sondern Eigenschaften spezieller Mengen axiomatisieren. Wichtiges Beispiel ist das System KP (Kripke-Platek), das die Eigenschaften sogenannter *zulässiger* Mengen (admissibles) erfaßt. Ein anderes Beispiel ist die im nächsten Kapitel vorgestellte Theorie $\mathsf{ZFC}_{\text{fin}}$ der erblich endlichen Mengen. Um beim geometrischen Vergleich zu bleiben, wäre etwa die Theorie der projektiven Ebenen zu nennen, die sich von der eigentlichen Geometrie ähnlich weit entfernt wie KP von der Mengenlehre.

Bevor man Alternativen oder abgeschwächte Versionen von AC betrachtet, ist es natürlich das Vernünftigste zu fragen, wie weit man in der Mengenlehre ZF, d.h. ohne den Gebrauch von AC, überhaupt kommt. Die Antwort auf diese Frage hängt wesentlich von dem verfolgten Interesse ab. Aber generell lässt sich sagen, dass man sehr weit gelangt. Nicht nur die bisher in dieser Ausarbeitung (außer in diesem Abschnitt) erzielten Ergebnisse sind unabhängig von AC, sondern auch die elementaren Theorien der klassischen Zahlbereiche, sowie die Theorie der Ordinalzahlen. Dagegen ergeben sich durch ersatzloses Streichen von AC Schwierigkeiten bzgl. der topologischen Eigenschaften reeller Zahlen.

Auch die Theorie der Kardinalzahlen erhält ohne AC ein völlig anderes Gesicht. Um dies wenigstens anzudeuten sei erwähnt, dass sich Kardinalzahlen als Mächtigkeitsmaße für alle Mengen auch ohne AC definieren lassen. Ein Operator $|x| : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ heiße eine *Kardinalzahlfunktion*, wenn $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$ für alle $x, y \in \mathcal{V}$. Eine solche erhält man, indem einer Menge x die Menge der zu x gleichmächtigen Mengen von minimalem Rang zugeordnet wird. Außerdem gilt $x \sim |x|$ dann, falls x wohlgeordnet werden kann, so dass z.B. für endliche und abzählbare Mengen x die Kardinalzahl $|x|$ auch ein Repräsentant der Mächtigkeitsklasse $\mathcal{V}^{(x)}$ ist. Leider lässt sich ohne AC nachweislich nicht erreichen, dass $x \sim |x|$ für alle x (Pincus 1974).

Mit AC sind die Kardinalzahlen $|x|$ nicht nur geordnet, sondern sogar wohlgeordnet. Ohne AC dagegen können die seltsamsten Dinge passieren. Die Kardinalzahlen sind nur noch partiell geordnet. Darüber hinaus lässt sich zu jeder p.o. Struktur ein ZF–Modell konstruieren, dessen transfinite Kardinalzahlen gerade die vorgegebene Struktur haben (Jech 1975).

Schon Cohens Modell enthält eine unendliche Menge D reeller Zahlen ohne abzählbare Teilmengen (eine sogenannte *Dedekind–Menge*). Man kann unschwer zeigen, D hat einen Häufungspunkt p. Aber es gibt offenbar keine Folge $(x_i)_{i \in \omega}$ mit $x_i \in D \setminus \{p\}$, die gegen p konvergiert, sonst hätten wir ja eine abzählbare Teilmenge. Mit anderen Worten, die übliche Umgebungs–Definition des Begriffs Häufungspunkt ist ohne AC nicht äquivalent mit der bekannten Folgen–Definition.

Man benötigt für den Äquivalenzbeweis der beiden Definitionen eines Häufungspunktes AC nicht in voller Allgemeinheit, sondern es genügt hierzu das *Axiom der abzählbaren Auswahl*

AC_ω: Es existiert eine Auswahlfunktion auf abzählbarem a.

Diese Aussage ist gewissermaßen der erste Schritt von dem in ZF beweisbaren endlichen Fall in Transfinite. AC_ω ist erheblich schwächer als AC (siehe unten), aber in ZF unbeweisbar. Man betrachtet AC_ω nicht aus dem Grunde, weil es etwa plausibler wäre als AC, sondern aber aus den beiden folgenden Gründen.

Erstens benötigt man in weiten Teilen der Analysis nur AC_ω und auch hier nur für Mengensystem reeller Zahlen – z.B. reicht AC_ω sicher für den Nachweis, dass die Vereinigung abzählbarer vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist und dass jede unendliche Menge eine abzählbare Teilmenge besitzt (Übung 1) – zweitens ist AC_ω jedenfalls in seinen die reellen Zahlen betreffenden Formen eine Folge der bislang interessantesten Alternative zu AC, dem *Axiom der Determiniertheit*

$$\mathsf{AD}: \quad \text{Jede Menge } a \subseteq \mathbb{R} \text{ ist determiniert.}$$

Zur Erläuterung von AD identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit ${}^\omega\omega$. Sei $a \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Wir betrachten ein Zweipersonenspiel Γ_A mit den Spielen I und II wie folgt:

I wählt ein $n_0 \in \omega$ und II antwortet mit der Wahl eines $m_0 \in \omega$. Daraufhin wählt I ein $n_1 \in \omega$, II ein $m_2 \in \omega$, usw. Das Spielergebnis ist eine reelle Zahl $\langle n_0, m_0, n_1, m_1, \ldots \rangle$. I hat gewonnen, wenn $r \in A$; andernfalls hat II gewonnen. A heiße *determiniert*, wenn entweder I oder aber II eine Gewinnstrategie[1)] in Γ_A hat.

AD widerspricht AC; denn AD impliziert u.a. die Messbarkeit jeder Menge $s \subseteq \mathbb{R}$ im Sinne von Lebesgue, während sich mittels einer Wohlordnung von $\mathbb{R}$ leicht nicht messbare Mengen konstruieren lassen (Übung 5). AD ist also sogar mit der Wohlordnungsfähigkeit von $\mathbb{R}$ unverträglich.

Zunächst ist zu bemerken, dass AD – ebenso wie AC – durch Extrapolation aus dem Endlichen bekannter Verhältnisse ins Unendliche entstanden ist. Betrachtet man nämlich statt Γ_A ein k–rundiges Spiel mit dem Ergebnis $\langle n_0, m_0, \ldots, n_k, m_k \rangle$, so hat für jedes $A \subseteq {}^{2K}\omega$ tatsächlich I oder II eine Gewinnstrategie. Dies ist ein klassischer Satz der Spieltheorie. Wir zeigen, dass AD z.B. folgende Version von AC_ω impliziert:

$\mathsf{AC}_\omega^{\mathbb{R}}$: Sei $(A_i)_{i \in \omega}$ eine Familie mit $\emptyset \neq A_i \subseteq \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Auswahlfunktion ζ mit $\zeta(A_i) \in A_i$ für alle $i \in \omega$.

Denn sei $i \in \omega$ gegeben. Wenn I $\langle a_0, a_1, \ldots \rangle$ und II $\langle b_0, b_1, \ldots \rangle$ spielt, habe II gewonnen, falls $\langle b_0, b_1, \ldots \rangle \in A_i$. I hat keine Gewinnstrategie in diesem Spiel, da nur die Züge von II ausschlaggebend sind. Also hat II eine Gewinnstrategie σ und es sei $\zeta(A_i) = \langle m_0, m_1, \ldots \rangle$ Spielergebnis von II gemäß σ, wenn I die Zugfolge $\langle i, 0, 0, \ldots \rangle$ spielt. Durch geeignete Kodierung lassen sich auch höhere Formen der Auswahl (z.B. aus abzählbaren Familien offener Mengen) aus AD herleiten, die z.B. für die abzählbare Additivität des Lebesgue–Maßes wichtig sind. Siehe etwa Jech (1973). AD bewahrt sozusagen nur den unverzichtbaren Teil von AC. Seine Unverträglichkeit

---

[1)] I hat eine *Gewinnstrategie*, wenn eine auf der Menge $\mathbb{E}$ aller endlichen Folgen natürlicher Zahlen erklärte Funktion σ existiert, so dass I das Spiel Γ_A gewinnt, falls I gemäß der Strategie σ spielt, d.h. in der k–ten Runde das Element $a_{k+1} = \sigma(b_0, \ldots, b_k)$ wählt. Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn a_{k+1} nur von den vorherigen Zügen des Gegners abhängt, weil schon $a_i = \sigma(b_0)$ usw. Analog definiert man II hat eine Gewinnstrategie.

mit dem vollen Auswahlaxiom verursacht natürlich völlig andersartige Verhältnisse im Universum. Diese sind in mancher Hinsicht allerdings einfacher und übersichtlicher. Das betrifft vor allem die sogenannte deskriptive Mengenlehre, die sich mit der Beschreibung und Klassifikation der Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschäftigt. Siehe hierzu etwa [Deiser 2002]. Wir erwähnen schon die Messbarkeit jeder Menge $A \subseteq \mathbb{R}$; außerdem ist A entweder abzählbar oder hat die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$. Diese Tatsachen waren ursprünglich die Ursache für das Interesse an AD.

Gewisse Abschwächungen von AD sind mit ZFC verträglich. Das Beste in dieser Hinsicht ist die relative Konsistenz von ZFC mit der Determiniertheit aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, die aus $\mathbb{R}$ im Sinne von Gödel konstruktibel sind.

ZFD = ZF + AD ist viel stärker als ZFC, weil sogar die Konsistenz von ZFC in ZFD beweisbar ist. Daher lässt sich die relative Konsistenz von AD zu ZF sicher nicht beweisen. Sonst könnte man die Konsistenz von ZF in ZF beweisen, was unmöglich ist wie schon an anderer Stelle gesagt wurde. Jedoch ist ZFD nach jüngst erzielten Ergebnissen von Woodin u.a. relativ konsistent zu ZFC plus einer recht bescheidenen Annahme über große Kardinalzahlen. Dagegen sind einige interessante Konsequenzen von AD konsistent mit ZF. Dazu gehört AC_ω zusammen mit der Messbarkeit aller Teilmengen von $\mathbb{R}$ (Solovay 1970). Es scheint, dass AD zunehmende Bedeutung in der Mengenlehre und damit auch in den Grundlagen der Mathematik gewinnt.

Neben AC_ω gibt es noch weitere, in gewissem Sinne natürliche Abschwächungen von AC, z.B. das *Axiom der abhängigen Auswahl* (Dependent Choice).

DC: Sei (b, r) eine Struktur mit $(\forall x \in b)(\exists y \in b)xry$. Dann existiert zu $x_0 \in b$ eine ω–Folge $x_0 r x_1 r \ldots$ mit $x_n \in b$ für alle $n \in \omega$.

Diese Aussage ist erheblich schwächer als AC, zugleich aber viel stärker als AC_ω (Übung 4). Eine häufig betrachtete Abschwächung von AC ist die Aussage, dass jeder Filter einer Booleschen Algebra zu einem Ultrafilter erweitert werden kann (Übung 7 in **4.1**). Diese Aussage hat viele natürliche äquivalente Formulierungen. Wir erwähnen insbesondere den Kompaktheitssatz der Logik, wonach eine (beliebige, nicht notwendig abzählbare) Formelmenge einer Sprache der 1. Stufe ein Modell besitzt, falls nur jede endliche Teilmenge ein Modell hat.

Mit diesem Kompaktheitssatz lassen sich viele Aussagen aus dem Endlichen in das Unendliche übertragen. Ein instruktives Beispiel ist die (in ZF unbeweisbare) Ordnungsfähigkeit einer beliebigen Menge a. Jedoch lässt sich so nicht zeigen, dass jede Menge auch wohlgeordnet werden kann. Natürlich lässt sich jede endliche Menge ganz ohne AC wohlordnen. Dies lässt sich mittels des erwähnten Kompaktheitssatzes deswegen nicht auf beliebige Mengen übertragen, weil der Begriff der Wohlordnung keine durch eine Formel der 1. Stufe definierbare Eigenschaft ist.

Übungen

1. Zeige mit AC_ω: Jedes unendliche b hat eine abzählbare Teilmenge.

   Hinweis. $J_n := \{f \mid f : n^{\mathsf{S}} \xrightarrow{\text{inj}} b\} \neq \emptyset$ für $n \in \omega$. Sei $f_n \in J_n$ gemäß AC_ω. Dann ist $\bigcup\{\mathit{ran}\, f_n \mid n \in \omega\}$ eine unendliche abzählbare Teilmenge von b.

2. Sei $(b, <)$ überabzählbare wohlgeordnete Menge (deren Existenz sichert das Lemma von Hartogs auch ohne AC). Man zeige mit AC_ω, es gibt keine abzählbae mit b konfinale Teilmenge $a \subseteq b$.

3. Zeige mit DC: Eine Menge a_0 ist nicht fundiert genau dann, wenn eine ω–Folge $(a_n)_{n \in \omega}$ mit $\ldots a_2 \in a_1 \in a_0$ existiert.

4. Man zeige auf der Basis von ZF: DC impliziert AC_ω.

   Hinweis. Sei $a = \{a_i \mid i \in \omega\}$, o.B.d.A. $a_i \neq 0$. sowie b Menge aller Folgen $(x_i))_{i \leqslant n}$ mit $x_i \in a_i$. Für $f, g \in b$ sei frg genau im Falle $f = (x_i))_{i \leqslant n}$, $g = (x_i))_{i \leqslant n}$. Sei $x_0 \in a_0$, $f_0 = \langle x_0 \rangle$, sowie $f_0 r f_1 r \ldots$ gemäß DC, und $\zeta a_n = f_n(n)$.

5. Für $r, s \in [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ sei $r \approx s$, falls $r - s \in \mathbb{Q}$. Sei A eine Auswahlmenge der $\approx$ entsprechenden Partition. Man zeige, A ist nicht messbar.

   Hinweis. Für $r \in \mathbb{Q}$ sei $A_r = \{x + r \mid x \in A\}$. $(A_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ ist Partition von $\mathbb{R}$ und alle A_r haben gleiches Maß. Unterscheide, ob dieses $= 0$ oder $\neq 0$.

6. Man zeige, DC ist äquivalent zu folgender Abschwächung

   DC': Sei $b \neq 0$ und $r \in \mathcal{R}el$ mit $(\forall x \in b)(\exists y \in b) rry$: Dann existiert eine Folge $(y_i)_{i \in \omega}$ mit $y_0 r y_1 r \ldots$.

   Hinweis. $\mathsf{DC}' \to \mathsf{DC}$: Sei (a, r) und x_0 gemäß DC gegeben,

   $$b := \{x \in a \mid (\exists n \in \omega_+)(\exists x_1 \ldots \exists x_n \in a)(x_0 r x_1 r \ldots r x_n \wedge x_n = x\}.$$

   b genügt Voraussetzung von DC'. Sei $(y_i)_{i \in \omega}$ gemäß DC' gewählt. Dann existieren $n \in \omega$ und $x_1, \ldots, x_n \in a$ mit $x_0 r x_1 r \ldots x_n$ und $x_n = y_0$. Setze $x_{n+i} = y_i$.

7. Man zeige DC ist (in ZF) auch äquivalent zu

   DC'': Ist $s \in \mathcal{R}el$ nicht fundiert, so existiert eine Folge $(x_i)_{i \in \omega}$ mit $\ldots x_2 s x_1 s x_0$.

   Hinweis. Zeige $\mathsf{DC}'' \to \mathsf{DC}'$. Betrachte $s = r^{-1}$.

Kapitel 5

Ordinalzahlen und Rekursionen

Natürliche Zahlen offenbaren bei näherem Hinsehen zwei Aspekte ihres Gebrauchs: einen kardinalen und einen ordinalen. Ersterer äußert sich in deren Rolle als Anzahlmaße endlicher Mengen; letzterer in der Festlegung einer Reihenfolge der Elemente einer mit den ersten n natürlichen Zahlen abgezählten Menge. Jede Aufzählung von a erzeugt eine bestimmte Ordnung auf a, obwohl es darauf nicht ankommt, wenn es um die bloße Anzahl der Elemente von a geht. Der Unterschied zwischen beiden Aspekten tritt nur selten deutlich in Erscheinung, weil unterschiedliche Aufzählungen derselben endlichen Menge isomorph sind.

Ganz anders verhalten sich in dieser Hinsicht unendliche Mengen. Eine der wesentlichen Leistungen Cantors ist die Überwindung der Schwierigkeiten, die sich bei der Übertragung entsprechender Begriffe auf unendliche Mengen ergeben. Seine zweifellos genialste Entdeckung war der Begriff der wohlgeordneten Menge als der angemessenen Verallgemeinerung endlicher Ordnungen. Während verschiedene Ordnungen derselben endlichen Menge, die in jedem Falle auch Wohlordnungen sind, isomorph sind, geht diese Eigenschaft bei unendlichen Mengen verloren. Verschiedene Isomorphietypen von Wohlordnungen einer unendlichen Menge entsprechen verschiedenen Ordinalzahlen; anders formuliert, man kann dieselbe unendliche Menge auf wesentlich verschiedene Weise „aufzählen“. Dennoch sollte die Menge natürlich nur eine Kardinalzahl als Mächtigkeitsmaß haben.

Man muss in Kauf nehmen, dass sich natürliche Zahlen in zwei verschiedenen Weisen ins Transfinite fortsetzen, nämlich zu den transfiniten Ordinalzahlen und den transfiniten Kardinalzahlen. Mit den Ordinalzahlen zählt man Mengen, mit den Kardinalzahle misst man deren Umfang. Anders als im endlichen Falle kann eine unendliche Menge jedoch sehr unterschiedlich gezählt werden. Aber nicht nur zwischen diesen beiden Zahlenarten selbst, sondern auch zwischen den ordinalen und kardinalen Verallgemeinerungen der elementaren arithmetischen Operationen muss strikt unterschieden werden. Addition, Multiplikation und Potenzierung natürlicher Zahlen setzen sich auf zweierlei Weise ins Transfinite fort. Beide Arten transfiniter Zahlen sind zwar in erster Linie für die innere Gestaltung der Mengenlehre wichtig, haben aber auch vielfältige Anwendungen in der Mathematik.

Wir befassen uns zuerst mit den natürlichen Zahlen und ihren Verallgemeinerungen unter dem Gesichtspunkt des Ordnens, den Ordinalzahlen. Die Ordinalzahltheorie ist zum Großteil unabhängig von AC. Wir machen der Einfachheit halber von Anfang an vom Fundierungsaxiom Gebrauch, obwohl man die Theorie auch unabhängig davon entwickeln könnte. Manche Autoren verfahren so, meistens mit dem Blick auf das innere ZFC-Modell der fundierten Mengen über das in Kapitel **2** ausführlich berichtet wurde. Ordinalzahlen sind stets fundiert, unabhängig davon ob AF zugrunde gelegt wird oder nicht, so dass der Definition von Ordinalzahl bei Abwesenheit von AF noch deren Fundiertheit hinzugefügt werden müsste.

In dieser Darstellung gelangt nur ein verhältnismäßig bescheidener Teil der ausgebauten Theorie transfiniter Zahlen zur Darstellung. Wir beschränken uns im Wesentlichen auf Anwendungen der Ordinalzahlen in der Mengenlehre selbst.

Im Prinzip müssen Ordinalzahlen nur eine einzige Bedingung erfüllen, und zwar die, dass jede Isomorphieklasse wohlgeordneter Mengen genau eine Ordinalzahl als Repräsentanten enthält. Diese Bedingung erfüllt die einfachste und direkteste Konstruktion der Ordinalzahlen nach von Neumann. Speziell sind alle $n \in \omega$ Ordinalzahlen (und Kardinalzahlen). ω selbst ist die erste transfinite Ordinalzahl und zugleich die erste transfinite Kardinalzahl. Jede Ordinalzahl ist identisch mit der Menge aller ihrer Vorgänger, was immense technische Vorteile hat.

Die Klasse On aller Ordinalzahlen verhält sich in vielen Hinsichten ähnlich wie die Menge ω. Induktive Beweise verlaufen nahezu analog. Von größter Bedeutung ist das Rekursionstheorem für On, das ähnlich wie der Rekursionssatz für ω in **5.1** die Konstruktion rekursiv definierter Operationen auf On rechtfertigt. Ersterer steht zu letzterem in fast demselben Verhältnis wie der Satz von Cantor–Bernstein für Mengen zu dem entsprechenden Satz für Klassen. Der Leser wird deswegen viel weniger Mühe haben, das Rekursionstheorem für On nicht nur selbständig anzuwenden, sondern auch in seiner logischen Struktur voll zu durchschauen.

5.1 Der Rekursionssatz für ω

Wir hatten die Gesamtheit der naiv gegebenen natürlichen Zahlen durch die Menge ω modelliert und den Induktionssatz für ω bewiesen, der das *Beweisverfahren* durch Induktion wiederspiegelt. Rekursion hingegen ist ein *Definitionsverfahren* für Funktionen auf den natürlichen Zahlen. Der ω-Rekursionssatz unten reflektiert in der Theorie das naive Definitionsverfahren für Funktionen auf $\mathbb{N}$, das man in diesem Zusammenhang am besten das *Definitionsverfahren durch Metarekursion* nennt. So wurde z.B. der Term $\{x_0, \ldots, x_n\}$ durch Metarekursion über n erklärt, indem gesagt wurde, es sei $\{x_0, \ldots, x_{n+1}\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x_{n+1}\}$. Grob gesagt berechnet sich der Wert einer rekursiv definierten Funktion an einer Stelle durch Rückgriff der Werte dieser Funktion an vorhergehenden Stellen. Ein simples Beispiel ist die Folge von Fibonacci, die definiert ist durch

$$(*) \quad f(0) = f(1) = 1 \quad ; \quad f(n) = f(n-1) + f(n-2) \text{ für } n \geqslant 2.$$

Wenn wir hier statt der naiven natürlichen Zahlen die Menge ω betrachten und behaupten, dass $(*)$ genau eine Funktion $f : \omega \to \omega$ definiert, so bedarf dies deshalb eines Beweises, weil der Funktionsbegriff im Rahmen der axiomatisch gefassten Mengenlehre rigoros präzisiert worden ist. Wir erinnern daran, dass $\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ eine endliche Folge f der Länge n mit $f(i) = a_i$ bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass dieser Ausdruck für $n = 0$ die leere Funktion bedeutet.

Die Existenz von Funktionen, die auf ganz ω erklärt sind und Rekursionsgleichungen ähnlich wie in $(*)$ genügen sollen, wird in allgemeiner Form gesichert durch den auf [Dedekind 1888] zurückgehenden

Satz 1.1 (ω-Rekursionssatz). *Sei F ein auf $\mathcal{V}$ überall definierter Operator. Dann gibt es genau eine Funktion f mit $\operatorname{dom} f = \omega$, so dass für alle $n \in \omega$*

$$(\rho) \quad f(n) = F(f \restriction n).$$

Man kann (ρ) wegen $f \restriction 0 = \emptyset$ und $f \restriction (n+1) = \langle f(0), \ldots, f(n)\rangle$ auch in der Form

$$(\rho') \quad f(0) = F(\emptyset) \quad ; \quad f(n+1) = F(\langle f(0), \ldots, f(n)\rangle)$$

notieren. In den allereinfachsten Rekursionsgleichungen ist $f(n+1)$ nur abhängig von $f(n)$. In $(*)$ sind zur die beiden letzten vorangehenden Werten betroffen. (ρ') zeigt, dass $f(n+1)$ vom gesamten vorherigen Verlauf der Funktion abhängen kann, weswegen man auch von Wertverlaufsrekursion spricht. Um zu erkennen, dass $(*)$ ein Anwendungsfall von (ρ) ist, definieren wir einen geeigneten Operator F. Ist a

endliche Folge natürlicher Zahlen der Länge $\geqslant 2$, so sei $F(a)$ die Summe der letzten und der vorletzten Komponente von a; im übrigen sei $F(a) = 1$. Insbesondere ist dann $f(0) = F(\emptyset) = 1$ und $f(1) = F(\langle f(0)\rangle) = 1$ und man erkennt leicht, dass $(*)$ der Sonderfall von (ρ') mit diesem F ist. Die naiv definierte Folge von Fibonacci erweist sich nach Satz 1.1 demnach als mengentheoretische Funktion.

Oft wird n als weitere Variable in F explizit erwähnt. Dies ändert nichts am Beweis unten. Diese Nennung ist eigentlich unnötig, denn n kann aus dem Argument $f\restriction n$ wiedergewonnen werden, als die Länge der Folge $f\restriction n$.

Beweis von Satz 1.1. Induktion zeigt, dass es höchstens eine der Gleichung (ρ) genügende Funktion geben kann. Denn sind f, g Funktionen, die (ρ) oder gleichwertig (ρ') erfüllen, so ist sicher $f(0) = F(\emptyset) = g(0)$. Der zweite Teil von (ρ') zeigt dann auch $f(n+1) = g(n+1)$, falls $\langle f(0), \dots, f(n)\rangle = \langle g(0), \dots, g(n)\rangle$. Existenzbeweis: Sei $\mathcal{F}$ die Klasse aller Funktionen f, so dass *dom* f echter Anfang von ω ist und (ρ) gilt für alle $n \in$ *dom* f. Diese f seien die *partiellen Lösungen* von (ρ) genannt. $\mathcal{F}$ ist bez. Inklusion eine Funktionenkette, denn $f, g \in \mathcal{F}$ stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein, was man genauso zeigt wie die Eindeutigkeit einer globalen Lösung von (ρ). Daher ist nach Übung 8 in **3.1** $f := \bigcup \mathcal{F}$ eine Funktion, die offensichtlich auch wieder (ρ) erfüllt. Wir behaupten, *dom* $f = \omega$. Denn andernfalls gäbe es ein kleinstes $n \in \omega \setminus$ *dom* f und man könnte f um das Paar $(n, F(f))$ erweitern, so das die Gültigkeit von (ρ) erhalten bleibt. Dies wiederspricht der Definition von f als dem Supremum aller partiellen Lösungen von (ρ). Also ist f in der Tat die gesuchte globale Lösung. ❏

Obwohl nicht unmittelbar sichtbar, ist in diesem Beweis das Ersetzungsaxiom AR wesentlich involviert, was nicht einmal schwierig zu nachzuweisen ist (Übung 6). Nur wenn etwa wie in Beispiel 2 unten die „Zielmenge“ der rekursiv definierten Funktion vorgegeben ist, wird AR nicht benötigt.

Zunächst einige weitere Beispiele für vielfältige Anwendungen von Satz 1.1. Man beachte, dass der Operator F und damit auch f, von Parametern abhängen kann.

Beispiel 1. Sei a eine beliebig vorgegebene Menge und f rekursiv definiert durch $f(0) = a$; $f(n+1) = \bigcup f(n)$. Also $f(1) = \bigcup a$, $f(2) = \bigcup\bigcup a$ usw. (Hier wäre ein entsprechender Operator für (ρ) gegeben durch $F(\emptyset) = a$, $F(x) = \bigcup x$ sonst.) Dann ist $b := \bigcup\{f(i) \mid i \in \omega\}$ transitive Obermenge von a. Denn sei $x \in b$, etwa $x \in f(n)$. Dann ist $x \subseteq \bigcup f(n) = f(n+1) \subseteq b$. Man zeigt darüber hinaus leicht, dass b die kleinste transitive Obermenge von a, also die transitive Hülle a^{tc} von a ist.

Beispiel 2. Die Addition auf ω ist definiert durch die Rekursionsgleichungen

$$(*)\quad m + 0 = m \quad ; \quad m + n^{\mathrm{S}} = (m+n)^{\mathrm{S}}.$$

Um klarer zu erkennen, dass es sich hierbei wieder um einen Spezialfall von (ρ') handelt, schreibe man $(*)$ in der Weise $f_m(0) = m$ und $f_m(n+1) = f_m(n)+1$. Hierdurch wird für gegebenes $m \in \omega$ genau eine Funktion f_m definiert und man erklärt $m + n := f_m(n)$. Analog lassen sich Multiplikation und die Potenzierung rekursiv definieren. Diese setzen sich später auf natürliche Weise zu entsprechenden Operationen auf der Klasse aller Ordinalzahlen fort.

Beispiel 3. Sei $V_0 = \emptyset$, $V_{n+1} = \mathfrak{P}(V_n)$, sowie $V_\omega := \bigcup\{V_n \mid n \in \omega\}$. Weil mit a auch $\mathfrak{P}(a)$ transitiv ist (Übung 4 in **2.4**), sind alle V_n transitiv. Daraus folgt $V_n \subseteq V_{n+1}$, denn $V_n \in V_{n+1}$. Alle V_n sind endlich, während V_ω eine transitive abzählbar unendliche Menge ist. V_ω ist unter Vereinigungen abgeschlossen: Mit $x \in V_n$ ist $x \subseteq V_n$, also $\bigcup x \subseteq \bigcup V_n \subseteq V_n$, d.h. $\bigcup x \in V_{n+1}$. Auch ist V_ω auch abgeschlossen unter $\mathfrak{P}$: Ist $x \in V_\omega$, etwa $x \in V_n$, so ist $x \subseteq V_n$, also $\mathfrak{P}(x) \subseteq \mathfrak{P}(V_n) = V_{n+1}$, und somit $\mathfrak{P}(x) \in \mathfrak{P}(V_{n+1}) = V_{n+2}$. Auch ist mit $a, b \in V_\omega$ stets $\{a, b\} \in V_\omega$, denn $a, b \in V_n$ impliziert $\{a, b\} \in V_{n+1}$.

Aus alledem resultiert die besondere Bedeutung der Menge V_ω. Sie ist nicht nur Modell für $\mathsf{ZFC}-\mathsf{AI}$, sondern auch für $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ (Übung 4). Diese Theorie unterscheidet sich von ZFC dadurch, dass AI ersetzt wird durch das *Endlichkeitsaxiom*

Afin: Alle Mengen sind endlich (im Sinne von **2.6**)

und AF durch das Fundierungsschema FuS. Die Axiome AF und AC sind aus den übrigen beweisbar, so dass die Erwähnung von F und C in $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ eigentlich überflüssig ist. In $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ sei die Klasse ω der natürlichen Zahlen die der erblich transitiven Mengen. In ZFC sind dies genau die Ordinalzahlen. In $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ hingegen sind alle Ordinalzahlen natürliche Zahlen. ω ist gewiss *echte* Klasse in $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$, was aber die Entwicklung der endlichen Kombinatorik und Zahlentheorie nicht stört. ω ist in $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ – anders als in ZFC – nicht „von oben“ definierbar, so dass der Induktionssatz für ω in $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ anders als in **2.6** bewiesen werden muss (Übung 5).

Bemerkung. $\mathsf{ZFC}_{\mathrm{fin}}$ zielt ab auf die Axiomatisierung von V_ω, was den Beweis einschließt, dass jede Menge erblich endlich ist, oder gleichwertig, eine transitive Obermenge hat. Ohne AI ist FuS aus AF nicht beweisbar, deshalb die Eretzung von AF durch FuS. Auch die Ersetzung von Afin durch ES Übung 2 würde noch nicht ausreichen. Eine Alternative wäre die Verschärfung von Afin zu ES^* : $\varphi(0) \land \forall x \forall y (\varphi(x) \land \varphi(y) \to \varphi(x \cup \{y\}) \to \forall x \varphi(x)$, das bis auf das Tarski-Fragment alle Axiome von ZFC überflüssig macht, wie O. Deiser bemerkt hat (unpubliziert). Ähnlich wie Satz **2.9.2** ergibt sich die relative Konsistenz von

$\mathsf{ZFC_{fin}}$ zu ZF. Sogar die Konsistenz von $\mathsf{ZFC_{fin}}$ ist in ZF beweisbar, was viel mehr besagt als die relative Konsistenz. Das geschieht grob wie folgt: Man *beweist in* ZF, dass V_ω alle Axiome von $\mathsf{ZFC_{fin}}$ erfüllt; dazu müssen die Begriffe Axiom und Beweis in ZF formalisiert werden. Danach ist nachzuweisen, dass V_ω alle beweisbaren Folgerungen aus $\mathsf{ZFC_{fin}}$ erfüllt, wozu z.B. $0 \neq 0$ sicher nicht gehört. Die Konsistenz von T ist nach einem grundlegenden Satz von Gödel für hinreichend ausdrucksfähiges T in T nicht beweisbar. Beispiele sind $\mathsf{ZFC_{fin}}$ und die auf Seite 94 näher beschriebene elementare Zahlentheorie $T = \mathsf{PA}$.

Beispiel 4. Sei $W_0 = \omega$, $W_{n+1} = \mathfrak{P}(W_n)$, $W_\omega := \bigcup\{W_n \mid n \in \omega\}$. Diese Menge ist transitiv und gegenüber $\{,\}$, $\bigcup$ und $\mathfrak{P}$ abgeschlossen. Sie ist inneres Modell für ganz ZC (Übung 6). AI gilt in W_ω, weil $\omega \in W_\omega$ und ω absolut ist für jede transitive Klasse (Übung 2 in **2.9**). Dagegen gilt AR nicht in W_ω, sonst gewönne man das Universum W_ω als Menge (nämlich als Bild des Operators $n \mapsto \mathcal{W}_n$), was ein Widerspruch ist. Das bestätigt die schon an früherer Stelle ausgesprochene Behauptung, dass AR in ZC unbeweisbar ist. Auch beweist dies auf recht einfache Weise die relative Konsistenz von AF zu ZC ohne AF.

Übungen

1. Man zeige, alle Elemente von V_ω sind erblich endlich. Übung 2 in **5.4** wird zeigen, dass V_ω genau aus den erblich endlichen Mengen besteht.

   Hinweis. Alle V_n sind endlich und transitiv.

2. Man beweise $\mathsf{ZFC_{fin}}$ das *Induktionsschema für endliche Mengen*

   $\mathsf{ES}: \varphi(0) \wedge \forall x \forall y(\varphi(x) \to \varphi(x \cup \{y\}) \to \forall x \varphi(x) \quad (\varphi(x)$ beliebig aus $\mathcal{L}_\in)$

   Hinweis. Beweis verläuft fast wörtlich so wie der von Satz 2.6.1.

3. Man zeige, AR und AC sind aus den übrigen Axiomen von $\mathsf{ZFC_{fin}}$ beweisbar.

   Hinweis. Für AR: Übung 2 in **2.6**. Für AC: Übung 1 in **2.7**, sowie ES anstelle von Satz 2.6.1.

4. Man zeige in ZF: V_ω ist inneres Modell für $\mathsf{ZFC_{fin}}$.

   Hinweis. Wie in **2.9** sind in V_ω die auf V_ω relativierten Axiome von $\mathsf{ZFC_{fin}}$ nachzuweisen. Beachte Übung 3. AE^{V_ω} gilt wegen der Transitivität von V_ω.

5. Diese Übung ist länglich und nach dem Muster der Ordinalzahltheorie in **5.1** auszuführen. Man zeige in $\mathsf{ZFC_{fin}}$ (a) ω ist $\in$-wohlgeordnet, (b) Jedes $n \in \omega \setminus \{0\}$ hat einen S-Vorgänger, (c) den ω-Induktionssatz und den ω-Rekursionssatz.

6. Man beweise ohne AF: W_ω ist inneres Modell für ZC.

5.2 Natürliche Zahlen und Zählreihen

Natürliche Zahlen lassen sich von ganz unterschiedlichen Aspekten her betrachten. Ihre mengentheoretische Definition in Gestalt der von Neumannschen Zahlen ist nur eine mögliche Betrachtungsweise. Eine andere ist die axiomatische. Auch ein Bewohner von ZFC ist nicht gezwungen, die von Neumannsche Definition natürlicher Zahlen als die letztgültige anzusehen. Im Rahmen von ZFC erweitern axiomatische Betrachtungen oft den Horizont. Als Beispiel betrachten wir folgende auf Dedekind und Peano zurückgehende axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen.

Eine *Zählreihe* [1)] sei eine Struktur (N, o, s), wobei N eine Menge, $o \in N$ eine Konstante und $s : N \to N$ eine Funktion ist, die *Nachfolgerfunktion*, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

$$\text{(N1)}\ (\forall n \in N)\, o \neq n^s, \quad \text{(N2)}\ (\forall n, m \in N)(m^s = n^s \to m = n),$$

$$\text{(N3)}\ (\forall a \subseteq N)(o \in a \wedge (\forall n \in N)(n \in a \to n^s \in a) \to a = N).$$

Standardbeispiel einer Zählreihe ist $(\omega, 0, \mathtt{S})$. Denn (N1) ist klar, (N2) ist Teil von Übung 4 in **2.3** und (N3) ist der Induktionssatz für ω. Eine andere Zählreihe ist $(\omega_+, 1, \mathtt{S})$ mit $\omega_+ := \omega \setminus \{0\}$. In dieser beginnen Zählungen mit 1, was mehr den Gewohnheiten des Alltags entspricht. Zählreihen lassen sich auf sehr unterschiedliche Weise definieren, aber man beweist in ZF problemlos den

Satz 2.1 (Isomorphiesatz für Zählreihen). *Je zwei Zählreihen sind isomorph.*

Beweis. Es genügt zu zeigen $(\omega, 0, \mathtt{S})$ ist isomorph zu einer beliebigen Zählreihe (N, o, s). Man definiert einen Isomorphismus der Anschauung gemäß rekursiv durch $f(0) = o$ und $f(n^{\mathtt{S}}) = (f(n))^s$ wie in nachfolgender Figur.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\omega: & 0 & 1 & & n & n^{\mathtt{S}} & \bullet & \bullet & \bullet & \\
 & f\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\
N: & o & o^s & & f(n) & (f(n))^s & \bullet & \bullet & \bullet &
\end{array}$$

Was nur zu zeigen bleibt ist die anschaulich plausible Tatsache, dass f wirklich bijektiv ist. Induktion in N zeigt leicht, dass f surjektiv ist, also $f[\omega] = N$. Zum schnellen Nachweis der Injektivität konstruiere man eine Abbildung $f' : N \to \omega$ indem man die Rollen von ω und N in der Definition von f einfach vertauscht. Induktiv beweist man dann leicht $f' \cdot f = id_\omega$. Nach Übung 1 in **3.1** erweist sich f dann auch als injektiv und ist damit eine Bijektion. ❏

---

1) auch *Peano-Struktur* genannt, obwohl derartige Strukturen, die allein das Zählen modellieren und (noch) nicht das Rechnen, erstmals in [Dedekind 1888] betrachtet wurden.

Es gibt also bis auf Isomorphie nur eine Zählreihe. Daher ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn man $(\omega, 0, \mathsf{S})$ als *die* Zählreihe ansieht. Das hat mindestens den Vorteil, dass man sich nicht mit dem ziemlich mühsamen Existenzbeweis einer Anordnung herumplagen muss, in der n^s unmittelbarer Nachfolger von n ist. Die $\in$-Beziehung als Anordnung von ω liefert diese gratis.

Selbstverständlich gilt der ω-Rekursionssatz wegen der Isomorphie aller Zählreihen genauso in jeder anderen. Daher kann man auf einer beliebig gewählen Zählreihe die arithmetischen Operationen rekursiv definieren wie dies im vorigen Abschnitt geschah. Man kann diese Operationen aber auch mengentheoretisch ganz explizit definieren wie in Übung 2. Bei diesem Vorgehen werden die induktiven Nachweise der Rechengesetze durch direkte Beweise ersetzt. Diese sind in der Regel einfacher, ja meistens nahezu banal, wenn man einiges Wissen über endliche Mengen parat hat. Grundsätzlich aber ist es eine Geschmacksfrage, ob man die arithmetischen Operationen auf ω rekursiv oder explizit definiert.

Erst bei der Erweiterung dieser Definitionen auf transfinite Zahlen kommen beide Definitionsmethoden auf ganz unterschiedliche Weise zur Geltung. Die rekursiven Definitionen setzen sich fort zu den rekursiven Definitionen der ordinalen Addition und Multiplikation, die expliziten Definitionen hingegen erweitern sich zu expliziten Definitionen der Addition und Multiplikation auf Kardinalzahlen, die mit den ordinalen Operationen praktisch nichts mehr gemeinsam haben.

Bemerkung. Es ist von besonderer Bedeutung für die Grundlagen der Mathematik, dass man den arithmetischen Teil von ZFC, grob gesagt die elementare Zahlentheorie, auch unabhängig von Mengenlehre axiomatisch charakterisieren kann. Dann allerdings steht Axiom (N3) nicht mehr in voller Allgemeinheit zur Verfügung, weil die Theorie über Zahlen, nicht über Mengen redet. Das muss kompensiert werden, indem man die Sprache von vornherein anreichert. Es genügt, als Grundbegriffe einer *arithmetischen Sprache* $\mathcal{L}_{ar}$ die Konstanten 0 und 1 und die Operationssymbole $+, \cdot$ zu wählen. Mittels dieser, sowie Variablen für natürliche Zahlen und logischer Symbole definiert man ganz analog wie im Falle $\mathcal{L}_\in$ Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{ar}$ und betrachtet in $\mathcal{L}_{ar}$ folgendes Axiomensystem. Dieses bestimmt die mit PA bezeichnete sogenannte *Peano–Arithmetik*.

$$
\begin{array}{l}
x + 1 \neq 0; \quad x + 1 = y + 1 \to x = y; \\
x + 0 = x; \quad x + (y + 1) = (x + y) + 1; \\
x \cdot 0 = 0; \quad x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x; \\
\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x + 1)) \to \forall y \varphi(y) \quad (\varphi \text{ Formel in } \mathcal{L}_{ar}).
\end{array}
$$

Man hat gute Gründe, die Theorie PA mit der elementaren Zahlentheorie zu identifizieren. Dabei ist belanglos, dass in PA nicht uneingeschränkt subtrahiert werden kann. $\mathcal{L}_{ar}$ läßt sich als Teilsprache von $\mathcal{L}_\in$ verstehen, weil die Grundbegriffe von PA in $\mathcal{L}_\in$ definierbar sind. Alle auf ω relativierten Axiome von PA sind in ZF beweisbar, auch ohne Gebrauch von AI. Dann ist ω nur eine Klasse, aber dies ist unerheblich. Erst recht sind diese Axiome in $\mathsf{ZFC_{fin}}$ beweisbar. Kurzum, PA ist in $\mathsf{ZFC_{fin}}$ *interpretierbar*. Umgekehrt ist $\mathsf{ZFC_{fin}}$ auch in PA interpretierbar – man kann in PA eine zu $(V_\omega, \in)$ isomorphe Struktur arithmetisch beschreiben. Hieraus folgt leicht, $\mathsf{ZFC_{fin}}$ und PA sind *äquikonsistent*, d.h. die eine Theorie ist konsistent genau dann, wenn die andere es ist. Weil ZF die Konsistenz von $\mathsf{ZFC_{fin}}$ beweist, betrifft dies auch die Konsistenz von PA. Diese ist aber nicht in $\mathsf{ZFC_{fin}}$ beweisbar. Denn zunächst ist die Konsistenz von PA nach Gödel in PA zwar formulierbar, aber dort nicht beweisbar. Dies überträgt sich wegen der gegenseitigen Interpretierbarkeit auch auf $\mathsf{ZFC_{fin}}$. Insgesamt gesehen hat man damit die Konsistenzprobleme lediglich verschoben und nicht gelöst. Nach gegenwärtigem Wissensstand sind sie unlösbar.

Übungen

1. Beweise induktiv aus den Axiomen Zählreihe: zu jedem $n \in N \setminus \{o\}$ gibt es genau ein $m \in N$ mit $n = m^s$ und es ist $m \neq n$.

2. Die Verknüpfungen $x + y$, $x \cdot y$, x^y auf ω seien wie folgt erklärt, wobei zu beachten ist, dass $|a|$ für endliche Mengen a wohlerklärt ist (siehe **3.1**):

   $n + m = |n \times \{0\} \cup m \times \{1\}|$, $n \cdot m = |n \times m|$, $n^m = |{}^m n|$. Man beweise, diese genügen für $n, m \in \omega$ den Rekursionsgleichungen

   $$\begin{array}{lll} m + 0 = m & m \cdot 0 = 0 & m^0 = 1 \\ m + n^{\mathsf{s}} = (m+n)^{\mathsf{s}} & m \cdot n^{\mathsf{s}} = m \cdot n + m & m^{n^{\mathsf{s}}} = m^n \cdot m \end{array}$$

   und sind daher mit den durch diese Gleichungen rekursiv definierten Operationen identisch.

   Hinweis. $n \times m^{\mathsf{s}} \sim n \times m \cup n \times \{1\}$, sowie ${}^{n^{\mathsf{s}}}m \sim {}^a b \times b$.

3. Beweise induktiv mittels obiger Rekursionsgleichungen, dass die Addition auf ω assoziativ und kommutativ ist. Dasselbe beweise für die Multiplikation.

4. Beweise die in Übung 3 genannten Rechengesetze aus den expliziten Definitionen in Übung 2 und vergleiche den Aufwand.

5. Man zeige mit (N1) – (N3), dass eine Zählreihe (N, o, s) auf höchstens eine Weise so geordnet werden kann, dass $x < y \leftrightarrow x^s \leqslant y$ für alle $x, y \in N$.

6. Die Menge aller *geraden Zahlen* aus ω sei $v := \{n + n \mid n \in \omega\}$, die Menge aller *ungeraden Zahlen* sei $u := \{n + 1 \mid n \in v\}$. Man zeige $u \cap v = \emptyset$, $u \cup v = \omega$ und $v \sim \omega \sim u$.

7. Man beweise alle Axiome von PA für die Struktur $(\omega, 0, 1, +, \cdot)$.

5.3 Ordinalzahlen und elementare Eigenschaften

Ordinalzahlen lassen sich ebenso wie natürliche Zahlen auf unterschiedliche Weise explizit definieren. Weil letztere nicht ausreichen um alle unendlichen Mengen zu zählen, werden den natürlichen Zahlen transfinite Zahlen in geeigneter Weise hinzugefügt. Diese sollte ebenso wie die natürlichen Zahlen nach Möglichkeit geordnet sein. Die folgende Definition läßt zwar eine Anordnung der Ordinalzahlen nicht unmittelbar erkennen, ist aber wegen ihres expliziten Charakters leicht zu überprüfen.

Definition. Eine Menge α heißt *Ordinalzahl*, wenn α erblich transitiv ist, d.h. α und jedes $\beta\in\alpha$ ist transitiv. *On* bezeichne die Klasse aller Ordinalzahlen.

Bemerkung 1. Manche Autoren entwickeln die Ordinalzahltheorie ohne Fundierung. Dann muss man die Definition verändern, etwa in der Weise dass *On* die Klasse der transitiven $\in$-wohlgeordneten Mengen ist. Die Entwicklung der Ordinalzahltheorie geht dann jedoch etwas weniger zügig vonstatten.

Nachfolgend werden Ordinalzahlen durch $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ bezeichnet. Weil alle $n\in\omega$ und ω selbst erblich transitiv ist, gehört jedes $n\in\omega$ und auch ω selbst zu *On*. Die Definition ergibt nach Bemerkungen und Übungen in **2.3** leicht

(0) $0\in On$, (1) $\alpha\in On \to \alpha^{\mathsf{s}}\in On$, (2) $\beta\in\alpha\in On \to \beta\in On$,

(3) $\bigcup a\in On$ und $\bigcap a\in On$ für jede nichtleere Menge $a\subseteq On$.

ω ist die erste transfinite Ordinalzahl. Die nächste ist ω^{s}. Man erklärt $\alpha+n$ rekursiv durch $\alpha+0=\alpha$, $\alpha+n^{\mathsf{s}}=(\alpha+n)^{\mathsf{s}}$, so dass $\alpha+1=\alpha^{\mathsf{s}}$ der Nachfolger von α ist. Mit ω, $\omega+1, \omega+2, \dots$ wird weitergezählt, wenn alle natürlichen Zahlen in einem Zählprozeß verbraucht sind. Aber auch damit sind nicht alle Ordinalzahlen ausgeschöpft, denn z.B. ist $\omega+\omega := \bigcup\{\omega+n \mid n\in\omega\}$ wieder eine Ordinalzahl und man kann mit $\omega+\omega, \omega+\omega+1, \dots$ weiterzählen.

On ist echte Klasse, denn *On* ist erblich transitiv und wäre als Menge damit selbst eine Ordinalzahl, also $On\in On$ im Widerspruch zum Fundierungsaxiom. Auch ohne dieses Axiom lässt $On\in On$ sich unschwer ausschließen.

Genau wie für ω setzt man $\beta<\alpha \leftrightarrow_{df} \beta\in\alpha$ für beliebige $\alpha,\beta\in On$. Für alle $\alpha\in On$ gilt wegen (2) dann $\alpha=\{\beta\in On \mid \beta<\alpha\}$ was wir von den natürlichen Zahlen ja gewohnt sind. Auch ist $\alpha<\alpha^{\mathsf{s}}=\alpha+1$, denn $\alpha\in\alpha^{\mathsf{s}}$. Das Prädikat $<$ auf *On* ist offenbar irreflexiv, aber auch transitiv, weil alle Elemente von *On* transitiv sind. Also ist *On* bez. $<$ mindestens partiell geordnet. Um zu erkennen dass *On* bez. $<$ sogar total geordnet ist, formulieren wir zuerst den auf AF beruhenden

Satz 3.1 (Induktionssatz für On**).** *Sei* $\mathcal{E}$ *eine Klasse von Mengen derart, dass* $(\forall\alpha\in On)((\forall\beta<\alpha)\beta\in\mathcal{E}\rightarrow\alpha\in\mathcal{E})$. *Dann gilt* $On\subseteq\mathcal{E}$.

Der Beweis ist nahezu trivial: Wäre $\alpha\notin\mathcal{E}$, so enthielte $\{\beta\in\alpha+1\mid\beta\notin\mathcal{E}\}\neq\emptyset$ ein $\in$–minimales Element γ, so dass $\delta\in\mathcal{E}$ für alle $\delta<\gamma$, aber $\gamma\notin\mathcal{E}$, ein Widerspruch zur Voraussetzung im Satz. Aus diesem folgt unmittelbar der

Satz 3.2 (Prinzip der kleinsten Ordinalzahl). *Sei* $\mathcal{E}$ *eine Klasse und* $\exists\alpha\,\alpha\in\mathcal{E}$. *Dann gibt es ein minimales* $\alpha\in\mathcal{E}$, *also* $\beta\notin\mathcal{E}$ *für alle* $\beta<\alpha$.

Denn gäbe es ein solches α nicht, d.h. wäre immer $\alpha\notin\mathcal{E}$ falls $\beta\notin\mathcal{E}$ für alle $\beta<\alpha$, so erfüllt die Komplementklasse $\setminus\mathcal{E}$ die Voraussetzung von Satz 3.1 und umfasst damit ganz On, im Widerspruch zu $\exists\alpha\,\alpha\in\mathcal{E}$. Als erste Anwendung beweisen wir

Satz 3.3. *On wird durch* $\in$ *(also durch* $<$*) total geordnet. Kurzum, es gilt*

(4) $\alpha\leqslant\beta\vee\beta\leqslant\alpha$, *für alle* $\alpha,\beta\in On$.

Darüber hinaus ist On sogar $\in$*-wohlgeordnet.*

Beweis. Annahme: es gibt $\alpha,\beta\in On$ mit $(*):\ \alpha\nleqslant\beta\wedge\beta\nleqslant\alpha$. Wir wählen β hierin minimal und danach auch α minimal nach Satz 3.2, so dass dann $\gamma<\beta\vee\beta\leqslant\gamma$ für $\gamma<\alpha$. Aber $\beta\leqslant\gamma$ entfällt, sonst wäre $\beta\leqslant\alpha$ im Widerspruch zu $(*)$. Das zeigt $\gamma<\alpha\rightarrow\gamma<\beta$ und damit $\alpha\subset\beta$, weil gewiß $\alpha\neq\beta$. Sei $\gamma\in\beta\setminus\alpha$, also $\gamma<\beta$, $\gamma\nless\alpha$. Aus $\gamma<\beta$ folgt $\alpha\leqslant\gamma\vee\gamma<\alpha$ nach Bestimmung von β, also $\alpha\leqslant\gamma$, weil $\gamma\nless\alpha$. Das liefert $\alpha<\beta$, was mit $(*)$ unvereinbar ist. Damit wurde obige Annahme zum Widerspruch geführt und (4) bewiesen. Wir zeigen nun, On ist auch $\in$-wohlgeordnet. Sei $a\subseteq On$ nichtleer und $\delta\in a$ $\in$-minimal, also $\alpha\nless\delta$ für alle $\alpha\in a$. Dann gilt wegen (4) eben $\delta\leqslant\alpha$ für alle $\alpha\in a$, d.h. δ ist kleinstes Element von a. ❑

(5) $\alpha<\beta\leftrightarrow\alpha\subset\beta$, folglich $\alpha\leqslant\beta\leftrightarrow\alpha\subseteq\beta$, für alle $\alpha,\beta\in On$.

Die Richtung $\rightarrow$ gilt wegen der Transitivität von β und weil $\alpha\neq\beta$. Sei umgekehrt $\alpha\subset\beta$. Wäre $\alpha\nless\beta$, folgt $\beta\leqslant\alpha$ gemäß (4), also $\beta\subseteq\alpha$ im Widerspruch zu $\alpha\subset\beta$. Die Ordnung $<$ auf On ist demnach zugleich die echte Inklusionsordnung.

(6) $\beta<\alpha+1\rightarrow\beta\leqslant\alpha$, oder kontraponiert, $\alpha<\beta\rightarrow\alpha+1\leqslant\beta$.

Denn $\beta\in\alpha\cup\{\alpha\}$ besagt $\beta\in\alpha$ oder $\beta=\alpha$, d.h. $\beta\leqslant\alpha$. (6) bestätigt, dass $a^{\mathsf{S}}=\alpha+1$ unmittelbarer Nachfolger von α in der Wohlordnung von On ist.

(7) für jede Menge a von Ordinalzahlen ist $\bigcup a$ das Supremum von a in On.

In der Tat, für $\alpha\in a$ ist $\alpha\subseteq\bigcup a$, also $\alpha\leqslant\bigcup a$ nach (5). Ist ferner $\alpha\leqslant\beta$ (d.h. $\alpha\subseteq\beta$) für alle $\alpha\in a$, so folgt $\bigcup a\subseteq\beta$, also $\bigcup a\leqslant\beta$. Das beweist (7). Man schreibt deshalb oft $\sup a$ für $\bigcup a$. Damit wurde auch gezeigt, dass es zu jeder Menge a von Ordinalzahlen eine größere gibt: $(\sup a)^{\mathsf{S}}$ ist größer als alle $\alpha \in a$. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zwischen der Klasse On und der Menge ω, die im Übrigen viele Gemeinsamkeiten haben. Wir nennen hier auch die Existenz einer Paarungsfunktion $\pi : On \times On \xrightarrow{\text{bij}} On$, Übung 5.

Jedes $\alpha \in On$ ist, weil $\alpha \subseteq On$, selbst $\in$-wohlgeordnet, und darüber hinaus echter Anfang von On, denn $\alpha = \{\beta \in On \mid \beta < \alpha\}$. Umgekehrt ist jeder echte Anfang von On offenbar erblich transitiv und damit notgedrungen eine Ordinalzahl.

Eine Ordinalzahl der Form $\alpha^{\mathsf{S}} = \alpha + 1$ mit $\alpha \in On$ heißt *Nachfolgerzahl*. Alle übrigen Zahlen $\neq 0$ heißen *Limeszahlen*. $\alpha \in On$ ist Nachfolgerzahl genau dann wenn α ein Maximum β enthält und es gilt dann $\alpha = \beta + 1$. Die nächstgrößere Nachfolgerzahl nach α ist $\alpha + 1$, die nächstgrößere Limeszahl $\alpha + \omega := \sup\{\alpha + n \mid n \in \omega\}$.

Satz 3.1 ist ein genaues Pendant zu Satz 2.6.8, dem $<$-Induktionssatz für ω. Aber auch die übliche Nachfolger-Induktion auf ω hat ein Pendant im Bereich der Ordinalzahlen, wobei jetzt nicht nur Nachfolgerzahlen sondern auch Limeszahlen dem Weiterzählen dienen. λ bezeichnet fortan nur Limeszahlen.

Satz 3.4. *Sei $\mathcal{E}$ eine Klasse derart, dass für alle $\alpha \in On$ und Limeszahlen λ*

$$\text{(a) } 0 \in \mathcal{E}, \quad \text{(b) } \alpha \in \mathcal{E} \to \alpha^{\mathsf{S}} \in \mathcal{E}, \quad \text{(c) } \lambda \in \mathcal{E} \textit{ falls } \beta \in \mathcal{E} \textit{ für alle } \beta < \lambda.$$

Dann ist $On \subseteq \mathcal{E}$.

Beweis. Angenommen es gibt ein $\alpha \notin \mathcal{E}$, wobei α gleich minimal gewählt sei. Wegen (a) ist $\alpha \neq 0$, wegen (b) kann α keine Nachfolgerzahl sein, und wegen (c) keine Limeszahl. Die Annahme führt mithin zu einem Widerspruch. ❑

Wir beweisen nunmehr dass die Ordinalzahlen zum Zählen aller Mengen wirklich ausreichen. Aufgrund von AC darf man annehmen, dass eine beliebig vorgegebene Menge in wohlgeordneter Gestalt vorgegeben ist.

Satz 3.5. *Zu jeder wohlgeordneten Menge $(a, <)$ gibt es eine genau eine Ordinalzahl α mit $(a, <) \cong (\alpha, <)$.*

Beweis. Es gibt höchstens ein derartiges α. Denn ist auch $(a, <) \cong (\alpha', <)$, so folgt $(\alpha, <) \cong (\alpha', <)$. Weil nun α ein Anfang von α' ist oder umgekehrt, folgt $\alpha = \alpha'$ nach Übung 2 in **3.5**. *Existenz.* Sei ein echter Anfang von On, also ein $\beta \in On$ nach Satz 3.5.1 so gewählt, dass $\beta \not\precsim a$. Nach Satz 3.6.5 ist $(\beta, <)$ zu einem Anfang von $(a, <)$ isomorph oder umgekehrt. Erstere Möglichkeit entfällt wegen $\beta \not\precsim a$. Daher gibt es einen Anfang von β, also ein $\alpha \leqslant \beta$ mit $(a, <) \cong (\alpha, <)$. ❑

Korollar 3.6. *Zu jedem α gibt es ein β mit $\alpha \prec \beta$.*

Beweis. Nach Satz 3.6.6 gibt es zur wohlgeordneten Menge α ein wohlgeordnetes $(b, <)$ mit $\alpha \prec b$. Damit ist $\alpha \prec \beta$ für β nach Satz 3.5 mit $(b, <) \cong (\beta, <)$. ❑

Demnach existieren – ganz ohne AC – auch überabzählbare Ordinalzahlen. Eine abzählbar unendliche Menge wird mit den abzählbar unendlichen Ordinalzahlen auf unterschiedliche Weise aufgezählt. Die Klasse dieser Zahlen heißt oft die *zweite Zahlklasse* und werde mit Z_0 bezeichnet. Z_0 ist durch jede überabzählbare Ordinalzahl beschränkt und daher eine Menge. Allgemein ist eine *Zahlklasse* eine Äquivalenzklasse von $On \setminus \omega$ nach dem Gleichmächtigkeitsprädikat $\sim$. Die kleinsten Zahlen der Zahlklassen heißen *Anfangszahlen* oder *Alephs*. So ist $\aleph_0 := \omega$ die Anfangszahl von Z_0 und die nächste Anfangszahl ist die $\aleph_1$ genannte kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Offenbar ist $\aleph_1 = \omega \cup Z_0$. Deshalb ist Z_0 nicht mehr abzählbar. Es gibt überabzählbar viele abzählbare Ordinalzahlen. Mehr darüber in **6.1**.

Übungen

1. Man zeige, $\bigcap a$ ist die kleinste Zahl in einer nichtleeren Menge $a \subseteq On$.
2. Man beweise die Äquivalenz folgender Bedingungen für $\alpha \in On$:

   $$\text{(i) } \alpha \text{ ist Limeszahl,} \quad \text{(ii) } (\forall \beta < \alpha)\beta + 1 < \alpha \quad \text{(iii) } \bigcup \alpha = \alpha.$$
3. Für $n \in \omega$ werde $\omega \cdot n$ induktiv durch $\omega \cdot 0 = 0$, $\omega \cdot (n+1) = \omega \cdot n + \omega$ erklärt. Man zeige (a) $\omega \cdot n$ $(n \in \omega_+)$ ist Limeszahl, (b) die kleinste Limeszahl $> \omega \cdot n$ für alle n ist $\omega \cdot \omega := \sup\{\omega \cdot n \mid n \cdot \omega\}$.
4. Eine Funktion f mit $\mathit{dom}\, f = \alpha \in On$ heißt auch eine *Folge der Länge* α. Man beweise in ZFC: Ist f eine Folge von Ordinalzahlen $< \aleph_1$ einer Länge $\alpha < \aleph_1$, so ist auch $\sup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} < \aleph_1$. Dies ist ohne AC unbeweisbar.
5. Es sei für Ordinalzahlpaare eine Anordnung $(\alpha, \beta) \lessdot (\gamma, \delta)$ erklärt durch $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \vee (\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge (\alpha < \gamma \vee \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta))$. Man zeige, (a) $On \times On$ wird durch $\lessdot$ wohlgeordnet. (b) Der durch $(0, \alpha)$ bestimmte Abschnitt von $(On \times On, \lessdot)$ ist $\alpha \times \alpha = \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta < \alpha\}$. (c) Jeder echte Anfang A von $(On \times On, \lessdot)$ ist Menge, so dass $\pi : On \times On \to On$ mit $\pi(\alpha, \beta) =$ dasjenige γ mit $(\gamma, <) \cong (\{(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \lessdot (\alpha, \beta)\}, \lessdot)$ wohlerklärt ist. (d) π ist ordnungstreue Bijektion von $On \times On$ auf On, so dass nach (b) insbesondere $\pi(0, \alpha) \sim \alpha \times \alpha$. (e) $\pi(0, \omega) = \omega$, was wegen (d) noch einmal $\omega \times \omega \sim \omega$ beweist.

   Hinweis für (c): A ist Teilmenge von $\alpha \times \alpha$ für geeignetes $\alpha \in On$.

5.4 Rekursionstheoreme und die Hierarchie V_α

Wir formulieren zuerst zwei wichtige Verallgemeinerungen von Satz 1.1, nämlich

Satz 4.1 (Rekursionssatz für wohlgeordnete Mengen). *Sei $(a,<)$ eine wohlgeordnete Menge und $\mathcal{G}$ ein überall erklärter Operator. Dann existiert genau eine Funktion f mit $\mathrm{dom}\, f = a$, so dass für alle $x \in a$*

$$(\rho) \quad f(x) = \mathcal{G}(f_{<x}) \text{ mit } f_{<x} := f{\restriction}\{y \in a \mid y < x\}.$$

Satz 4.1$^{\copyright}$ (Rekursionstheorem für Klassen). *Sei $(\mathcal{A},<)$ wohlgeordnet und $\mathcal{G}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ überall erklärt. Dann existiert genau ein $F:\mathcal{A}\to\mathcal{V}$, so dass für alle $x\in\mathcal{A}$*

$$(\rho) \quad F(x) = \mathcal{G}(F_{<x}) \text{ mit } F_{<x} := F{\restriction}\{y \in \mathcal{A} \mid y < x\}.$$

Der Unterschied von Satz 4.1 zu Satz 4.1$^{\copyright}$ ist der, dass die Abbildung F auf der eventuell echten Klasse $\mathcal{A}$ definiert ist, also kein Objekt der Theorie, sondern eine durch eine wohlbestimmte Formel definierte Abbildung darstellt. Satz 4.1 ist jedoch ein Spezialfall von Satz 4.1$^{\copyright}$, weil $\mathcal{A}$ ja auch Menge sein kann und F dann durch eine mengentheoretische Funktion darstellbar ist. Satz 4.1$^{\copyright}$ bezieht sich speziell auf den Fall $\mathcal{A} = On$, ist aber für echte Klassen $\mathcal{A}$ gar nicht allgemeiner als der Spezialfall, weil alle echten wohlgeordneten Klassen isomorph sind (Übung 1 in **3.6**; man beachte, dass nach Verabredung jede beschränkte Teilklasse von $\mathcal{A}$ Menge ist). Satz 4.1$^{\copyright}$ wurde nur deshalb etwas allgemeiner formuliert, um beide Sätze in einem Zug beweisen zu können. Der Spezialfall von Satz 4.1$^{\copyright}$ für $\mathcal{A} = On$ wird oft das *Rekursionstheorem* (auch Rekursionssatz) für On genannt und lautet

Satz 4.2 (Rekursionstheorem für On). *Sei $\mathcal{G}$ ein überall erklärter Operator. Dann gibt es genau eine Abbildung F von On mit (ρ): $F(\alpha) = \mathcal{G}(F{\restriction}\alpha)$ für alle α.*

Beweis von Satz 4.1$^{\copyright}$. Dass es höchstens eine Abbildung auf $\mathcal{A}$ mit (ρ) gibt, folgt unmittelbar aus der Wohlordnung von $\mathcal{A}$: Sind F, F' Lösungen von (ρ) und existiert ein $x\in\mathcal{A}$ mit $F(x)\neq F(x)$, so gibt es ein kleinstes derartiges x, also $F_{<x} = F'_{<x}$. Dann ist aber $F(x) = \mathcal{G}(F_{<x}) = \mathcal{G}(F'_{<x}) = F'(x)$, im Widerspruch zur Annahme. Zum Existenznachweis betrachten wir die Klasse $\mathcal{H}$ aller *partiellen Lösungen* von (ρ), d.h. aller $f\in\mathcal{F}n$, so dass $\mathit{dom}\, f$ Anfang von $\mathcal{A}$ ist und (ρ') $f(x) = \mathcal{G}(f_{<x})$ für $x \in \mathit{dom}\, f$ erfüllt ist. $(\mathcal{H}, \subset)$ ist induktiv im Sinne von **3.6** wie man mühelos verifiziert. Wir definieren eine Progression π auf $\mathcal{H}$ wie folgt: Für $f\in\mathcal{H}$ sei $f^\pi = f \bigcup\{(e,\mathcal{G}(f))\}$, falls $\mathcal{A}\setminus \mathit{dom}\, f \neq \emptyset$ und e kleinstes Element in $\mathcal{A}\setminus\mathit{dom}\, f$ ist, sowie $f^\pi = f$ sonst.

Die Definition von f^π garantiert, dass auch f^π wieder partielle Lösung von (ρ) ist. Nach Theorem 1 in **3.6** existiert eine π–Kette $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ aus Abbildungen mit kleinstem Element $\emptyset$. Für $F := \bigcup \mathcal{C}$ gilt $F \restriction dom\, f = f$ für $f \in \mathcal{C}$, d.h. F löst (ρ) auf $dom\, F$, einem Anfang von $\mathcal{A}$. Ist $dom\, F$ Menge, so auch F selbst, also $F = \sup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$ und damit notwendig $F^\pi = F$, d.h. $dom\, F = \mathcal{A}$. Ist $dom\, F$ aber echte Klasse, gilt $dom\, F = \mathcal{A}$ gleichwohl, denn jeder echte Anfang von $\mathcal{A}$ ist eine Menge. ❑

Als wichtigste Anwendung des Rekursionstheorems für On definieren wir jetzt eine Abbildung $V : On \to \mathcal{V}$, die sogenannte *von Neumannsche Hierarchie*. Es sei

$$V_0 = 0; \quad V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha); \quad V_\lambda = \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \lambda\}.$$

Eine der Formulierung von Satz 4.2 entsprechender Operator $\mathcal{G}$ ist hier z.B.

$$\mathcal{G}(f) = \begin{cases} \mathfrak{P}(f(\alpha)), \text{ falls } f \in \mathcal{F}n \text{ und } dom\, f = \alpha^{\mathrm{S}} \text{ mit } \alpha \in On, \\ \bigcup f[\lambda], \text{ falls } f \in \mathcal{F}n \text{ und } dom\, f = \lambda \in On,\ \lambda \text{ Limeszahl}, \\ \emptyset \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung $\alpha \mapsto V_\alpha$ ist die Fortsetzung der schon in Beispiel 3 in **5.1** definierten Funktion $(V_n)_{n \in \omega}$ auf ganz On. Wir zeigen zuerst

(1) V_α ist transitive Menge für jedes α,

(2) $\beta < \alpha \to V_\beta \in V_\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in On$,

(3) $\beta \leqslant \alpha \to V_\beta \subseteq V_\alpha$.

(1) folgt induktiv über α mit Satz 3.4. V_0 ist transitiv und mit V_α auch $V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$ (Übung 4 in **2.4**). Die Induktion über Limeszahlen folgt aus Übung 2 in **2.1**. Analog verifiziert man (2) durch den induktiven Beweis von $(*)$: $(\forall \beta < \alpha) V_\beta \in V_\alpha$ über α. Dies ist trivial für $\alpha = 0$, und gilt $(*)$ für α, so auch für $\alpha + 1$, weil $\beta \leqslant \alpha$ für $\beta < \alpha + 1$, also $V_\beta \in V_\alpha$ oder $V_\beta = V_\alpha$, also jedenfalls $V_\beta \subseteq V_\alpha$, denn V_α ist transitiv; folglich $V_\beta \in \mathfrak{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. Auch gilt $(*)$ für λ, falls $(*)$ für alle $\alpha < \lambda$ gilt. Denn ist $\alpha < \lambda$, so $\alpha + 1 < \lambda$ und $V_\alpha \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\lambda$. (3) folgt mit (1) sofort aus (2).

Man nennt $(V_\alpha)_{\alpha \in On}$ auch die *kumulative Hierarchie* des Mengenuniversums. Einen ersten Grund für diese Benennung liefert der folgende

Satz 4.3 (Hierarchiesatz). $\mathcal{V} = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in On\}$. *Kurzum, jede Menge a liegt in einem gewissen* V_α.

Beweis durch $\in$-Induktion, siehe **2.8**. Sei $x \in \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in On\}$ für alle $x \in a$. Für $x \in a$ sei ρ_x die kleinste Ordinalzahl mit $x \in V_{\rho_x}$ und sei $\alpha := \bigcup\{\rho_x \mid x \in a\}$. Dann gilt nach (3) oben $V_{\rho_x} \subseteq V_\alpha$ für alle $x \in a$, also $a \subseteq \bigcup\{V_{\rho_x} \mid x \in a\} \subseteq V_\alpha$, und somit $a \in V_{\alpha+1}$, d.h. es gilt auch $a \in \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in On\}$. Das beweist unsere Behauptung. ❑

Die Aussage dieses Satzes beruht – wie alle Rekursionstheoreme – wesentlich auf dem Fundierungsaxiom. Falls man die Ordinalzahltheorie unabhängig von AF entwickelt, folgt AF wiederum aus der Aussage $\mathcal{V} = \bigcup\{V_a \mid \alpha \in On\}$. Kurzum, die Gleichung $\mathcal{V} = \bigcup\{V_a \mid \alpha \in On\}$ ist mit dem Fundierungsaxiom äquivalent.

Der Satz läßt aber eine noch weitergehende Interpretation zu, wenn man sich V_α als „Entwicklungsstufe des Universums $\mathcal{V}$ im Stadium α" vorstellt. Zunächst ist das kleinste α mit $a \in V_\alpha$ keine Limeszahl, weil mit $a \in V_\lambda = \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \lambda\}$ immer auch $a \in V_\beta$ für ein $\beta < \lambda$. Zu jeder Menge a gehört demnach eine kleinste Ordinalzahl ρ, mit $a \in V_{\rho+1}$, welche der *Rang* von a genannt wird, $rg\, a = \rho$.

Man kann ρ als dasjenige Stadium bezeichnen, in welchem a sich als Teilmenge von V_ρ ankündigt. $\rho + 1$ ist dann dasjenige Stadium, in welchem a als *Element* einer Menge erstmals in Erscheinung tritt, nämlich als Element von $V_{\rho+1}$. Dies deutet auf eine hierarchische Struktur des Mengenuniversums hin. Als erstes bemerken wir

(4) $V_\alpha = \{a \mid rg\, a < \alpha\}$, insbesondere $V_\omega = \{a \mid rg\, a < \omega\}$.

Dies zeigt man induktiv leicht mit Satz 3.4. Für den Limesschritt beachte man $a \in V_\lambda \Leftrightarrow a \in V_\beta$ für ein $\beta < \lambda \Leftrightarrow rg\, a < \beta$ für ein $\beta < \lambda \Leftrightarrow rg\, a < \lambda$, und für den Nachfolgerschritt $V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha = \{a \mid rg\, a = \alpha\}$. Als nächstes zeigen wir

(5) $e \in a \rightarrow rg\, e < rg\, a$, für alle $e, a \in \mathcal{V}$.

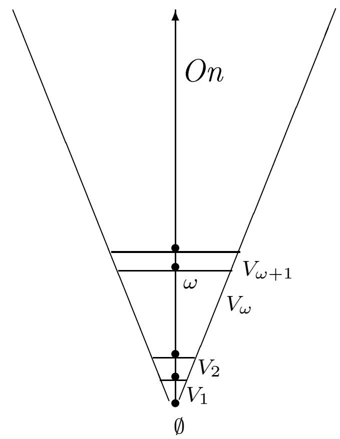
Denn mit $\rho = rg\, a$, also $e \in a \in V_{\rho+1} = \mathfrak{P}(V_\rho)$ (d.h. $a \subseteq V_\rho$), ist $e \in V_\rho$ und damit $rg\, e < \rho$ nach (4). Es bezeichne $\sup^* v$ für eine Menge v von Ordinalzahlen die kleinste *echte* obere Schranke für v in On. Dann gilt

(6) $rg\, a = \sup^*\{rg\, e \mid e \in a\}$.

Denn sei $rg\, e < \rho$ für alle $e \in a$ also, $a \subseteq \bigcup\{V_{rg\, e\, +1} \mid e \in a\}$. Wegen $rg\, e + 1 \leqslant \rho$ ist $\bigcup\{V_{rg\, e\, +1} \mid e \in a\} \subseteq V_\rho$, daher $a \in V_{\rho+1}$ und folglich $rg\, a \leqslant \rho$. Also ist $rg\, a$ tatsächlich kleinste echte obere Schranke für die Ränge der Elemente von a.

Die Elemente einer Menge a haben danach nicht nur kleineren Rang als a, sondern darüber hinaus tritt eine Menge a in genau dem Stadium erstmals auf, das unmittelbar auf alle Stadien folgt, in welchen die Elemente $e \in a$ fertig vorliegen. $\emptyset$ ist einziges Objekt vom Rang 0, denn $V_1 = \{\emptyset\}$. Die $n \in \omega$ haben den Rang n und allgemein gilt $rg\, \alpha = \alpha$ für jede Ordinalzahl α, wie aus (4) wegen $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$ durch Induktion über α leicht folgt. Auch ist $rg\, V_\alpha = \alpha$ für alle α.

V_α sammelt demnach alle im Stadium α fertig vorliegenden Objekte, was die Bezeichnung kumulative Hierarchie vollends rechtfertigt. Die Ordinalzahlen selbst erzeugen eine Skalierung dieser Hierarchie und liegen auf der Mittelachse in der nachfolgenden Figur, welche von der hierarchischen Struktur des Mengenuniversums eine recht anschauliche Vorstellung vermittelt.



Die Mengen V_λ haben für Limeszahlen λ ebenso wie V_ω starke Abgeschlossenheitseigenschaften. Sie sind für $\lambda > \omega$ sämtlich innere Modelle für ZC und erfüllen für wachsendes λ immer mehr Axiome des Schemas AF, auf welchem die Rekursionssätze und die Konstruktion von $(V_\alpha)_{\alpha \in On}$ beruhen. So gilt z.B. in V_λ für $\lambda = \omega_1$ erstmals der ω-Rekursionssatz (Übung 4). Man kann natürlich für jedes $\alpha \in On$ einen α-Rekursionssatz formulieren – als Spezialfall von Satz 4.1 – doch keiner dieser Sätze ist stark genug, um daraus Satz 4.2 zu folgern.

Eine nützliche Anwendung der Stufenhierarchie ist folgende. Sei $\approx$ ein Äquivalenzprädikat auf $\mathcal{V}$, z.B. die Gleichmächtigkeit $\sim$, und sei $\mathcal{C}$ eine dazugehörige Äquivalenzklasse. Ferner sei $\tau\mathcal{C} := \{x \in \mathcal{C} \mid rg\, x = \mu\}$ mit $\mu = \min\{rg\, y \mid y \in \mathcal{C}\}$, so dass $\tau\mathcal{C} \subseteq V_\mu$. Im Klartext: $\tau\mathcal{C}$ ist die Menge aller $x \in \mathcal{C}$ mit minimalem Rang. Bezieht man dies alles auf $\sim$ und setzt $m_x := \tau\mathcal{V}^{(x)}$ mit $\mathcal{V}^{(x)} := \{y \mid x \sim y\}$, so gilt

$$(7) \quad x \sim y \leftrightarrow m_x = m_y.$$

Auch ohne AC besagt (7), dass jede Mächtigkeitsklasse von $\mathcal{V}$ uniform durch genau eine Menge vertreten werden kann. Würde man m_x die Mächtigkeit von x nennen, käme dies der naiven Vorstellung von Kardinalzahlen als Gleichmächtigkeitsklassen etwas näher. Allerdings wirkt m_x speziell für endliche x etwas skuril, z.B. besteht m_x für eine Dreiermenge x aus den vier Dreiermengen von V_4. Man kann die Definition etwas verschönern, indem man z.B. $m_x = |x|$ setzt für endliches x und m_x für unendliche x wie oben erklärt. Doch ist ein ergeiziges Ziel, nämlich $m_x \in \mathcal{V}^{(x)}$ für alle x, ohne AC nicht zu erreichen. Ohne AC ist ein Operator $x \mapsto m_x$ mit der Eigenschaft (7) und der Zusatzbedingung $m_x \in V^{(x)}$ nicht definierbar. Eine derartige Forderung wäre sogar äquivalent mit AC. Erst in Gegenwart von AC ist dank Wohlordnungssatz jede Menge einer Ordinalzahl gleichmächtig und man repräsentiert eine Mächtigkeitsklasse bequemer durch die zu ihr gehörende ordinale Anfangszahl.

Die schon erklärten Operationen $\alpha+n$ und $\alpha\cdot n$ für $n \in \omega$ und ebenso die Potenzierung lassen sich mit Satz 4.2 nun auch problemlos auf ganz *On* erweitern. Man definiert

$$\begin{array}{lll} \alpha+0=\alpha, & \alpha\cdot 0=0, & \alpha^0=1, \\ \alpha+\beta^{\mathsf{S}}=(\alpha+\beta)^{\mathsf{S}}, & \alpha\cdot\beta^{\mathsf{S}}=\alpha\cdot\beta+\beta, & \alpha^{\beta^{\mathsf{S}}}=\alpha^\beta\cdot\alpha, \\ \alpha+\lambda=\sup\{\alpha+\beta \mid \beta<\lambda\}, & \alpha\cdot\lambda=\sup\{\alpha\cdot\beta \mid \beta<\lambda\}, & \alpha^\lambda=\sup\{\alpha^\beta \mid \beta<\lambda.\} \end{array}$$

Die Assoziativität von $+$ und $\cdot$ bleiben erhalten, nicht aber die Kommutativität. So gilt z.B. $1+\omega=\omega\neq\omega+1$, $2\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega=\omega\cdot 2$. Diese Operationen sind wichtig für Spezialdisziplinen, etwa die Beweistheorie. Wir verzichten aber auf Ausführungen hierüber, denn wichtiger für allgemeine Anwendungen der Mengenlehre sind die später erklärten Rechenoperationen auf Kardinalzahlen.

Übungen

1. Man zeige, die V_α bilden die (eindeutig bestimmte) $\mathfrak{P}$–Kette mit kleinstem Element 0 in der induktiven p.o. Klasse $(\mathcal{T}r, \subset)$. Demnach lassen sich die V_α auch direkt und ohne Rekursionstheorem konstruieren.

2. Man beweise jede erblich endliche Menge gehört zu V_ω. Nach Übung 1 in **5.1** besteht V_ω damit genau aus den erblich endlichen Mengen.

   Hinweis. Genügt zu zeigen $a \in V_\omega$ für jedes endliche $a \in \mathcal{T}r$. Induktion über $|a|$. Ind.-Schritt: Sei $a=b\cup\{c\}$, c von maximalen Rang. Sei $e \in b$. Wegen $a \in \mathcal{T}r$ ist $e \subseteq a$ und sogar $e \subseteq b$, denn $c \notin e$ nach Wahl von c. Daher $b \in \mathcal{T}r$ und so $b \in V_\omega$ nach Induktionsannahme. Wegen $a \in \mathcal{T}r$ und $c \notin c$ ist $c \subsetneq b$. Also auch $a=b\cup\{c\}\in V_\omega$.

3. Man beweise in ZF das Kollektionsschema Acol Seite 27.

4. Man zeige, V_{ω_1} ist inneres Modell für ZC und erfüllt den ω-Rekursionssatz.

5. Man zeige, es gibt eine abzählbare Ordinalzahl ε mit $\varepsilon^\omega=\varepsilon$.

   Hinweis. Betrache $\sup\{\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$.

6. Man beweise, die ordinale Addition und Multiplikation sind jeweils assoziativ und es gilt $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

7. Man definiere $\alpha+\beta$ und $\alpha\cdot\beta$ für Ordinalzahlen α,β repräsentantenweise durch geeignete Operationen mit wohlgeordneten Mengen.

Kapitel 6

Kardinalzahlen

Wie bereits erwähnt wurde, bieten sich die Anfangszahlen, d.h. die kleinsten Zahlen in den Klassen jeweils gleichmächtiger Ordinalzahlen $\geqslant \omega$ als Mächtigkeitsmaße für unendliche Mengen an. Dies ist der Weg, der heute bei der Kardinalzahldefinition in ZFC meistens beschritten wird. Kurzum, Kardinalzahlen werden als spezielle Ordinalzahlen verstanden, und zwar als Anfangszahlen (Alephs). Wir studieren in **6.1** zunächst die Folge $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in On}$, die genau diese Anfangszahlen nach aufsteigender Größe enthält. Die Definition dieser Folge und der Nachweis ihrer Fundamentaleigenschaften, ebenso wie das Hauptergebnis in **6.1**, nämlich $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$ oder gleichwertig $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ (Satz von Hessenberg), sind völlig unabhängig vom Auswahlaxiom. Dieses Axiom kommt erst ins Spiel beim Nachweis, dass nicht nur für jede wohlgeordnete Menge a ein α existiert mit $a \sim \aleph_\alpha$, sondern nach dem Wohlordnungssatz für *jede* Menge.

Die Kardinalzahlarithmetik wird in **6.2** entwickelt, wobei AC auch hier wesentlich einbezogen wird. Einige Sätze, wie z.B. der Satz von Cantor-Bernstein, erhalten in diesem Rahmen einen trivialen Status. Die kardinale Addition und Multiplikation ist dank der Formel $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ leicht beherschbar, nicht hingegen die Potenz, auch nicht in Gegenwart von AC. Denn leider lässt ZFC nachweislich keine Entscheidung über die Frage zu, ob $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Kontinuumshypothese). Ein wichtiges Hilfsmittel hierbei ist der Begriff der regulären und der singulären Kardinalzahl. Mit diesem Werkzeug lässt sich z.B. $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$, die älteste und letztlich einzige zuverlässige Information über die Größe von $2^{\aleph_0}$ leicht zeigen. Die interessante Geschichte der Kardinalzahlen wird ausführlich in [Deiser 2008] und kommentierenden Beiträgen in [Hausdorff 2002] dargestellt.

6.1 Die kanonische Folge der Kardinalzahlen

Für Ordinalzahlen α, β gilt zwar $\alpha \prec \beta \;\Rightarrow\; \alpha < \beta$, aber umgekehrt folgt aus $\alpha < \beta$ nur $\alpha \precsim \beta$. So ist z.B. $\alpha \sim \alpha + 1$ für jede unendliche Ordinalzahl α, also $\alpha \geqslant \omega$. Denn man braucht $\alpha + 1$ ja nur etwas umzuordnen, indem man das letzte Element von $\alpha + 1$ als erstes setzt und erhält eine zu α isomorphe Wohlordnung von $\alpha + 1$, was $\alpha \sim \alpha + 1$ impliziert. Damit gilt sicher $\alpha \sim \alpha + n$ für jedes $n \in \omega$, sowie auch $\alpha \sim \alpha + \omega$, $\alpha \sim \alpha + \omega + \omega$, usw. Möglicherweise ist es interessant zu erfahren, wie groß β mindestens sein muß, damit $\alpha \prec \alpha + \beta$. Die Methoden dieses Abschnitts werden uns in die Lage versetzen, Antworten auf derartige Fragen zu geben.

Nach den Ausführungen in **5.3** gibt es zu vorgegebenem α stets ein β mit $\alpha \prec \beta$. Daher wird auf *On* nach dem ordinalen Rekursionstheorem durch

$$\aleph_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \min\{\beta \in On \mid \aleph_\alpha \prec \beta\}, \quad \aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \lambda\}$$

ein Operator $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ definiert. Es gilt $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\alpha+1}$ und damit auch $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$. Für jedes β mit $\aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}$ ist notwendig $\beta \sim \aleph_\alpha$. Denn sicher gilt $\beta \precsim \aleph_{\alpha+1}$, aber $\beta \sim \aleph_{\alpha+1}$ entfällt nach Definition von $\aleph_{\alpha+1}$. Korollar 1.3 wird zeigen, dass die Mengen $Z_\alpha := \{\beta \in On \mid \aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}\}$ identisch sind mit den in **5.3** definierten Zahlklassen. Auch ist jedes $\aleph_\alpha$ eine Limeszahl. Denn das gilt für $\aleph_0$ und jedes $\aleph_{\alpha+1}$, weil mit $\beta \prec \aleph_{\alpha+1}$ wegen $\beta + 1 \sim \beta$ auch $\beta + 1 \prec \aleph_{\alpha+1}$. Für $\aleph_\lambda$ beachte man, dass das Supremum einer Menge von Limeszahlen immer eine Limeszahl ist.

Satz 1.1. *Für alle $\alpha, \beta \in On$ sind äquivalent*

$$\text{(i) } \alpha < \beta, \quad \text{(ii) } \aleph_\alpha \prec \aleph_\beta, \quad \text{(iii) } \aleph_\alpha < \aleph_\beta.$$

Beweis. (i)⇒(ii), also $(*) : \alpha < \beta \to \aleph_\alpha \prec \aleph_\beta$, ergibt sich induktiv über β. $(*)$ ist trivial für $\beta = 0$. Sei $(*)$ für β angenommen und sei $\alpha < \beta + 1$, also $\alpha \leqslant \beta$. Dann ist nach Induktionsannahme $\aleph_\alpha \precsim \aleph_\beta \prec \aleph_{\beta+1}$, also gewiß $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\beta+1}$. Nun sei λ eine Limeszahl und es gelte $(*)$ für alle alle $\beta < \lambda$. Sei $\alpha < \lambda$. Dann ist auch $\alpha + 1 < \lambda$, also $\aleph_\alpha \prec \aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_\lambda$. Weil damit sicher auch $\aleph_{\alpha+1} \precsim \aleph_\lambda$, gilt $\aleph_\alpha \prec \aleph_\lambda$ auch jetzt. (ii)⇒(iii) und (iii)⇒(i) folgen hieraus ganz einfach durch Kontraposition. ❏

Zunächst betrachten wir obige Definition unter einem etwas allgemeineren Gesichtspunkt. Eine Abbildung $F\colon On \to On$ mit $F_\alpha := F(\alpha)$ heiße *normal*, wenn sie *strikt monoton* und in den Limeszahlen „stetig“ ist, d.h. wenn $\alpha < \beta \to F_\alpha < F_\beta$ und $F_\lambda = \sup\{F_\beta \mid \beta < \lambda\}$. Nach Definition und Satz 1.1 ist $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ in diesem Sinne normal. Ein nützliches Beispiel ist auch $\alpha \mapsto \gamma + \alpha$ für festes γ.

Satz 1.2. *Sei* $F : On \to On$ *normal. Dann gelten*

(a) $\sup\{F_\alpha \mid \alpha \in v\} = F(\sup v)$ *für jede Menge* $v \subset On$,

(b) $\alpha \leqslant F_\alpha$ *für alle* α, *d.h.* F *ist progressiv,*

(c) *Ist* $F_0 \leqslant \alpha$, *so gibt es ein größtes* γ *mit* $F_\gamma \leqslant \alpha$,

(d) F *hat beliebig große Fixpunkte, d.h.* $\forall\alpha(\exists\beta \geqslant \alpha)\, F_\beta = \beta$.

Beweis. (a) ist wegen der Monotonie klar, falls $v = \emptyset$ oder $\sup v$ Maximum in v ist. Falls aber $\sup v = \lambda$ für eine Limeszahl λ, ist $\sup\{F_\alpha \mid \alpha \in v\} = \sup\{F_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ nachzuweisen. Dazu beachte man v ist konfinale Teilmenge von λ, d.h. zu jedem $\alpha \in \lambda$ gibt es ein $\alpha' \in v$ mit $\alpha \leqslant \alpha'$; damit ist auch $F_\alpha \leqslant F_{\alpha'}$. Deshalb liegt auch $\{F_\alpha \mid \alpha \in v\}$ konfinal in $\{F_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$. Das beweist (a). Ist (b) richtig für α, folgt wegen $\alpha \leqslant F_\alpha < F_{\alpha+1}$ auch $\alpha + 1 \leqslant F_{\alpha+1}$, denn $\alpha + 1$ ist unmittelbarer Nachfolger von α. Sei $\beta \leqslant F_\beta$ für alle $\beta < \lambda$. Das ergibt $\lambda = \sup\{\beta \mid \beta \in \lambda\} \leqslant \sup\{F_\beta \mid \beta \in \lambda\} = F(\lambda)$. Also gilt (b) nach Satz 5.3.1. Für (c) beachte man, dass wegen $\alpha \leqslant F_\alpha < F_{\alpha+1}$ die kleinste Zahl β mit $\alpha < F_\beta$ existiert. Daher ist nur zu zeigen, dass β Nachfolgerzahl ist. Weil $F_0 \leqslant \alpha$ ist $\beta \neq 0$. Angenommen β ist eine Limeszahl. Dann folgt wegen $F_\gamma \leqslant \alpha$ für alle $\gamma < \beta$ auch $F_\beta = \sup\{F_\gamma \mid \gamma < \beta\} \leqslant \alpha$, im Widerspruch zu $\alpha < F_\beta$. Zum Beweis von (d) sei $\beta := \sup\{F_\alpha^n \mid n \in \omega\}$. Dabei sei wie üblich induktiv erklärt $F_\alpha^0 = \alpha$ und $F_\alpha^{n+1} = F(F_\alpha^n)$. Dann ist $\alpha \leqslant \beta$ und (a) ergibt $F_\beta = \beta$, weil

$$F_\beta = \sup\{F_\alpha^{n+1} \mid n \in \omega\} = \sup\{F_\alpha^n \mid n \in \omega\} = \beta. \quad \square$$

Korollar 1.3. *Zu jedem* $\alpha \geqslant \omega$ *gibt es genau ein* β *mit* $\aleph_\beta \leqslant \alpha$ *und* $\alpha \sim \aleph_\beta$.

Beweis. Nach Satz 1.2(c) hat $\{\gamma \mid \aleph_\gamma \leqslant \alpha\}$ ein größtes Element, nennen wir es β, so dass $\aleph_\beta \leqslant \alpha < \aleph_{\beta+1}$. Gemäß Definition des $\aleph$-Operators folgt hieraus offenbar $\aleph_\beta \sim \alpha$, und nach Satz 1.1 kann es auch nur ein derartiges β geben. $\square$

Dieses Korollar zeigt, dass die Z_α in der Tat mit den in **5.3** definierten Zahlklassen identisch sind und dass alle $\aleph_\alpha$ Anfangszahlen sind, einschließlich der $\aleph_\lambda$ für Limeszahlen λ. Wirklich überraschend ist die aus Satz 1.2(d) folgende Tatsache, dass es Ordinalzahlen α mit $\alpha = \aleph_\alpha$ gibt. Die kleinste derartige Zahl ist das Supremum der Folge $\aleph_{\aleph_0}$, $\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \ldots$ und unvorstellbar groß. Tatsächlich ist diese aber noch relativ klein im Vergleich zu anderen exorbitant großen Ordinalzahlen, deren Existenz durch kompliziertere Konstruktionen gesichert werden kann.

Der Schlüssel zur Beherrschung der elementaren Kardinalzahlarithmetik ist folgender Satz. Dafür gibt es mehrere Beweise. Wir benutzen wesentlich Übung 5 in **5.3**.

Satz 1.4 (Satz von Hessenberg). $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$ *für alle* α.

Beweis. Sei $\pi : On \times On \to On$ die in Übung 5 in **5.3** (Seite 99) definierte Bijektion. Weil nach (d) dieser Übung $\pi(0, \aleph_\alpha) \sim \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$, genügt zu zeigen $\aleph_\alpha \sim \pi(0, \aleph_\alpha)$. Gewiss ist $\aleph_\alpha \precsim \pi(0, \aleph_\alpha)$. Angenommen es gibt ein α mit $\aleph_\alpha \prec \pi(0, \aleph_\alpha)$, so dass dann auch $\aleph_\alpha < \pi(0, \aleph_\alpha)$. Sei α minimal gewählt und (β, γ) dasjenige Paar mit $\pi(\beta, \gamma) = \aleph_\alpha$, so dass $\pi(\beta, \gamma) < \pi(0, \aleph_\alpha)$. Wegen der Ordnungstreue von π gilt $(\beta, \gamma) \lessdot (0, \aleph_\alpha)$. Folglich $\beta, \gamma < \aleph_\alpha$ nach (b), also auch $\delta := \max\{\beta, \gamma\} + 1 < \aleph_\alpha$, denn $\aleph_\alpha$ ist Limeszahl. Auch ist $\delta \geqslant \aleph_0$, denn β und γ können nicht beide endlich sein, sonst wäre auch $\pi(\beta, \gamma)$ endlich. Es sei $\aleph_\varepsilon \sim \delta$, so dass wegen $\delta < \aleph_\alpha$ auch $\aleph_\varepsilon < \aleph_\alpha$. Wegen der Minimalität von α ist $\aleph_\varepsilon \sim \pi(0, \aleph_\varepsilon) \sim \aleph_\varepsilon \times \aleph_\varepsilon$. Dies ergibt

$$\aleph_\alpha = \pi(\beta, \gamma) < \pi(0, \delta) \sim \delta \times \delta \sim \aleph_\varepsilon \times \aleph_\varepsilon \sim \aleph_\varepsilon.$$

Also $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\varepsilon$ im Widerspruch zu $\aleph_\varepsilon < \aleph_\alpha$. Unsere Annahme war daher falsch. ❑

Man beachte, dieser Beweis macht an keiner Stelle Gebrauch vom Auswahlaxiom. Ohne AC lässt sich aus obigem Satz jedoch nicht $\mathfrak{P}(\omega) \times \mathfrak{P}(\omega) \sim \mathfrak{P}(\omega)$ (oder gleichwertig $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$) folgern – obwohl dies auf andere Weise einfach beweisbar ist (Übung 7 in **4.2**). Die Existenz eines α mit $\mathfrak{P}(\omega) \sim \aleph_\alpha$ wird erst durch AC gesichert. AC benötigt man auch für Sätze wie z.B. Satz 2.2 im nächsten Abschnitt.

Satz 1.5. *Ist* $a \precsim \aleph_\alpha$ *und* $e \precsim \aleph_\alpha$ *für alle* $e \in a$, *dann ist auch* $\bigcup a \precsim \aleph_\alpha$.

Beweis. Sei $g : a \xrightarrow{\text{inj}} \aleph_\alpha$. Zu jedem $e \in a$ wählen wir nach AC ein $f_e : e \xrightarrow{\text{inj}} \aleph_\alpha$. Für $x \in \bigcup a$ sei $h(x) = (\beta_0, \beta_1)$ mit $\beta_0 = \min\{\beta \mid x \in g^{-1}(\beta)\}$ und $\beta_1 = f_{g^{-1}(\beta_0}$. Man zeige leicht $h \bigcup a \xrightarrow{\text{inj}} \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$. ❑

Übungen

1. Man beweise, $\aleph_{\alpha+1} = \sup\{\beta \in On \mid \beta \sim \aleph_\alpha\}$.
2. Man folgere aus Übung 1, dass die Zahlklasse Z_α die Mächtigkeit $\aleph_{\alpha+1}$ hat, also Z_0 insbesondere die Mächtigkeit $\aleph_1$.
3. Man zeige, für nichtleeres $a \subseteq \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in On\}$ ist auch $\sup a \in \{\aleph_\alpha \mid \alpha \in On\}$.
4. Man zeige, zu jedem a gibt es ein α mit $\alpha \not\precsim a$, aber $\alpha \precsim \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a))$. Dies verschärft den Satz von Hartogs, bezogen auf die Klasse On.
5. Man zeige, zu jedem $\gamma \in On$ gibt es ein α mit $\gamma + \alpha = \alpha$ und kennzeichne das kleinste α mit $\omega + \alpha = \alpha$.

6.2 Kardinalzahlarithmetik

Um nun die $\aleph_\alpha$ als Mächtigkeitsmaße beliebiger unendlicher Mengen zu benutzen, wird von nun an auch AC angenommen. Nach dem Wohlordnungssatz und Satz 5.3.5 gibt es zu jeder unendlichen Menge a eine Ordinalzahl $\alpha \geqslant \omega$ mit $a \sim \alpha$ und zu jedem α gibt es nach Korollar 1.3 genau ein β mit $\alpha \sim \aleph_\beta$ und damit auch nur ein β mit $a \sim \aleph_\beta$. Damit können wir die für endliche Mengen a in **3.1** bereits angegebene Definition von $|a|$ im Rahmen von ZFC wie folgt ergänzen:

Definition. Eine Menge κ heißt *Kardinalzahl*, wenn $\kappa \in \omega$ oder $\kappa = \aleph_\alpha$ für eine Ordinalzahl α. Die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* $|a|$ einer Menge a sei definiert durch

$$|a| := \begin{cases} \text{dasjenige } n \in \omega \text{ mit } a \sim n \text{ falls } a \text{ endlich ist,} \\ \text{dasjenige } \aleph_\alpha \text{ mit } a \sim \aleph_\alpha \text{ sonst.} \end{cases}$$

Nachfolgend bezeichnen die Buchstaben $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ beliebige Kardinalzahlen. Es ist klar, dass $\kappa < \mu$ gleichwertig ist mit $\kappa \prec \mu$ und $\kappa \leqslant \mu$ mit $\kappa \precsim \mu$. Aus $a \precsim b \precsim a$ folgt demnach $|a| \leqslant |b| \leqslant |a|$, also $|a| = |b|$ und so $a \sim b$ ganz ohne Berufung auf Satz 3.4.1. Auch gilt nach Definition $|a| = \kappa \leftrightarrow a \sim \kappa$ (speziell $|\kappa| = \kappa$) und damit

Satz 2.1. *Für alle Mengen a, b ist*

(a) $a \sim b \leftrightarrow |a| = |b|$, (b) $a \prec b \leftrightarrow |a| < |b|$, (c) $a \precsim b \leftrightarrow |a| \leqslant |b|$.

Abzählbare Mengen a sind gekennzeichnet durch $a \precsim \aleph_0$ und haben eine Kardinalzahl $\leqslant \aleph_0$. Allgemeiner sind die Mengen a mit $|a| \leqslant \aleph_\alpha$ gerade diejenigen mit $a \precsim \aleph_\alpha$. Nach Übung 5 in **3.3** ist die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Diese fundamentale Tatsache hat eine natürliche, wiederum AC wesentlich benutzende Verallgemeinerung in

Satz 2.2. *Die Vereinigung von höchstes $\aleph_\alpha$ vielen Mengen einer Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\alpha$ hat eine Mächtigkeit $\leqslant \aleph_\alpha$, oder formal, $|a| \leqslant \aleph_\alpha \wedge (\forall x \in a)|x| \leqslant \aleph_\alpha \to |\bigcup a| \leqslant \aleph_\alpha$.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $\mathit{Inj}_\mathrm{x} := \{f \mid f : x \xrightarrow{\text{inj}} \aleph_\alpha\} \neq \emptyset$ für alle $x \in a$ und $\{\mathit{Inj}_\mathrm{x} \mid x \in a\}$ besteht aus paarweise disjunkten Mengen. Daher gibt es eine Auswahlmenge hiervon. Die in Inj_x ausgewählte Injektion sei mit ζ_x bezeichnet. Ferner gibt es wegen $|a| \leqslant \aleph_\alpha$ eine Injektion $f : a \xrightarrow{\text{inj}} \aleph_\alpha$. Für $z \in \bigcup a$ sei β die kleinste Ordinalzahl mit $z \in f^{-1}(\beta)$ und sei $\gamma := \zeta_{f^{-1}(\beta)}(z)$. Dann ist $g : z \mapsto (\beta, \gamma)$ eine Injektion von $\bigcup a$ nach $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ wie man leicht verifiziert. Damit ist nach Satz 1.4 $\bigcup a \precsim \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \precsim \aleph_\alpha$ und deshalb $|\bigcup a| \leqslant \aleph_\alpha$. ❏

Ersetzt man in diesem Satz $\leqslant$ durch $<$, so ist die entstehende Aussage für $\aleph_0, \aleph_1, \dots$ immer noch richtig, aber sie gilt nicht mehr für alle $\aleph_\alpha$, siehe hierzu **6.3**.

Definition. Die Operationen der kardinalen Addition, Multiplikation und der Exponentiation seien definiert durch

$$\kappa + \mu := |\kappa \times \{0\} \;\cup\; \mu \times \{1\}|, \quad \kappa \cdot \mu := |\kappa \times \mu|, \quad \kappa^\mu := |{}^\mu\kappa|.$$

Diese Operationen sind nach den Darlegungen in **5.1** Erweiterungen der entsprechenden arithmetischen Operationen auf ω und wurden mit den gleichen Symbolen bezeichnet wie die in **5.3** definierten ordinalen Operationen, müssen aber von diesen klar unterschieden werden. Solange nichts anderes gesagt wird, bezieht sich Nachfolgendes auf die kardinalen Operationen. Diese sind geeigneter als die ordinalen, um die Mächtigkeiten von Vereinigungen, kartesischen Produkten und Mengen von Funktionen zu bestimmen. Es ist klar, dass $\kappa + 0 = \kappa$, $\kappa \cdot 0 = 0$ und $\kappa^0 = 1$ für alle κ, sowie $0^\kappa = 0$ für $\kappa \neq 0$.

Weil offenbar $a \cup b = a \cup (b \setminus a) \precsim |a| \times \{0\} \;\cup\; |b| \times \{1\}$, gilt $|a \cup b| \leqslant |a| + |b|$ und $|a \cup b| = |a| + |b|$ im Falle $a \cap b = \emptyset$. Unmittelbar klar ist auch $|a \times b| = |a| \cdot |b|$ und $|{}^b a| = |a|^{|b|}$. Denn $a \sim \kappa$ und $b \sim \mu$ implizieren sicher $a \times b \sim \kappa \times \mu \sim \kappa \cdot \mu$ und ${}^b a \sim {}^\mu\kappa \sim \kappa^\mu$. Die wichtigsten, im Folgenden ohne besonderen Verweis benutzen Eigenschaften der kardinalen Addition und Multiplikation formuliert

Satz 2.3. *Die kardinale Addition und Mulitplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ, sowie monoton, d.h. wenn* $\mu \leqslant \nu$*, so ist* $\kappa + \mu \leqslant \kappa + \nu$ *und* $\kappa \cdot \mu \leqslant \kappa \cdot \nu$*. Ferner gilt* $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$*, sofern mindestens ein Summand unendlich ist. Ist zudem* $\kappa, \mu \neq 0$*, gilt auch* $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$*, speziell* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ *für unendliches* κ*. Schließlich gilt auch das Distributivgesetz, d.h.* $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$*.*

Beweis. Die Kommutativität von $+$ und $\cdot$ folgt aus der von $\cup$ bzw. der offensichtlichen Existenz einer Bijektion zwischen $a \times b$ und $b \times a$ und ähnlich einfach sind die Nachweise der Assoziativität und Monotonie. Für den Nachweis der Formel $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$ sei o.B.d.A. $\mu \leqslant \kappa$ und mindestens κ sei unendlich. Dann ist

$$\begin{array}{rcll} \kappa & \precsim & \kappa \times \{0\} \;\cup\; \mu \times \{1\} & (\sim \kappa + \mu) \\ & \precsim & \kappa \times \{0\} \;\cup\; \kappa \times \{1\} & (\text{wegen } \mu \leqslant \kappa) \\ & = & \kappa \times \{0, 1\} \precsim \kappa \times \kappa \;\sim\; \kappa & (\text{Satz 1.4 mit } \kappa = \aleph_\alpha). \end{array}$$

Also $\kappa \precsim \kappa + \mu \precsim \kappa$ und mithin $\kappa = \kappa + \mu$. Analog folgt $\kappa \cdot \mu = \kappa$ falls $0 < \mu \leqslant \kappa$ und $\kappa \geqslant \omega$. Die Distributivität ergibt sich aus der leicht zu bestätigenden Tatsache

$$\kappa \times (\lambda \times \{0\} \;\cup\; \mu \times \{1\}) \sim (\kappa \times \lambda) \times \{0\} \;\cup\; (\kappa \times \mu) \times \{1\}. \qquad ❏$$

Der Satz ergibt sofort $|a \cup b| = \max\{|a|, |b|\}$, falls $a \cup b$ (und damit mindestens einer der Summanden) unendlich ist. Speziell gilt danach $\kappa + n = \kappa$ für $\kappa \geqslant \omega$ und $n \in \omega$. Ferner gilt für eine unendliche Menge a und eine beliebige abzählbare Menge b demnach immer auch $a \cup b \sim a$ und dasselbe ist der Fall, solange nur $|b| \leqslant |a|$.

Satz 2.4. *Es gelten die Potenzregeln*

$$\text{(a) } \kappa^{\mu+\nu} = \kappa^{\mu} \cdot \kappa^{\nu}, \quad \text{(b) } (\kappa^{\mu})^{\nu} = \kappa^{\mu \cdot \nu}, \quad \text{(c) } (\kappa \cdot \mu)^{\nu} = \kappa^{\nu} \cdot \mu^{\nu}, \quad \text{(d) } |\mathfrak{P}(\kappa)| = 2^{\kappa}.$$

Ferner gelten (e): *mit* $\nu \leqslant \mu$ *ist auch* $\kappa^{\nu} \leqslant \kappa^{\mu}$ *und* $\nu^{\kappa} \leqslant \mu^{\kappa}$ *(Monotonie der Potenz), sowie* (f): $2 \leqslant \mu \leqslant \kappa \to \mu^{\kappa} = 2^{\kappa}$ *für alle* $\forall \kappa \geqslant \omega$.

Beweis. (a) ist Übung 1. (b): Sei $f \in {}^{\nu}({}^{\mu}\kappa)$ und $f_{\alpha} := f_{\alpha}$. Dann ist $f_{\alpha} : \mu \to \kappa$. Man ordne f_{α} die Funktion $g : \nu \times \mu \to \kappa$ mit $g(\alpha, \beta) = f_{\alpha}(\beta)$ zu. Dies ist eine Bijektion von ${}^{\nu}({}^{\mu}\kappa)$ auf ${}^{\nu \times \mu}\kappa$. Also $(\kappa^{\mu})^{\nu} \sim {}^{\nu}({}^{\mu}\kappa) \sim {}^{\nu \times \mu}\kappa \sim \kappa^{\mu \cdot \nu}$. (c): Sei $f \in {}^{\nu}(\kappa \cdot \mu)$ und $f_{\alpha} = (\beta, \gamma)$. Man ordne f das Paar $(f_{\kappa}, f_{\mu}) \in {}^{\nu}\kappa \times {}^{\nu}\mu$ mit $f_{\kappa} : \alpha \mapsto \beta$ und $f_{\mu} : \alpha \mapsto \gamma$ zu. Dies ist eine Bijektion auf ${}^{\nu}\kappa \times {}^{\nu}\mu$, woraus (c) folgt. (d): Nach 3.1 gibt es eine Bijektion von $\mathfrak{P}(a)$ auf ${}^{a}2$ für jede Menge a, speziell für $a = \kappa$. (e): Sei $\nu \leqslant \mu$. Jedes $f \in {}^{\nu}\kappa$ kann auf triviale Weise zu einem $f' : \mu \to \kappa$ erweitert werden, indem man $f_{\alpha} = 0$ setzt für $\alpha \in \mu \setminus \nu$. Offenbar ist $f \mapsto f'$ injektiv auf ${}^{\nu}\kappa$. Das zeigt ${}^{\nu}\kappa \precsim {}^{\mu}\kappa$. Ferner folgt $\nu^{\kappa} \leqslant \mu^{\kappa}$ einfach aus ${}^{\nu}\kappa \subseteq {}^{\mu}\kappa$. Das bestätigt (e). (f): Sei $\kappa \geqslant \omega$. Dann ist nach dem Bewiesenen $2^{\kappa} \leqslant \mu^{\kappa} \leqslant \kappa^{\kappa} \leqslant (\mathfrak{P}(\kappa))^{\kappa} = (2^{\kappa})^{\kappa} = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^{\kappa}$. ❏

Dank des unbegrenzten Vorrats an Kardinalzahlen lassen sich problemlos auch unendliche Summen und Produkte von Kardinalzahlen bilden.

Definition. Ist $(\kappa_i)_{i \in I}$ eine Familie von Kardinalzahlen, so sei

$$\textstyle\sum_{i \in I} \kappa_i := |\bigcup\{k_i \times \{i\} \mid i \in I\}|, \quad \prod_{i \in I} \kappa_i := |\mathsf{X}_{i \in I} \kappa_i|.$$

Dies sind Verallgemeinerungen von $+, \cdot$, denn z.B. ist $\kappa_0 + \kappa_1 = \sum_{i \in \{0,1\}} \kappa_i$. Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang die schon auf Zermelo zurückgehende und im nächsten Abschnitt verwendete Ungleichung in folgendem

Satz 2.5. *Sind* $(\kappa_i)_{i \in I}$ *und* $(\mu_i)_{i \in I}$ *beliebige Familien von Kardinalzahlen derart, dass* $\kappa_i < \mu_i$ *für alle* $i \in I$, *so ist* $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \mu_i$.

Beweis. Dies ist trivial richtig für $I = \emptyset$, weil $\sum_{i \in \emptyset} \kappa_i = 0$ und $\prod_{i \in \emptyset} \kappa_i = 1$ (man beachte $\mathsf{X}_{i \in \emptyset} \kappa_i = \{\emptyset\}$). Sei also $I \neq \emptyset$. Es genügt offensichtlich zu beweisen

$$(*) \quad \textstyle\bigcup\{\kappa_i^* \mid i \in I\} \prec \mathsf{X}_{i \in I} \mu_i, \quad \text{mit } \kappa_i^* := \kappa_i \times \{i\}.$$

Sei $f: \bigcup\{\kappa_i^* \mid i \in I\} \to \bigtimes_{i \in I} \mu_i$ gegeben durch $f(\alpha, i) := f_{\alpha,i} \in \bigtimes_{i \in I} \mu_i$; hierbei ist $(\alpha, i) \in \kappa_i^*$ und die Funktion $f_{\alpha,i}$ sei an der Stelle $j \in I$ definiert durch $f_{\alpha,i}(j) = k_j$ für $j \neq i$ und $f_{\alpha,i}(j) = \alpha$ für $j = i$. Die Funktion f ist injektiv, denn $f_{\alpha,i}$ bestimmt eindeutig den Index i als dasjenige i mit $f_{\alpha,i}(i) < \kappa_i$ und α als $f_{\alpha,i}(i)$. Wir zeigen nunmehr, dass kein $f: \bigcup\{\kappa_i^* \mid i \in I\} \to \bigtimes_{i \in I} \mu_i$ surjektiv ist, womit $(*)$ bewiesen wäre. Sei also f gegeben und $g \in \bigtimes_{i \in I} \mu_i$ erklärt durch

$$g(i) := \text{kleinstes } \alpha \in \mu_i \text{ mit } \alpha \notin \{h(i) \mid h \in \mathit{ran}(f \restriction \kappa_i^*)\}.$$

g_i ist wohlerklärt, weil $\mu_i \setminus a_i \neq \emptyset$, mit $a_i := \{h(i) \mid h \in \mathit{ran}(f \restriction \kappa_i^*)\}$. In der Tat, wegen $|\kappa_i^*| = \kappa_i$ ist $|\mathit{ran}(f \restriction \kappa_i^*)| \leqslant \kappa_i$ und dann auch $|a_i| \leqslant \kappa_i$, weil $h_i : \mathit{ran}(f \restriction \kappa_i^*) \xrightarrow{\text{sur}} a_i$. Das zeigt $\mu_i \setminus a_i \neq \emptyset$ wegen $\mu_i > \kappa_i$. Wir zeigen nunmehr $g \notin \mathit{ran}\, f$. Denn sei $i \in I$, $\alpha \in \kappa_i$ gegeben. Nach Definition von g ist $g(i) \notin \{h(i) \mid h \in \mathit{ran}(f \restriction \kappa_i^*)\}$, also $g(i) \neq f_{\alpha,i}(i)$ und damit $g \neq f_{\alpha,i}$. ❑

Übungen

1. Man beweise $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$.

   Hinweis. Es genügt zu zeigen ${}^{b \cup c}a \sim {}^b a \times {}^c a$ für beliebige Mengen a, b, c mit $b \cap c = \emptyset$. Man ordne f aus ${}^{b \cup c}a$ das geordnete Paar $(f \restriction b, f \restriction c)$ aus ${}^b a \times {}^c a$ zu. Dies ist eine Bijektion auf ${}^b a \times {}^c a$.

2. Man beweise $\kappa^n = \kappa$ für alle unendlichen κ und $n \neq 0$.

3. Man beweise, es gibt ein f mit $f: b \xrightarrow{\text{sur}} a$ genau dann, wenn $0 < |a| \leqslant |b|$. Demnach gilt stets $|\mathit{ran}\, f| \leqslant |\mathit{dom}\, f|$ für jede Funktion f.

   Hinweis. Übung 2 in **4.1**.

4. Man beweise (ohne AC) $|\bigcup_{\beta<\alpha} a_\beta| \leqslant \sum_{\beta<\alpha} |a_\beta|$.

   Hinweis. Ähnlich wie Satz 2.2. Für $x \in a_\beta$ sei $g(x) := (x, \gamma)$. Dabei sei γ minimal mit $x \in a_\gamma$.

5. Sei $\mathfrak{P}_\kappa(a) := \{u \subseteq a \mid |u| < \kappa\}$ und $\mathit{Seq}_\kappa(a) := \bigcup\{{}^\alpha a \mid \alpha < \kappa\}$. Offenbar ist $\mathfrak{P}_\omega(a)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von a und $\mathit{Seq}_\omega(a)$ die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus a. Man beweise $|\mathfrak{P}_\omega(a)| = |\mathit{Seq}_\omega(a)| = |a|$ für jede unendliche Menge a.

6.3 Konfinalität – Reguläre Kardinalzahlen

Während offenbar $\aleph_\omega = \sup\{\aleph_n \mid n \in \omega\}$, also $\aleph_\omega$ das Supremum einer abzählbaren Folge von kleineren Ordinalzahlen ist, gilt dies keineswegs auch für $\aleph_1$, obwohl doch $\aleph_1 < \aleph_\omega$. Die kleinste Ordinalzahl α mit $\aleph_1 = \sup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ für eine Folge von Ordinalzahlen $< \aleph_1$ der Länge α ist $\alpha = \aleph_1$ selbst; denn für abzählbares α hat eine derartige Folge nach Übung 4 in **5.3** immer ein Supremum $< \aleph_1$.

Definition. Die *Konfinalität* $cf(\kappa)$ einer Kardinalzahl $\kappa \geqslant \aleph_0$ sei die kleinste Ordinalzahl α, für die eine mit κ konfinale Folge $f : \alpha \to \kappa$ der Länge α existiert, d.h. für die $\sup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \kappa$. Eine Kardinalzahl $\kappa \geqslant \aleph_0$ heißt *regulär*, wenn $cf(\kappa) = \kappa$ und *singulär* sonst.

Weil die identische Folge der Länge κ trivialerweise mit κ konfinal ist, gilt offenbar $cf(\kappa) \leqslant \kappa$. Für reguläre Kardinalzahlen κ ist $cf(\kappa) = \kappa$, für singuläre $cf(\kappa) < \kappa$. So ist $\aleph_1$ regulär, denn der Limes einer abzählbaren monoton wachsenden Folge abzählbarer Ordinalzahlen ist selbst abzählbar. Nicht nur $\aleph_1$, sondern alle Kardinalzahlen der Gestalt $\aleph_n$ mit $n \in \omega$ sind regulär, wie man sehr einfach einsieht. $\aleph_\omega$ ist die erste singuläre Kardinalzahl. Sie ist eine *Limeskardinalzahl*. So heißen Kardinalzahlen der Gestalt $\aleph_\lambda$, wobei λ stets eine ordinale Limeszahl bezeichne. Die auf eine Kardinalzahl κ folgende Kardinalzahl wird allgemein mit κ^+ bezeichnet.

Satz 3.1. *$\alpha := cf(\kappa)$ ist eine Kardinalzahl $\geqslant \aleph_0$. Ferner ist κ immer auch mit einer monotonen Folge $f : \alpha \to \kappa$ konfinal. Schließlich gilt $cf(cf(\kappa)) = cf(\kappa)$, d.h. $cf(\kappa)$ ist immer eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis. Sei $\mu := |\alpha| \leqslant \alpha$ und $f : \alpha \to \kappa$ mit κ konfinal. Ferner sei $g : \alpha \leftrightarrow \mu$. Dann ist offenbar $h := f \cdot g$ eine mit κ konfinale Folge von Ordinalzahlen $< \kappa$ der Länge μ. Wegen der minimalen Bestimmung von α folgt $\mu = \alpha$, d.h. α ist Kardinalzahl. Auch kann α nicht endlich sein, weil das Supremum einer endlichen Ordinalzahlfolge immer das Maximum ihrer Glieder ist, also $< \kappa$ verbleibt. Wir erklären nun eine monotone Folge $f' : \alpha \to \kappa$ durch $f'(\beta) := \sup\{f(\gamma) \mid \gamma < \beta + 1\}$ für $\beta < \alpha$. Weil mit $\beta < \kappa$ auch $\beta + 1 < \kappa$, ist f' wohlerklärt und offensichtlich monoton. Auch gilt $f' : \alpha \to \kappa$, weil $\sup\{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\} < \kappa$ solange $\beta < \alpha$. Um nun auch $cf(a) = \alpha$ zu beweisen, wählen wir eine Folge $g : cf(a) \to \alpha$ und eine monotone Folge $f : \alpha \to \kappa$ und zeigen, die Folge $h := f \cdot g$ der Länge $cf(a)$ ist unbeschränkt in κ und mit κ daher konfinal, was die Behauptung offensichtlich impliziert. Sei also $\beta \in \kappa$. Dann gibt es ein $\gamma_0 \in \alpha$ mit $f(\gamma) \geqslant \beta$ für alle γ mit $\gamma_0 \leqslant \gamma < \alpha$, sowie ein $\delta \in cf(a)$ mit $g(\delta) \geqslant \gamma_0$. Dann ist $h(\delta) \geqslant \beta$, d.h. h wächst unbeschränkt. ❏

Eine singuäre Kardinalzahl ν ist stets Limeskardinalzahl. Denn sei $\mu := cf(\nu) < \nu$ und $f : \mu \to \nu$ konfinal mit ν. Angenommen $\nu = \kappa^+$. Dann ist $|f(\beta)| \leqslant \kappa$ für alle $\beta < \mu$. Mit Übung 4 in **6.2** für $a_\beta = f(\beta)$ folgt damit aber

$$\nu = |\nu| = |\bigcup_{\beta<\mu} f(\beta)| \leqslant \sum_{\beta<\mu} |f(\beta)| \leqslant \mu \cdot \kappa < \nu.$$

Dieser Widerspruch zeigt, ν ist tatsächlich Limeskardinalzahl. Man kann widerspruchsfrei annehmen [1)], es gibt keine regulären Limeskardinalzahlen. Aber es ist eine offene Frage, ob diese Nichtexistenz nicht schon in ZFC beweisbar ist.

Ist $\mu < \kappa$ für eine singuläre Kardinalzahl $\kappa = \aleph_\lambda$, so gilt immer auch $\mu^+ < \kappa$. Den Nutzen der Konfinalität für ein detaillierteres Studium der Exponentiation ersieht man aus folgendem Satz, wonach insbesondere $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. Denn die Annahme $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$ führt wegen $cf(\aleph_\omega) = \aleph_0$ zu $\aleph_0 = cf(2^{\aleph_0})$, was für $\kappa = \aleph_0$ im Widerspruch zu (b) im Satz steht. Man erhält so wenigstens eine partielle Information über mögliche oder unmögliche Werte von $2^{\aleph_0}$.

Satz 3.2. *Für alle* $\kappa \geqslant \aleph_0$ *gelten* (a) $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$, (b) $\kappa < cf(2^\kappa)$.

Beweis. Ist κ regulär, so $\kappa^{cf(\kappa)} = \kappa^\kappa = 2^\kappa > \kappa$ nach bewiesenen Sätzen. Sei κ nun singulär, $\mu := cf(\kappa)$ $(< \kappa)$ und $f : \mu \to \kappa$ mit κ konfinal. Ersetzt man $f(\beta)$ durch $|f(\beta)|^+$ $(> f(\beta))$, so ist wegen $|f(\beta)| < \kappa$ für $\beta < \mu$ auch $|f(\beta)|^+ < \kappa$, so dass man o.B.d.A. annehmen darf, $(f(\beta))_{\beta<\mu}$ ist eine Kardinalzahlfolge. Das ergibt mit Übung 4 in **6.2** und Satz 2.5 die Behauptung (a), also $\kappa < \kappa^\mu$ wie folgt:

$$\kappa = \bigcup_{\beta<\mu} f(\beta) \leqslant \sum_{\beta<\mu} f(\beta) < \prod_{\beta<\mu} \kappa = \kappa^\mu.$$

Behauptung (b) gilt nach den bereits bewiesenen Sätzen, falls 2^κ regulär ist. Sei also $\mu := cf(2^\kappa) < 2^\kappa$. Angenommen $\mu \leqslant \kappa$. Wie im Beweis von (a) gibt es dann eine mit 2^κ konfinale Kardinalzahlfolge $f : \mu \to 2^\kappa$ und es gilt, wiederum nach Übung 4 in **6.2** und Satz 2.5,

$$2^\kappa = \bigcup_{\beta<\mu} f(\beta) \leqslant \sum_{\beta<\mu} f(\beta) < \prod_{\beta<\mu} 2^\kappa = (2^\kappa)^\mu = 2^{\kappa\cdot\mu} = 2^\kappa.$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt (b). ❏

Man könnte (b) noch verbessern zu $\kappa < cf(\nu^\kappa)$ für alle $\nu > 1$, doch überlassen wir diesen Nachweis dem Leser.

[1)] Dies bedeutet nach allgemeinem Konsens soviel wie konsistent relativ zu ZFC, was nach der in [Gödel 1938] bewiesenen relativen Konsistenz des Auswahlaxioms dasselbe bedeutet wie konsistent relativ zu ZF. Ob ZF tatsächlich konsistent ist, werden wir vermutlich nie wissen.

Literatur

P. Benacerraf, H. Putnam (Hrsg.) [1964], *Philosophy of Mathematics*, (Englewood Cliffs NJ 1964) 2. Aufl. Cambridge Univ. Press 1983.

É. Borel [1898], *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris 1898.

G. Cantor [1895], *Beiträge zur Begründung der transifiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46 (1895), 481–512, oder in [Cantor 1932].

——— [1932], *Gesammelte Abhandlungen* (Hrsg. E. Zermelo), (Berlin 1932) Springer 1980.

P. J. Cohen [1963], *The independence of the contiuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. 50 (1963), 1143–1148.

R. Dedekind [1888], *Was sind und was sollen die Zahlen?*, (Braunschweig 1888) 10. Aufl. Vieweg 1969, oder in [Dedekind 1930, Bd. 3, 335–391].

——— [1930], *Gesammelte mathematische Werke* (Hrsg. R. Fricke et al.), Bd. 1–3, Vieweg, Bd. 1 1930, Bd. 2 1931, Bd. 3 1932.

O. Deiser [2002], *Einführung in die Mengenlehre*, (Berlin 2002) 2. Aufl. Springer 2004.

——— [2008], *On the development of the notion of a cardinal number*, erscheint voraussichtlich (2008).

H.-D. Ebbinghaus [1977], *Einführung in die Mengenlehre*, (Darmstadt 1977) 4. Aufl. Spectrum Akad. Verlag 2003.

S. Fefermann [1965], *Some applications of the notions of forcing and generic sets*, Fund. Math. 56 (1965), 325–345.

W. Felscher [1978], *Naive Mengen und Abstrakte Zahlen*, Bd. 1–3, BI-Wiss.-Verlag, Bd. I, II 1978, Bd. III 1979.

U. Friedrichsdorf, A. Prestel [1985], *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg 1985.

K. Gödel [1938], *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. 24 (1938), 556–557.

F. Hausdorff [1914], *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

——— [2002], *Grundzüge der Mengenlehre* (Hrsg. E. Brieskorn et al.), Felix Hausdorff Gesammelte Werke, Bd. II, Springer 2002.

T. Jech [1978], *Set Theory*, (New York 1978) korrigierter Nachdruck der 3. Aufl. Springer 2007.

K. Kunen [1980], *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland 1980.

K. Kuratowski [1921], *Sur la notion de l'ordre dans la théory des ensembles*, Fund. Math. 3 (1921), 161–171.

J. von Neumann [1925], *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, J. reine u. angew. Math. 154 (1925), 219–240.

——— [1928], *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, Mathematische Annalen 99 (1928), 373–391.

W. Rautenberg [1987], *Über den Cantor–Bernsteinschen Äquivalenzsatz*, Mathematische Semesterberichte 34 (1987), 71–88.

——— [1996], *Einführung in die mathematische Logik*, (Wiesbaden 1996) 2. Aufl. Vieweg 2002.

——— [2006], *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer 2006.

J. R. Shoenfield [1977], *Axioms of Set Theory*, in *Handbook of Mathematical Logic* (Hrsg. J. Barwise), North-Holland 1977, 321–344.

A. Tarski [1955], *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its application*, Pacific J. Math. 5 (1955), 285–309.

E. Zermelo [1908], *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen 65 (1908), 261–281.

——— [1930], *Grenzzahlen und Mengenbereiche, Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Fund. Math. 16 (1930), 29–47.

Namens- und Sachverzeichnis

G

H

I

K

L

M

N

O

Symbolverzeichnis