Differentialgleichungen mit Delay

Feliks Nüske, Phillip Berndt

19. November 2010

In diesem Vortrage wollen wir die Grundlagen für eine recht allgemeine Klasse von Differentialgleichungen mit Delay bereitstellen. Über die gesamte Zeit wollen wir diese auch als *Retarded Functional Differential Equations (RFDEs)* bezeichnen. Ziel soll es sein, zunächst die Begrifflichkeiten zu präzisieren und anschließend die gleichen oder ähnliche Resultate über Existenz, Eindeutigkeit, stetige Abhängigkeit, Fortsetzbarkeit und Differenzierbarkeit von Lösungen zu erlangen, wie wir sie bereits für gewöhnliche Differentialgleichungen erarbeitet hatten.

1 Notation

Seien $\sigma, r > 0$ reelle Zahlen, $C := C^0([-r,0],\mathbb{R}^n)$ der Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-r,0]$. Für eine stetige Funktion $x : [\sigma - r, \sigma + T] \to \mathbb{R}^n$ und ein $t \in [\sigma, \sigma + T]$ definieren wir auf $[-r,0]$ eine stetige Funktion x_t durch $x_t(\theta) := x(t+\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$. x_t entspricht also der Auswertung der Funktion x auf zu allen Zeiten von $t-r$ bis t. Damit können wir nun die allgemeine Form einer RFDE zu gegebener rechter Seite f schreiben als:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1.1}$$

Entsprechend heißt x, für eine gegebene Funktion $\phi : [-r,0] \to \mathbb{R}^n$, Lösung der Gleichung (1.1) mit Anfangswert ϕ und Startzeit $\sigma > 0$, falls es ein $T > 0$ gibt, sodass Gleichung (1.1) auf $[\sigma - r, \sigma + T]$ gelöst wird und $x_\sigma = \phi$ gilt. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit einer stetigen Funktion x auf dem Intervall $[\sigma - r, \sigma + T]$ folgt, dass die Funktionen x_t stetig in t sind. Führen wir dann für $\phi \in C$ noch die Funktion $\tilde{\phi} : [\sigma - r, \infty] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\tilde{\phi}_\sigma := \phi, \quad \tilde{\phi}(\sigma + t) := \phi(0), \quad t \geq 0 \tag{1.2}$$

ein, und schreiben $x(\sigma+t)=\tilde{\phi}(\sigma+t)+y(t), \quad t\geq -r$, dann ist die folgende äquivalente Umformulierung des Anfangswertproblems für die Gleichung (1.1) möglich:

$$y_0 = 0, \tag{1.3}$$

$$y(t) = \int_0^t f(\sigma+s, \tilde{\phi}_{\sigma+s}+y_s)ds, \quad t\geq 0 \tag{1.4}$$

2 Existenz und Eindeutigkeit

Um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zu beweisen, wollen wir an sich vorgehen, wie wir beim Satz von Picard-Lindelöff vorgegangen sind. Wir wollen Gleichung (1.4) als Fixpunktgleichung auffassen. Wir werden dafür aber nicht mehr den Banach'schen Fixpunktsatz gebrauchen können. Stattdessen wollen wir die Kompaktheit des Lösungsoperators beweisen und dann den Schauder-Fixpunktsatz anwenden. Wir führen zunächst für positive Konstanten α, β noch folgende Bezeichnungen ein:

$$I_\alpha := [0,\alpha], B_\beta := \{\psi \in C : |\psi| \leq \beta\},$$
$$\mathcal{A}(\alpha,\beta) := \{y \in C([-r,\alpha],\mathbb{R}^n) : y_0 = 0, |y(t)| \leq \beta \quad \forall t \in I_\alpha\}.$$

Wir beobachten vorab folgende Dinge:

Lemma 2.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}\times C$ und $W \subset \Omega$ kompakt, sowie $f^0 \in C(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es Umgebungen $V \subset \Omega$ von W und $U \subset C^0(V,\mathbb{R}^n)$ von f^0, sodass f^0 auf V beschränkt ist und alle $f \in U$ auf V gleichmäßig beschränkt sind:*

$$|f(\sigma,\phi)| \leq M \quad \forall(\sigma,\phi) \in V, f \in U. \tag{2.1}$$

Außerdem gibt es positive Konstanten α, β, sodass für alle Startpunkte (σ^0,ϕ^0) im Kompaktum W und alle $y \in \mathcal{A}(\alpha,\beta)$ die Trajektorie $(\sigma^0+t, y_t+\tilde{\phi^0}_{\sigma^0+t})$ in V enthalten ist.

Beweis. f^0 ist auf dem Kompaktum W beschränkt. Wir können die Schranke M an f^0 auch zuerst etwas zu groß wählen. Dann können wir $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ wählen und die Umgebung V definieren als $V := \{(\sigma^0+t, \phi^0+\psi) : (\sigma^0,\phi^0) \in W, t \in I_{\bar{\alpha}}, \psi \in B_{\bar{\beta}}\}$. Dann ist f^0 auf V immer noch echt kleiner als M, und dann gibt es auch eine Umgebung U, sodass (2.1) immer noch in U erfüllt ist. Jetzt können wir für ein $\beta < \bar{\beta}$ stets ein $\alpha < \bar{\alpha}$ wählen, sodass $|\tilde{\phi}^0_{\sigma^0+t} - \phi^0| \leq \bar{\beta}-\beta$ für alle $t \in I_{\bar{\alpha}}$ gilt. Dann ist aber $|y_t + \tilde{\phi}^0_{\sigma^0+t} - \phi^0| < \bar{\beta}$ und somit ist auch die letzte Behauptung erfüllt.

■

Jetzt können wir unser wesentliches Lemma beweisen:

Lemma 2.2: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ offen, $W \subset \Omega$ kompakt und $f^0 \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gegeben. Seien außerdem U, V sowie M, α, β die zuvor hergeleiteten Umgebungen bzw. Konstanten. Definiere dann die Abbildung T durch:*

$$T : W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta) \to C^0([-r, \alpha], \mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = 0, \quad -r \leq t \leq 0, \tag{2.3}$$

$$T(\sigma, \phi, f, y)(t) = \int_0^t f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s) ds, \quad t \in I_\alpha. \tag{2.4}$$

Dann ist T stetig und es gibt eine kompakte Menge K in $C^0([-r, \alpha], \mathbb{R}^n)$, sodass T nach K abbildet. Falls $M\alpha \leq \beta$ gilt, dann bildet T sogar nach $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ ab.

Beweis. Für alle $t, \tau \in I_\alpha$ erhalten wir aus Gleichung (2.1), dass:

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t) - T(\sigma, \phi, f, y)(\tau)| \leq M|t - \tau|, \tag{2.5}$$

$$|T(\sigma, \phi, f, y)(t)| \leq M\alpha. \tag{2.6}$$

Die Menge der stetigen Funktionen auf $[-r, \alpha]$, die diese Bedingungen erfüllen, ist abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig. Also ist sie nach dem Satz von Arzela-Ascoli kompakt, und wir wählen sie einfach als die Menge K. Auch die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus (2.6). Bleibt nur noch die Stetigkeit von T zu zeigen. Betrachte dazu eine Folge $(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k) \subset W \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)$. Die Folge $T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)$ liegt in K und besitzt daher eine gleich benannte konvergente Teilfolge, die einem Grenzwert γ zustrebt. Betrachte nun für $s \in I_\alpha$ die Folge von Funktionen $f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k{}_{\sigma^k+s} + y^k_s)$. Diese Funktionen sind gleichmäßig beschränkt und konvergieren punktweise gegen $f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}^0{}_{\sigma^0+s} + y^0_s)$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue gilt dann aber:

$$\gamma(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t f^k(\sigma^k + s, \tilde{\phi}^k_{\sigma^k+s} + y^k_s) ds = \int_0^t f^0(\sigma^0 + s, \tilde{\phi}^0_{\sigma^0+s} + y^0_s) ds = T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0). \tag{2.7}$$

Damit strebt jede konvergente Teilfolge von $T(\sigma^k, \phi^k, f^k, y^k)$ dem gleichen Grenzwert, nämlich γ zu. Dann muss aber die gesamte Folge gegen γ streben, und γ ist gleich $T(\sigma^0, \phi^0, f^0, y^0)$. Der Beweis der Stetigkeit von T ist erbracht. ■

Wir behaupten:

Satz 2.3: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ offen, $f^0 \in C^{0,1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(0, \phi) \in \Omega$. Es gibt ein $0 < \alpha \leq \infty$, sodass es genau eine Lösung von $\mathrm{RFDE}(f^0)$ zum Anfangswert ϕ auf $[-r, \alpha)$ gibt. Diese ist nicht fortsetzbar.*

Den Beweis, der den Schauder'schen Fixpunktsatz verwendet, liefern wir nach. Zunächst wollen wir dieses Resultat benutzen, um zu zeigen, dass Lösungen stetig von den Anfangsdaten abhängen. Der Beweis verlässt sich in hohem Grade auf die beiden letzten Lemmata und wäre zu einem späteren Zeitpunkt zu unverständlich:

3 Stetige Abhängigkeit

Satz 3.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}\times C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ offen, $(0,\phi^0) \in \Omega$, x^0 eindeutige Lösung von $(\mathrm{RFDE}(f^0),\phi^0)$ auf $[-r,\alpha]$. Definiere $W^0 = \{(t,x_t^0) : t \in [0,\alpha]\}$ und wähle eine Umgebung V^0, in der f^0 immer noch beschränkt ist. Für jede Folge $\Omega \times (C(\Omega,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{V_0}) \ni (\phi^k, f^k) \to (\phi^0, f^0)$ gibt es ein k^0, sodass für alle $k > k^0$ eine Lösung x^k auf $[-r,\alpha]$ existiert. Zusätzlich gilt $x^k \rightrightarrows x^0$.*

Beweis. Die Menge $W^0 \cup \{(0,\phi^k) : k \geq k^0\}$ ist für gegebenes k^0 kompakt (denn (ϕ^k) ist eine konvergente Folge). Durch passende Wahl von k^0 (und ggf. Einschränkung von α und β) können wir nun das Beschränktheitslemma anwenden und erhalten eine Nachbarschaft V von W, die noch in V^0 liegt, sowie ein U^{k^0}, das alle weiteren f^k enthält.[1]

Unser Existenzsatz sichert die Existenz einer Lösung für alle Elemente der Folge. Das Beschränktheitslemma liefert insbesondere die Schranke M für alle f^k, sodass für alle f^k T dieselbe die kompakte Bildmenge K hat.[2] Wie vorher definieren wir $y^k = x^k(t) - \tilde{\phi}^k(t) = T(\phi^k, f^k, y^k)$. Da die y^k Fixpunkte von T sind und $\operatorname{ran} T$ kompakt ist, hat jede Teilfolge der y^k eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $y^{k'}$. Aus der Stetigkeit von T folgt zudem $\lim y^{k'} = \lim T(\phi^{k'}, f^{k'}, y^{k'}) = T(\phi^0, f^0, \lim y^{k'})$. Die Lösung zu (f^0,ϕ^0) ist jedoch nach Voraussetzung eindeutig, daher ist der Grenzwert y^0 eindeutig und unabhängig von der spzeiellen Teilfolge.

Dann muss aber auch y^k selbst bereits gegen y^0 konvergieren.

Die Beziehung $x^k = y^k + \tilde{\phi}^k(t)$ sichert dasselbe Ergebnis schließlich auch für x^k. ■

Kommen wir nun zurück zu Schauder!

[1] Das gibt uns die Schranke M an f

[2] Denn die war über M definiert

4 Der Schaudersche Fixpunktsatz

Den nun anstehenden Existenzbeweis wollen wir wie immer über einen Fixpunktsatz führen. Unser Problem liegt allerdings in einem unendlichdimensionalen Raum (nämlich $\Omega = \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$), sodas wir mit Brouwer nicht mehr weit kommen.

Wir definieren eine Erweiterung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes. Weil der Beweis so leichter nachvollziehbar ist, formulieren wir den folgenden Satz zunächst für leicht andere Voraussetzungen als wir benötigen:

Satz 4.1 (Erweiterung von Brouwers Fixpunktsatz): *Sei C eine kompakte, konvexe Menge in einem Banachraum B und T eine stetige Abbildung $T : C \to C$. Dann hat T einen Fixpunkt, d.h. $Tx = x$ für ein $x \in C$.*

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Da C kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_N \in C$, sodass $C \subset \bigcup_{i=1}^N B_{1/k}(x_i) =: \bigcup_{i=1}^N B_i$. Sei $C_k \subset C$ die konvexe Hülle von $\{x_1, \ldots, x_N\}$, d.h.

$$C_k = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

und definiere $J_k : C \to C_k$ durch:

$$J_k(x) = \frac{\sum_i \operatorname{dist}(x, C \setminus B_i) x_i}{\sum_j \operatorname{dist}(x, C \setminus B_j)}$$

J_k ist stetig, also ist $J_k \circ T_{|C_k}$ eine stetige Abbildung von C_k nach C_k. Nach Brouwer (C_k ist homöomorph zu einem B^n) hat diese einen Fixpunkt x_k. Da C kompakt ist existiert eine TF der x_k mit $x_{k'} \to x \in C$,

$$\|x_{k'} - Tx_{k'}\| = \|J_k \circ Tx_{k'} - Tx_{k'}\| \leq \frac{1}{k'} \tag{*}$$

Die letzte Abschätzung gilt dabei, da für alle $x \in C$ gilt:

$$\|J_k(x) - x\| \leq \frac{\sum_i \operatorname{dist}(x, C \setminus B_i) \|x_i - x\|}{\sum_j \operatorname{dist}(x, C \setminus B_j)} \leq \frac{1}{k}$$

Damit gilt dann $x = Tx$ und wir sind fertig.

■

Für unseren Existenzbeweis haben wir eine andere Situation: C ist beschränkt und abgeschlossen, aber nicht notwendigerweise kompakt. $T(C)$ ist dafür totalbeschränkt. Wir können den Beweis leicht anpassen: Wir brauchen nur eine Möglichkeit, endlich viele Punkte x_n als Überdeckung und so zu wählen, sodass wir in (*) weiterhin von der $\frac{1}{k}$-Schranke ausgehen können. Dort werden aber Punkte aus dem Bild $T(C)$ miteinander verglichen! Also wähle eine Überdeckung des Bildes, die die nötigen Eigenschaften hat und die Mittelpunkte der Urbilder der Kugeln der Überdeckung als $x_1, \ldots, x_N$.

Damit ist es nun einfach, zu beweisen:

5 Existenz

Satz 5.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ offen, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $(0, \phi) \in \Omega$. Es gibt eine Lösung von $\mathrm{RFDE}(f^0)$ zum Anfangswert ϕ.*

Beweis. Wähle $W = \{(0, \phi)\}$ und α, β passend ($M\alpha < \beta$). $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$ ist abgeschlossen, beschränkt durch β und konvex in C. Nach dem Lemma von vorhin bildet $T(\phi, f^0, \cdot)$ stetig $\mathcal{A}$ in eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{A}$ ab. Also dürfen wir schaudern! ■

Bemerkung 5.2: Zur Konvexität: Seien $f, g \in \mathcal{A}(\alpha, \beta)$. Betrachte für $t \in (0, 1)$ die Funktion $h : tf + (1-t)g$. z.Z. ist nur, dass $h \leq \beta$ auf $[-r, \alpha]$:

$$\|tf + (1-t)g\| \leq t \sup f + (1-t) \sup g \leq (1 + t - 1)\beta = \beta$$

Bemerkung 5.3: Der Fixpunkt ist aber nicht die Lösung! Lösung ist $x(t) = \tilde{\phi} + y$!

6 Eindeutigkeit

Satz 6.1: *Wenn f lokal lipschitzstetig in Ω ist, ist eine Lösung eindeutig.*

Beweis. Angenommen x und y sein Lösungen von $(\mathrm{RFDE}(f), \phi)$ auf $[-r, \alpha]$. Wähle die Lipschitzkonstante k passend zu einem Gebiet, dass die Trajektorien $\Omega \ni (t, x_t)$, (t, y_t) für

$0 < t < \alpha$ enthält und $t^* < t$ sodass $t^* k < 1$. Es gilt:

$$\|x(t) - y(t)\| = \| \int_0^t f(s, x_s) - f(s, y_s) ds\| \leq \int_0^t k \|x_s - y_s\| ds \leq kt^* \sup_{0 \leq s \leq t} \|x_s - y_s\|$$

Es folgt $x \equiv y$ auf $[0, t^*]$. Iteriere nun, bis die Eindeutigkeit überall gezeigt ist.

■

7 Fortsetzbarkeit von Lösungen

Wir nennen eine Lösung y eine Fortsetzung von x, wenn gilt $D(x) \subset D(y)$ und $x \equiv y$ auf $D(x)$. Das Zorn'sche Lemma[3] sichert zu, dass es eine maximale, nicht fortsetzbare Lösung gibt.

Wir werden uns in diesem Abschnitt mit dem Verhalten von Lösungen am Rand des Definitionsbereiches beschäftigen.

Satz 7.1 (Das maximale Existenzintervall ist offen): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ offen, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, W kompakt enthalten in Ω. Ist x eine nicht-fortsetzbare Lösung auf $[-r, \alpha)$, so gibt es ein $t^* \in \mathbb{R}$ mit $(t, x_t) \notin W \; \forall \; t \in [t^*, b)$.*

Beweis. Der Fall $\alpha = \infty$ ist trivial und der Fall $r = 0$ aus Dynamics bekannt. Also nimm an $\alpha < \infty, r > 0$. Ist die Aussage falsch, so gibt es eine Folge $W \supset (t^k, x_{t^k}) \to (\alpha, \psi) \in W$.[4] Damit gilt für $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to \infty} \|x_{t^k} - \psi\|_{[-r, -\varepsilon]} = 0$$

Das impliziert $x(\alpha + \theta) = \psi(\theta) \; \forall \; \theta \in [-r, 0)$. Da ψ eine stetige Fortsetzung von x ist, können wir jetzt eine Lösung rechts von α finden. Widerspruch.

■

Bemerkung 7.2: Zum Fall $r = 0$: Da W kompakt ist wähle $\alpha > 0$ sodass für alle $(0, \phi_0) \in W$ eine Lösung auf $[0, \alpha]$ existiert. Ist die Behauptung falsch, so gibt es eine Folge $(t_k, x(t_k)) \to (t, y) \in W$. Da f in einer Umgebung von (α, y) beschränkt ist, ist x gleichmäßig stetig auf $[0, \alpha)$ und damit fortsetzbar durch $x(\alpha) = y$. Nun können wir erneut

[3] Jede nichtleere halbgeordnete Menge, in der jede Kette (d.h. jede total geordnete Teilmenge) eine obere Schranke hat, enthält mindestens ein maximales Element.

[4] Wäre α nicht in W wäre die Aussage ziemlich offensichtlich richtig

eine Lösung finden. Widerspruch.

Satz 7.3: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ offen und $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, x nicht-fortsetzbare Lösung auf $[-r, b)$ und $W = \overline{\{(t, x_t) : t \in [0, b)\}}$ kompakt. Es gibt eine Folge $t_k \to b$ so dass $(t_k, x_{t_k}) \to (t, x) \in \partial\Omega$. Ist $k > 0$ so ist $x \in C$.*

Beweis. $W \not\subset \Omega$, denn sonst würde der vorhergehende Satz uns einen Punkt der Trajektorie liefern, der nicht in W (dem Abschluss der Trajektorie) enthalten ist. W definiert dann die gesuchte Folge. Ist $k > 0$ können wir wie oben eine stetige Fortsetzung konstruieren.

∎

Satz 7.4: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ offen, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ totalbeschränkt, U eine beschränkte Teilmenge von Ω und x eine nicht-fortsetzbare Lösung auf $[-r, \alpha)$. Es gibt ein t^* sodass $(t, x_t) \notin U \ \forall\ t \in [t^*, \alpha)$.*

Beweis. Wiederum zeigen wir den Satz nur für $r > 0$ und $\alpha < \infty$. Nimm wieder an, die Aussage sei falsch und es gebe eine Folge $(t_k, x_{t_k}) \to (\alpha, x) \in U$. $x(t)$ ist damit auf $[-r, \alpha)$ beschränkt, denn U ist beschränkt. Definiere wieder $W = \overline{\{(t, x_t) : t \in [0, b)\}}$. Dort ist f dann durch ein M beschränkt. Dann gilt aber

$$\|x(t+\tau) - x(t)\| = \| \int_t^{t+\tau} f(s, x_s) ds \| \leq M\tau < \infty$$

x ist also gleichmäßig stetig auf $[-r, \alpha)$. Dann ist aber W kompakt (Arzelà-Ascoli!) und wir haben durch einen der vorherigen Sätze einen Widerspruch.

∎

Bemerkung 7.5: Ist f nicht totalbeschränkt, ist die Aussage falsch. Das Buch konstruiert auf Seite 46 ein Gegenbeispiel.

8 Differenzierbarkeit der Lösung

Schließlich wollen wir noch zeigen, unter welchen Voraussetzungen die Lösung des Anfangswertproblems (1.4) differenzierbar von den Eingangsdaten ϕ unf f abhängt. Zu diesem Zweck werden wir die Differenzierbarkeitsaussagen für Kontraktionsabbildungen benutzen, wie wir sie auch in Dynamics I verwendet haben. Die eigentliche Aufgabe besteht darin, die Kontraktionseigenschaften für geeignete Umgebungen zu zeigen.

Satz 8.1: *Sei $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann ist die Lösung x des Anfangswertproblems (1.4) nach ϕ und f stetig differenzierbar. Für $t \geq 0$ löst die Ableitung nach dem Anfangswert ϕ, $w(t) := D_\phi x(\sigma, \phi, f)\psi(t)$ das lineare Anfangswertproblem:*

$$w(0) = \psi(0), \tag{8.1}$$
$$\dot{w}(t) = D_\phi f(t, x_t(\sigma, \phi, f))w_t. \tag{8.2}$$

Ebenso löst die Ableitung nach dem Vektorfeld f, $z(t) := D_f x(\sigma, \phi, f)g$, das inhomogene Problem:

$$\dot{z}(t) = D_\phi f(t, x_t(\sigma, \phi, f))z_t + g(t, x_t(\sigma, \phi, f)), \tag{8.3}$$
$$z(0) = 0. \tag{8.4}$$

Beweis. Sei $x(\sigma, \phi, f)$ die Lösung der RFDE durch (σ, ϕ) und wähle ein $b > 0$, das kleiner als die maximale Existenzzeit ist. Auf Grund der stetigen Abhängigkeit gibt es eine Umgebung U von ϕ, sodass die Lösung $x(\sigma, \psi, f)$ für alle $\psi \in U$ auf $[\sigma - r, \sigma + b]$ existiert. Betrachte die Menge $W := \{(t, x_t) : t \in [\sigma, \sigma + b]\}$. W ist kompakt (Arzela-Ascoli), also wähle U, V, α, β, M wie in Lemma 2.1. Wähle α so klein, dass $M\alpha < \beta$ und $k\alpha < 1$, wobei k eine Schranke an die Ableitung von f ist. Schreiben wir dann $x(t + \sigma) = \tilde{\phi}(t + \sigma) + y(t)$ für $t \in I_\alpha$, dann ist y ein Fixpunkt der Abbildung $T(\sigma, \phi, f)$. T ist dann aber eine Kontraktion in $V \times U \times \mathcal{A}(\alpha, \beta)$ mit von $(\sigma, \phi, f) \in V \times U$ unabhängiger Kontraktionskonstante. Folglich ist der Fixpunkt differenzierbar in ϕ und f für $t \in I_\alpha$, denn T ist stetig differenzierbar in ϕ und f. Dieses Argument kann man nun von $\sigma + \alpha$ ausgehend wiederholt anwenden, bis die Differenzierbarkeit für alle $t \in [\sigma, \sigma + b]$ gezeigt ist. Die Kompaktheit erlaubt es, dies in endlich vielen Schritten zu tun.

Zeigen wir noch die Differentialgleichung:

$$w(t) = D_\phi x(\sigma, \phi, f)\psi(t) = D_\phi \left[\tilde{\phi}(\sigma + .) + T(\sigma, \phi, f, y)(.)\right]\psi(t) \tag{8.5}$$
$$= \psi(t) + \int_0^t D_\phi f(\sigma + s, \tilde{\phi}_{\sigma+s} + y_s)w_s ds. \tag{8.6}$$
$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \dot{w}(t) = D_\phi f(\sigma + t, x_t(\sigma, \phi, f))w_t. \tag{8.7}$$
$$t = 0 \Rightarrow w(0) = \psi(0). \tag{8.8}$$

■