Einführung in Delaygleichungen

Eine beschränkte, nicht fortsetzbare Lösung

Am Ende des Vortrags wurden wir gefragt, ob die von ODEs bekannte Aussage, dass nicht-fortsetzbare Lösungen für $t \to t_{\max} < \infty$ „explodieren“ müssen, auf Delay–Gleichungen übertragbar ist. Der Beweis dieser Behauptung im klassischen Fall, der im Prinzip übertragbar auf Delay–Gleichungen ist, zeigt lediglich, dass die Trajektorie (im erweiterten Phasenraum) jede kompakte Menge früher oder später verlässt.[1] In unserem Fall ist der Raum, in dem unsere Lösung lebt, unendlichdimensional, sodass nicht mehr gilt

$$B \text{ kompakt } \Leftrightarrow B \text{ abgeschlossen und beschränkt}$$

Es liegt also nahe, zu erwarten, dass unter den passenden Bedingungen Lösungen in *beschränkten* Mengen bleiben. Dass dies tatsächlich passieren kann illustiert das hier vorgestellte Beispiel.[2]

Betrachte die beiden Folgen

$$a_k = -2^{-k} - 4^{-k}, \quad b_k = -2^{-k}$$

Beide steigen monoton und konvergieren gegen 0 für $k \to \infty$. Außerdem gilt, dass $b_k \leq a_{k+1}$ (es gilt sogar $b_k \leq a_{k+1} - a_{k+1}^2$, denn $a_k = b_k - b_k^2$)

Definiere nun ψ, unsere spätere *Lösung*:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & t \in (-\infty, a_1] \cup_{k\in\mathbb{N}} [b_{2k}, a_{2k+1}] \\ -1 & t \in \cup_{k\in\mathbb{N}} [b_{2k-1}, a_{2k}] \end{cases}$$

und setze ψ zu einer C^1-Funktion auf $(-\infty, 0)$ fort, sodass $\cup_{k\in\mathbb{N}}(a_k, b_k)$ im Träger der Ableitung enthalten und ψ beschränkt bis in 0 hinein ist. Stetigkeit in 0 können wir jedoch sicher nicht erreichen, denn beide Folgen, die wir zur Konstruktion herangezogen haben, konvergieren gegen 0, und ψ oszilliert zwischen den Folgengliedern je von -1 bis 1!

[1] Bzw., dass sie jede beschränkte Menge verlässt, falls die rechte Seite totalbeschränkt ist

[2] Dabei folgen wir Hale/Lunel, Introduction to functional differential equations, p46f

Nun wollen wir uns das Problem zu dieser künstlichen Lösung konstruieren: Definiere[3]

$$h(t-t^2, \psi(t-t^2)) := \partial_t \psi(t), \quad t < 0$$

Setze $h(t,x)$ stetig auf $H := \{(t,x) : |x| < 1-t\}$ fort, sodass $h\big|_{\{|t|+|x|\le 1\}} \equiv 0$.[4]

Wir suchen uns noch eine passende linke Grenze der retardierten Gleichung $-r$, z.B. $r=1$, sowie einen frühen Anfangszeitpunkt, z.B. -1. Nach Konstruktion gilt nun:

- ψ löst die DDE
$$\partial_t x(t) = h(t-t^2, x(t-t^2)), \quad t < 0$$
- h ist stetig
- ψ ist nicht stetig fortsetzbar nach $t=0$ und damit auch nicht zu einer stetigen Lösung auf einem größeren Definitionsbereich fortsetzbar. Trotzdem ist die Menge $\{(t,\psi_t), -2 \le t < 0\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\Omega = \mathbb{R} \times C$.

[3] Zum Verständnis: Nach der p-q-Formel ist $h(t,\psi(t)) = \partial_t \psi(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - t})$ dort, wo sie anwendbar ist.

[4] Es gilt bereits $h=0$ für alle Punkte, in denen ψ steigt oder fällt, denn für t im Intervall (a_k, b_k) gilt $t - t^2 \in [b_{k-1}, a_k]$ und für $t \le 1$ ist $t-^2 \le a_1$. Der Definitionsbereich H läuft keilförmig, nach links geöffnet, auf den Punkt $(1,0)$ zu.