

SEMINARVORTRAG „DARSTELLUNG EINDIMENSIONALER BEWEGUNG“

PHILLIP BERNDT

Zusammenfassung. Der Vortrag baut auf den vorherigen Vorträgen aus dem Seminar im Wintersemester 2009 von Frau Lasser „Seminar zur Mathematik der Quantenmechanik“ an der Freien Universität Berlin auf. Hauptquelle ist [1, §16-19]. Es wird zunächst der harmonische Oszillator mithilfe der abstrakten Operatoren P und Q als Quantensystem eingeführt. Aus den Ergebnissen dieser abstrakten Betrachtung wird dann eine sehr einfache, auf den harmonischen Oszillator spezialisierte Darstellung hergeleitet.

Inhaltsverzeichnis

1. Der harmonische Oszillator	1
1.1. Konstruktion eines Erzeugendensystems von $\mathcal{H}$ mit Eigenvektoren von H	2
2. Darstellung von $\mathcal{H}$ durch ℓ^2	4
2.1. Die Darstellung von a	4
2.2. Die Darstellung von a^*	5
2.3. Einige Schlussfolgerungen	6
2.4. Geschichtliche Anmerkung zur Matrixdarstellung	6
3. Darstellung von $\mathcal{H}$ durch den Raum $\mathcal{D}$ ganzer Funktionen	7
3.1. Die Darstellung von a und a^*	8
4. Koordinatendarstellung	9
Literatur	9

1. Der harmonische Oszillator

Ein System mit dem Schrödingeroperator

$$H = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2 Q^2}{2}, \quad \omega > 0$$

bezeichnet man als *harmonischen Oszillator*.

Entsprechend des Korrespondenzprinzips wird er dabei aus dem entsprechenden klassischen System hergeleitet. Es ist möglich, Lösungen in geschlossener Form anzugeben. Daher stellt der harmonische Oszillator ein wichtiges Modellsystem in der Quantenmechanik dar. Zum Beispiel werden

- Bindungsverhältnisse zwischen Atomen in der Molekülphysik
- Paul-Fallen, die in erster Näherung ein parabolisches Potential aufweisen (Elektrische Quadrupolfelder)
- in der Festkörperphysik, im Einstein-Modell, der Beitrag der Gitterschwingungen zur Wärmekapazität

mithilfe harmonischer Oszillatoren dargestellt. (Siehe [5])

1.1. Konstruktion eines Erzeugendensystems von $\mathcal{H}$ mit Eigenvektoren von H .

Ziel dieses Abschnittes wird es sein, unter Annahme der Existenz wenigstens eines Eigenvektors von H eine Basis aus Eigenvektoren zu finden.

Wir werden dazu die beiden Hilfsoperatoren

$$a^* := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q - iP)$$

und

$$a := \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q + iP)$$

verwenden.

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}\omega a^* a &= \frac{1}{2}(\omega^2 Q^2 + P^2) + \frac{i\omega}{2}(QP - PQ) = H - \frac{\omega}{2} \\ \omega a a^* &= \frac{1}{2}(\omega^2 Q^2 + P^2) + \frac{i\omega}{2}(PQ - QP) = H + \frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

Dabei wurde $[Q, P] = i$ ausgenutzt. Folglich gilt, durch Subtraktion der Gleichungen voneinander, $\omega(aa^* - a^*a) = \omega$ und damit

$$[a, a^*] = 1$$

Wir werden später den Kommutator von $[a, (a^*)^n]$ benötigen. Für diesen ergibt sich

$$\begin{aligned}[a, (a^*)^n] &= a(a^*)^n && - (a^*)^n a \\ &= (aa^*)(a^*)^{n-1} && - (a^*)^n a \\ &= (a^*a + 1)(a^*)^{n-1} && - (a^*)^n a \\ &= a^*a(a^*)^{n-1} && + (a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= a^*(aa^*)(a^*)^{n-2} && + (a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= a^*(a^*a + 1)(a^*)^{n-2} && + (a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= (a^*)^2 a(a^*)^{n-2} && + 2(a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= (a^*)^2 (aa^*)(a^*)^{n-3} && + 2(a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= (a^*)^2 (a^*a + 1)(a^*)^{n-3} && + 2(a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= (a^*)^3 a(a^*)^{n-3} && + 3(a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= \dots \\ &= (a^*)^n a && + n(a^*)^{n-1} - (a^*)^n a \\ &= n(a^*)^{n-1}\end{aligned}$$

Formt man die Gleichungen für a^*a und aa^* um zu

$$\begin{aligned}H &= \omega a a^* - \frac{\omega}{2} \\ H &= \omega a^* a + \frac{\omega}{2}\end{aligned}$$

liefert verschiedene Multiplikation mit a und anschließende Subtraktion

$$Ha - aH = \omega a a^* a - \frac{\omega}{2}a - (\omega a a^* a + \frac{\omega}{2}a) = -\omega a$$

den Kommutator $[H, a]$. Entsprechend gilt auch $[H, a^*] = \omega a^*$.

Eine weitere, für den Rest des Abschnittes sehr wichtige Erkenntnis ist die folgende:

Satz. a^* ist der adjungierte Operator zu a .

Beweis. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
 \langle a\phi, \psi \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q + iP)\phi, \psi \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\langle \omega Q\phi, \psi \rangle + \langle iP\phi, \psi \rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\langle \phi, \omega Q\psi \rangle + \langle \phi, i\bar{P}\psi \rangle) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\langle \phi, (\omega Q - iP)\psi \rangle \\
 &= \left\langle \phi, \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q - iP)\psi \right\rangle \\
 &= \langle \phi, a^*\psi \rangle
 \end{aligned}$$

□

1.1.1. Konstruktion weiterer Eigenvektoren aus einem bekannten Eigenvektor. Da wir $[H, a] = -\omega a$ wissen, gilt

$$\begin{aligned}
 Ha\psi_E &= aH\psi_E - \omega a\psi_E = (E - \omega)a\psi_E \\
 Ha^*\psi_E &= a^*H\psi_E + \omega a^*\psi_E = (E + \omega)a^*\psi_E
 \end{aligned}$$

Anwendung von a bzw. a^* auf einen bekannten Eigenvektor liefert uns also weitere Eigenvektoren.

1.1.2. Untere Schranke für Eigenvektoren. Falls es einen Eigenvektor ψ_E zum Eigenwert E gibt, so gilt

$$\begin{aligned}
 H\psi_E &= (\omega a^*a + \frac{\omega}{2})\psi_E = E\psi_E \\
 \Rightarrow \omega \langle \psi_E, a^*a\psi_E \rangle + \frac{\omega}{2}\|\psi_E\|^2 &= E\|\psi_E\|^2 \\
 \Rightarrow \omega \|a\psi_E\|^2 + \frac{\omega}{2}\|\psi_E\|^2 &= E\|\psi_E\|^2
 \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass a^* der adjungierte Operator zu a ist.

Folglich sind Eigenwerte nach unten durch $\frac{\omega}{2}$ beschränkt. Außerdem ist ein ψ , das $a\psi = 0$ erfüllt, automatisch Eigenvektor. Diesen Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert nennen wir im folgenden ψ_0 .

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass alle diese Berechnungen nur Sinn ergeben, wenn mindestens ein Eigenvektor existiert! Sobald man in die Ortsdarstellung übergeht, ergibt sich die Existenz allerdings aus der Lösungstheorie einfacher Differentialgleichungen (siehe später), sodass es gerechtfertigt ist, dies anzunehmen.

1.1.3. Herstellen von Orthonormalität. Ohne Einschränkung sei ψ_0 normiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \|(a^*)^n\psi_0\|^2 &= \langle (a^*)^n\psi_0, (a^*)^n\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, (a^{n-1}(a^*)^na + na^{n-1}(a^*)^{n-1})\psi_0 \rangle \\
 &= n\|(a^*)^{n-1}\psi_0\|^2 = \dots = n!\|\psi_0\|^2 = n!
 \end{aligned}$$

Dabei wurden alle $(a^*)^n$ von links nach rechts geschoben und dann einmal die Kommutatorrelation $[a, (a^*)^n] = n(a^*)^{n-1}$ ausgenutzt. Da $a\psi_0 = 0$ verschwindet der erste

Term. Man schreibt die a^{n-1} wieder nach links und erhält die Normabschätzung aus der zweiten Zeile. Rekursion liefert das letzte Ergebnis.

Die Vektoren sind orthogonal, denn

$$\langle \psi_k, \psi_n \rangle = \langle \psi_0, a^k (a^*)^n \psi_0 \rangle = 0 \quad \text{für } k \neq n$$

Satz. Das hergeleitete Orthonormalsystem ist vollständig

Einen Beweis dieser Behauptung kann ich leider nicht liefern. Im Seminarvortrag wurde angemerkt, dass rigores Nachrechnen zum Erfolg führt.

1.1.4. Darstellung in ℓ^2 . Folglich kann man alle Vektoren $\psi \in \mathcal{H}$ darstellen als

$$\sum_n C_n \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 \quad \text{mit } (C_n) \in \ell^2$$

Die Einschränkung $(C_n) \in \ell^2$ ist zulässig nach [2, Satz V.4.12], den ich hier der Vollständigkeit halber zitiere:

Satz. Ist S eine Orthonormalbasis von [einem unendlichdimensionalem Hilbertraum] H , so ist $H \cong \ell^2(S)$.

Beweis: Zu $x \in H$ definiere $Tx \in \ell^2(S)$ durch $(Tx)(e) = \langle x, e \rangle$. (Aus der Besselschen Ungleichung folgt $Tx \in \ell^2(S)$.) $T : H \rightarrow \ell^2(S)$ ist linear und nach der Parsevalschen Gleichung isometrisch. Ist $(f_e)_{e \in S} \in \ell^2(S)$, so definiert $x = \sum_{e \in S} f_e e$ ein Element von H [...], und es gilt $Tx = (f_e)_{e \in S}$. Daher ist T ein isometrischer Isomorphismus. $\square$

Für die Eigenschaften des ℓ^2 verweise ich auf [2].

2. Darstellung von $\mathcal{H}$ durch ℓ^2

Nachdem unsere Vorüberlegungen uns eine Basis aus Eigenvektoren geliefert haben, wollen wir in diesem Abschnitt herleiten, wie Operatoren zu dieser Basis dargestellt „aussehen“.

Nach den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts kann man $\mathcal{H}$ mit ℓ^2 identifizieren. Das Skalarprodukt von $\mathcal{H} \ni \psi \leftrightarrow (C_n) \in \ell^2$ und $\varphi \leftrightarrow (B_n)$ wird dann zu

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \sum_n B_n \bar{C}_n$$

Beweis: Die Basisvektoren ψ_n sind orthonormal und das Skalarprodukt ist sesquilinear. $\square$

Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Darstellung der Operatoren a und a^* in dieser Basis ändert.

2.1. Die Darstellung von a .

Seien $\varphi \leftrightarrow (C_n)$ und $a\varphi \leftrightarrow (C'_n)$. Es gilt für $n > 0$

$$\begin{aligned}
 a\varphi &= a \sum_n C_n \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 &= \sum_n C_n \frac{a(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 \\
 &= \sum_n C_n \frac{(a^*)^n a + n(a^*)^{n-1}}{\sqrt{n!}} \psi_0 &= \sum_n C_n \frac{n(a^*)^{n-1}}{\sqrt{n!}} \psi_0 \\
 &= \sum_n C_n \frac{\sqrt{n} n (a^*)^{n-1}}{(\sqrt{n})^2 \sqrt{(n-1)!}} \psi_0 &= \sum_n \sqrt{n} C_n \frac{(a^*)^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \psi_0 \\
 &= \sum_n \sqrt{n+1} C_{n+1} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0
 \end{aligned}$$

Der Sonderfall $n = 0$ erklärt auch, warum die Indexverschiebung im letzten Schritt zulässig war: Für $n = 0$ ist $a(a^*)^0 \psi_0 = a\psi_0 = 0$, also fällt dieser Term weg.

Dass man a (und später a^) in die Summe hineinziehen kann, ist zunächst nicht klar, da P und Q unbeschränkte Operatoren sind. Einen Beweis dafür, dass dieser Schritt gerechtfertigt ist, kann ich leider nicht liefern.*

Damit haben wir die Darstellung für a gewonnen:

$$C'_n = \sqrt{n+1} C_{n+1}$$

Die Linearität von a legt es nahe, eine (informelle) Matrixnotation für a zu verwenden:

$$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2.2. Die Darstellung von a^* .

Seien $\varphi \leftrightarrow (C_n)$ und $a^*\varphi \leftrightarrow (C''_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 a^*\varphi &= a^* \sum_n C_n \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0 &= \sum_n C_n \frac{(a^*)^{n+1}}{\sqrt{n!}} \psi_0 \\
 &= \sum_n \sqrt{n+1} C_n \frac{(a^*)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \psi_0 &= \sum_n \sqrt{n} C_{n-1} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0
 \end{aligned}$$

mit der Konvention $C_{-1} = 0$. Damit gilt

$$C''_n = \sqrt{n} C_{n-1}$$

Wiederum führen wir uns die Bedeutung von a^* durch Darstellung als Matrix vor Augen:

$$a^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2.3. Einige Schlussfolgerungen.

- Offensichtlich gilt in Matrixdarstellung $(a)^T = (a^*)$ und umgekehrt. Man kann nun leicht nachrechnen, dass $[a, a^*] = (a) \cdot (a^*) - (a^*) \cdot (a) = \text{id}$.

Bemerkung. Wenn man die Rechnung anhand einer endlichdimensionalen Matrix nachvollziehen will, wird das letzte Diagonalelement ungleich 1 sein. Die Behauptung ist *nur* im unendlichdimensionalen richtig.

- Wir können nun die bekannten Operatoren ebenfalls in die Matrixdarstellung überführen.

$$\begin{aligned}
 H = \omega a^* a + \frac{\omega}{2} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{3\omega}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{5\omega}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7\omega}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
 P = \frac{\sqrt{\omega}(a - a^*)}{i\sqrt{2}} &\leftrightarrow \frac{\sqrt{\omega}}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
 Q = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} &\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die bekannten Eigenschaften bleiben erhalten: H ist diagonal, denn wir haben ja eine Basis aus Eigenvektoren von H gewählt. P und Q sind selbstadjungiert (beachte das i im Nenner vor P !) und $[Q, P] = i$ (Ohne die Vorfaktoren kommt $\text{diag } 2$ heraus, $\frac{1}{i} = -i$)

2.4. Geschichtliche Anmerkung zur Matrixdarstellung.

Die Darstellung mithilfe von Matrizen wird im Buch nicht ohne Grund eingeführt: Werner Heisenberg, Max Born und Pascual Jordan schufen gemeinsam 1926 die *Matritzenmechanik*. Nachdem Heisenberg in seiner Arbeit „Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen“ die Grundlage für die Matritzenmechanik geschaffen hat, veröffentlichten die drei eine entsprechende Theorie in der „Zeitschrift für Physik“. Die Arbeit wurde als „Dreimännerarbeit“ bekannt.

Heisenberg wollte die Spektrallinien von Wasserstoff berechnen. Sein Ansatz war, von einem klassischen System $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ auszugehen. Er konstruierte Operatoren P und Q , sodass $[Q, P] = i$ erfüllt war, setzte diese ein und bestimmte dann die Eigenwerte des entstandenen Operators H als mögliche (Energie-)zustände. Er leitete dabei alle Rechenregeln her und erkannte insbesondere die Notwendigkeit von Nicht-Kommutativität.

Die eigentliche Arbeit bestand dann darin, eine Störung εQ^3 in den Schrödingeroperator einzuführen und deren Auswirkungen zu betrachten. Diese Theorie führte zur Kopenhagener Deutung, die das EPR-Paradoxon (Einstein, Podolski, Rosen) auflösen konnte.¹

Heisenbergs Paper wird gemeinhin als schwierig und unverständlich angesehen:

If the reader is mystified at what Heisenberg was doing, he or she is not alone. I have tried several times to read the paper that Heisenberg wrote on returning from Heligoland, and, although I think I understand quantum mechanics, I have never understood Heisenberg's motivations for the mathematical steps in his paper. Theoretical physicists in their most successful work tend to play one of two roles: they are either sages or magicians....It is usually not difficult to understand the papers of sage-physicists, but the papers of magicianphysicists are often incomprehensible. In that sense, Heisenberg's 1925 paper was pure magic. Perhaps we should not look too closely at Heisenberg's first paper.....

– Steven Weinberg, Physiknobelpreisträger

Es ist anzumerken, dass Heisenberg die Operatoren in seiner ursprünglichen Arbeit noch nicht als Matrizen erkannt hat. Erst Born bemerkte die Analogie der hergeleiteten Formeln zur Matrixmultiplikation und brachte damit die Idee einer Matrixdarstellung ins Spiel.

Für mehr geschichtliche Hintergründe siehe [3] und [4].

3. Darstellung von $\mathcal{H}$ durch den Raum $\mathcal{D}$ ganzer Funktionen

Bei der Betrachtung von physikalischen Problemen mit polynomialen Observablen P und Q kann es nützlich sein, die Monome z^n (normiert) als Basis zu wählen.

Bemerke, dass jede ganze Funktion nach [6] als (kompakt konvergierende) Potenzreihe darstellbar ist. Die Darstellbarkeit als Potenzreihe ist dabei schon aufgrund der Definition holomorpher Funktionen klar.

Wir betrachten Funktionen der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad \text{mit } (C_n) \in \ell^2$$

Der von diesen Funktionen aufgespannte Raum ist gerade $\mathcal{D}$.

Bei der Gleichheit wurde die eine Richtung dabei bereits oben erläutert, für die andere benötigt man den Weierstraßschen Konvergenzsatz aus der Funktionentheorie:

Satz. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, die auf G lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, das heißt, zu jedem $z \in G$ gibt es eine Umgebung $U \subset G$ von z , so dass f_n auf

¹Das Paradoxon beschreibt die scheinbar simultane Messung komplementärer Größen, indem man zwei Teilchen verschränkt und die Größen an je einem der Teilchen misst. Die Auflösung besteht darin, dass die Kopenhagener Deutung sagt, dass die Messung am zweiten Teilchen eben gar keine Messung einer Eigenschaft des ersten Teilchens ist.

U gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ auf G lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

Beweis. Der Beweis stammt von [7]. Die Grenzfunktion ist stetig. Sei $z_0 \in G$ ein Punkt, $P \Subset G$ ein Polyzylinder um z_0 und T sein ausgezeichneter Rand. Dann gilt:

$$f|_P = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k|_P = \lim_{k \rightarrow \infty} C_{f_k|T}$$

Da T kompakt ist, kann man Integral und Grenzwert vertauschen. So gilt für jedes feste $z \in P$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{f_k|T}(z) = C_{f_k|T}(z) = C_{f|T}(z)$$

Da f auf T stetig ist, hat das Cauchy-Integral $C_{f|T}$ eine Potenzreihenentwicklung auf P . Deshalb ist f holomorph in z_0 . $\square$

Die Normierung mit $\sqrt{n!}$ ist dabei notwendig, um die Konvergenz der Summe zu sichern. Dass sie hier nicht zum Problem wird, muss leider unbegründet bleiben.

Definiere auf $\mathcal{D}$ nun

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f_1(z) \bar{f}_2(z) e^{-|z|^2} dz$$

Satz. $\langle f_1, f_2 \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{D}$.

Beweis. Positive Definitheit ist klar, wenn man bedenkt, dass $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$. Sequiinearität folgt aus den Eigenschaften des Integrals und der Symmetrie der Darstellung. $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ folgt aus den Eigenschaften des Integrals, wenn man bedenkt, dass $e^{-|z|^2}$ strikt positiv ist. $\square$

Satz. Die Vektoren $\frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ bilden ein Orthonormalsystem in $\mathcal{D}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle z^n, z^m \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} z^n(z) \bar{z}^m(z) e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi r^{n+m} e^{i\varphi(n-m)-r^2} \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \sqrt{n!} & n = m \end{cases} \end{aligned}$$

Im ersten Fall ($n \neq m$) wird das Integral über den Einheitskreis gleich 0. Im Fall $n = m$ wird der Integrand zu $r^{2n+1} e^{-r^2}$ wird, also das Integral zu $2\pi \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{2n+1\}\right)$. Durch die Normierung bleibt nun gerade 1 stehen. $\square$

3.1. Die Darstellung von a und a^* .

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt eine Matrixdarstellung gefunden, die uns zeigt, wie a und a^* auf die Faktoren C_n wirken. Da wir die selben C_n verwenden wollen, soll auch die Wirkung erhalten bleiben. Folglich bleibt als Wahl nur

$$a := \frac{d}{dz}, \quad a^* := z$$

Setzt man diese Formeln in die Definitionen von P , Q und H ein ergeben sich:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\frac{d}{dz} + z \right) \\ P &= \frac{\sqrt{\omega}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dz} - z \right) \\ H &= \omega \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

4. Koordinatendarstellung

In der Koordinatendarstellung gelangt man durch einsetzen zu

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega x + \frac{d}{dx} \right) \\ a^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\omega x - \frac{d}{dx} \right) \end{aligned}$$

Da die Gleichung $a\psi_0 = 0$ weiterhin erfüllt sein soll, gilt

$$\omega x \psi_0(x) + \psi_0'(x) = 0$$

Diese ODE wird offensichtlich gelöst durch

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\omega x^2}{2}}$$

Der Vorfaktor ergibt sich aus der Forderung der Normiertheit von ψ_0 .

Anwenden von a^* bringt Zustände höherer Energie:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{(2\omega)}{\sqrt{n!}} \right)^{-\frac{n}{2}} \left(\omega x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-\frac{\omega x^2}{2}}$$

Die Funktion $|\psi_n|^2$ wird im Fadeev [1] als Dichtefunktion der Ortsverteilung postuliert. Am Beispiel des harmonischen Oszillators wird vorgerechnet, dass im quantenmechanischen Fall die Funktion auch außerhalb der Amplitude des Oszillators positive Werte annehmen kann, das betrachtete Teilchen den Oszillator also verlassen kann.

Für weiterführende Informationen zur Koordinatendarstellung muss ich (leider) auf [1] verweisen.

Literatur

- [1] L. D. Faddeev, O.A. Yakubovskii *Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students*. Student mathematical library, Volume 47, AMS 2009, ISBN 978-0-8218-4699-5.
- [2] Dirk Werner *Funktionalanalysis* Springer, 6. Auflage, 2007, ISBN 978-3-540-72533-6
- [3] Ian J. R. Aitchison, David A. MacManus, Thomas M. Snyder *Title: Understanding Heisenberg's 'Magical' Paper of July 1925: a New Look at the Computational Details* arXiv:quant-ph/0404009v1 DOI 10.1119/1.1775243
- [4] Wikipedia, *Matrix mechanics* — Wikipedia, The Free Encyclopedia 2009, http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrix_mechanics&oldid=327758151 [Online; accessed 29-November-2009]

- [5] Wikipedia, *Harmonischer Oszillator (Quantenmechanik)* — Wikipedia, *The Free Encyclopedia* 2009, [http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Harmonischer_Oszillator_\(Quantenmechanik\)&oldid=65955068](http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Harmonischer_Oszillator_(Quantenmechanik)&oldid=65955068) [Online; accessed 15-December-2009]
- [6] Ralph Boas, *Entire Functions* Academic Press 1954 OCLC 847696
- [7] K. Fritzsche, *Komplexe Analysis von mehreren Veränderlichen*, Anhang, http://www.math.uni-wuppertal.de/~fritzsche/ft204_31.pdf [Online; accessed 15-December-2009]