Maxwellgleichungen

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

Wichtige Formeln

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} = -\nabla_r \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\nabla \cdot \left(\frac{\hat{e}_r}{r^2}\right) = -4\pi\delta(\vec{r})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\delta(f(x)) = \sum \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

Bei Koordinatentransformation wird $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ zu $|J\phi(\vec{r}_0)|^{-1}\delta(\cdots)$.

Felder direkt berechnen

Biot-Sarvard-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{j} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d\vec{r}'$$

E-Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\varepsilon_0 \pi}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}')\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d\vec{r}'$$

Potentiale

Statische Fälle.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\varepsilon_0 \pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} d\vec{r}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} d\vec{r}$$

Es gilt $\vec{E} = -\nabla\phi$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ sowie $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$.

Allgemeiner Fall. Es gilt $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Erst die Eichung

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \nabla\varphi,\ \phi = \phi_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

bringt eine Lösungsformel.
Lorentz-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t}$ entkoppelt $\vec{E}$ und $\vec{B}$, sodass beide die Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

erfüllen. Lösungen sind dann die aus dem statischen Fall bekannten Formeln, nur ist in ρ bzw. $\vec{j}$ die retardierte Zeit

$$t_r = t - \frac{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}{c}$$

eingesetzt.

Strahlung, Energie und Impuls

Leistung

$$P(r) = \frac{1}{\mu_0}\int_{\partial\Omega} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{f}$$

durch Kugeloberfläche $\Rightarrow$ Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ darf nicht schneller als r^{-2} abfallen, damit Leistung abgestrahlt wird.
Poynting-Vektor gibt Energie pro Zeit und pro Fläche an. Poynting-Theorem

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)dV - \int_{\partial\Omega} \vec{S} \cdot d\vec{f}$$

bzw. differentiell

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{mech} + u_{em}) = -\nabla \cdot \vec{S}$$

Spannungstensor

$$T_{ij} = \varepsilon_0(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2)$$

gibt an: Kraft pro Volumen als $\nabla \cdot T - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{S}}{\partial t}$, T_{ij} Kraft pro Fläche in i. Richtung auf Oberflächenelement in Richtung j, $-T$ ist Impulsfluss.
Impulsdichte ist $\vec{p} = \mu_0\varepsilon_0\vec{S}$

Multipolentwicklung

Kartesisch. Ein Dipol sind zwei Ladungen in vernachlässigbarem Abstand. Taylor-Entwicklung des $\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{a}\|}$-Terms bringt

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} \text{ mit } \vec{p} = q\vec{a}$$

Dabei ist $\vec{a}$ der Abstand der Ladungen. Das $\vec{E}$ Feld hat die Form

$$c\left(\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right)$$

Quadrupol im zweiten Term der generellen Multipolentwicklung

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}'\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}'\cdot\vec{r}) - r^2 r'^2}{2r^5}$$

Erlaubt nun

$$\phi(\vec{r}) \approx c\left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} + \frac{\hat{r}Q\hat{r}}{2r^3}\right)$$

Es ist

$$\begin{aligned} q &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r})d\vec{r} \\ \vec{p} &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r}\rho(\vec{r})d\vec{r} \\ Q_{ij} &= \int_{\mathbb{R}^3} (3x_i x_j - r^2\delta_{ij})\rho(\vec{r})d\vec{r} \end{aligned}$$

Sphärisch. Legendre-Polynome $1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots$ erlauben es, zylindersymmetrisch Potential anzugeben

$$\phi(r,\vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(a_\ell r^\ell + \frac{b_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\vartheta)$$

Wenn Potential auf z-Achse bekannt, eindeutig definiert!

Wellen

Wende Rotation auf Maxwell an, um zu Wellengleichungen zu entkoppeln. Lösung der Wellengleichung ist allgemein $f_-(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)+f_+(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)$. Die Felder stehen senkrecht auf $\vec{k}$.
Wellenpakete sind Fourier-Kotransformierte von Funktionen mit kompakten Träger.
Kugelwellen haben die Form ebener Wellen, nur mit kr statt $\vec{k}\cdot\vec{r}$. Ebene sind $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\pm\omega t)}$. In Halbleitern gibt es keine TEM (Transversal Elektromagnetische Wellen). Außerdem sind Wellen mit $c\frac{\pi}{L_x}$ exponential abfallend. In Koaxialkabeln geht das alles schon.

Symmetrien

$$\int_\partial \vec{E}\cdot d\vec{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \int_\partial \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot I$$