Diese Klausurvorbereitung basiert auf der Vorlesung von Axel Pelster an der FU Berlin im SS 2009. Thematisch wurde Lagrange- und Hamiltonmechanik behandelt. Die Hamilton-Jaboische-Theorie war nicht mehr Teil der Klausur.

1 Newtonmechanik

Die Newtonmechanik ist unpraktisch, weil koordinatenabhängig und nicht für die Behandlung von Zwangskräften angepasst.

2 Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen heißen

Holonom Falls darstellbar als $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$

Skleronom Falls unabhängig von der Zeit

Rheonom Falls explizit zeitabhängig

3 Prinzipien

D'Alembertsches Prinzip $\sum_i^n (m_i \ddot{r}_i - F_i)\,\delta r_i = 0$

Hamiltonisches Prinzip $\delta \int L \,\mathrm{dt} = 0$

Prinzip der kleinsten Wirkung $\int L \,\mathrm{dt} = \min$

4 Noether-Theorem

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \left(L - \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \delta t &= \text{const.} \\ \Leftrightarrow \sum_i^n p_i \delta q_i - H \delta t &= \text{const.} \end{aligned}$$

Symmetrien der Lagrangegleichungen und Erhaltungsgrößen sind äquivalent. Translationsinvarianz gleicht Impulserhaltung, Drehinvarianz der Drehumpulserhaltung und Zeitinvarianz der Energieerhaltung.

5 Lagrangegleichungen

Es gilt

$$
\begin{aligned}
0 = \\
\delta \int L \, \mathrm{dt} &= \int \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \, \mathrm{dt} \\
&= \int \sum_i^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \, \mathrm{dt} && \text{(Partielle Integration)} \\
&= \int \sum \delta q_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \mathrm{dt} \\
&\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 && \forall i
\end{aligned}
$$

Die generalisierten Kräfte lassen sich mithilfe der Lagrangefunktion, bzw. der kinetischen Energie, bestimmen. Es gilt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = F_i$$

Will man Zwangskräfte erhalten, so setzt man diese in die Lagrangefunktion als Summanden $\lambda_i \cdot f_i(q_1, \dots, q_n, t)$ ein. Über den Satz über *implizite Funktionen*, bzw. die daraus resultierenden *Lagrangemultiplikatoren*, bekommt man die Zwangskräfte. (Zum lösen behandelt man die λ_i einfach wie zusätzliche Koordinaten)

6 Legendretransformation

Als Legendretransformation bezeichnet man die Transformation

$$f(x, y) \to g(u, y) \text{ mit } u = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Dabei ist

$$g(u, y) = f(f'^{-1}(u), y) - f'^{-1}(u)u$$

Vorgehensweise: Setze $u = f'(x)$ und löse nach x, um $f'^{-1}(p)$ zu erhalten. Setze dann ein.

7 Hamiltongleichungen

Mit den konjugierten Impulsen $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ gilt für die Hamiltonfunktion $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$:

$$
\begin{aligned}
0 = \\
\delta \int \sum_i^n p_i \dot{q}_i - H \,\mathrm{dt} &= \int \sum_i^n p_i \delta \dot{q}_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \,\mathrm{dt} \\
&= \int \sum_i^n -\frac{d}{dt} p_i \delta q_i + \delta p_i \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \,\mathrm{dt} \quad \text{(Partielle Integration)} \\
&= \int \sum_i^n \delta q_i \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) \mathrm{dt} \\
&\Rightarrow \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \wedge \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}
\end{aligned}
$$

8 Kanonische Transformation

Herleitung über die Ableitung von $L - \mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - H - \sum P_i \dot{Q}_i + \mathcal{H}$, die die Ableitung einer Funktion F ergeben muss, durch zusammenfassen.

Mögliche Typen von Erzeugenden für die Klausur:

$$
\begin{aligned}
F_1(q, Q, t) &\to p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \wedge P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \\
F_2(q, P, t) &\to p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \wedge Q = \frac{\partial F_1}{\partial P}
\end{aligned}
$$

F_2 entsteht aus F_1 durch die Legendretransformation

$$
F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_i^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} Q_i = F_1(q, Q, t) + \sum_i^n P_i Q_i
$$

Eine Transformation ist *kanonisch*, wenn sie die fundamentalen Poissonklammern erhält.

9 Poissonklammern

$$
\{A, B\}_{q,p} := \sum_i^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right)
$$

Es gelten:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} f(q, p, t) &= \{f, H\}_{q,p} - \frac{\partial f}{\partial t} \\
\{A, B\}_{q,p} &= -\{B, A\}_{q,p} \\
\{A, B \cdot C\}_{q,p} &= \{A, B\}_{q,p} \cdot C + \{A, C\}_{q,p} \cdot B
\end{aligned}
$$

Weiterhin die Jacobiidentität und übliche Vektordualitätspaarungseigenschaften. Die fundamentalen Poissonklammern lauten

$$\{p_i, q_j\}_{p,q} = \delta_{ij} \wedge \{p_i, p_j\}_{p,q} = \{q_i, q_j\}_{p,q} = 0$$

Ist die Poissonklammer zwischen zwei Größen 0, sagt man, sie seien *vertauschbar*. Das ist eine Äquivalenzrelation.

10 Störungsrechnung

Zur *linearen Störungsrechnung* entwickelt man die Bewegungsgleichung für kleine Abweichungen δx von einem Gleichgewicht x_0 per Taylorentwicklung. Der Term 0-ter Ordnung fällt dabei weg, da in x_0 ja ein Gleichgewicht vorliegt. Übrig bleibt die lineare Approximation im Gleichgewichtspunkt. Sieht diese nun so aus, dass kleine Störungen eine entgegengesetzte Kraft bewirken, ist das Gleichgewicht *stabil*, ansonsten *labil*. Im mehrdimensionalen Fall kann es auch zu Fällen mit indefiniter Jacobimatrix kommen. Dann liegt ein Sattelpunkt vor, also hängt die Stabilität von der Richtung der Auslenkung ab.