Stochasik „Spicker“

1 Elementare Aussagen

Konvergenz in Wahrscheinlichkeit $\forall \epsilon : P(|x_n - x| > \epsilon) \to 0$

Konvergenz in Verteilung $\forall f : \int f d\mu \to \int f d\mu$

Konvergenz fast sicher $P(X_n \to X) = 1$

Satz 1 (Borel Cantelli)**.**

$$\sum P(A_n) < \infty \implies \overline{\lim}\ P(A_n) = 0$$

$$\sum P(A_n) = \infty, A_n \textit{ paarweise unabhängig } \implies \overline{\lim}\ P(A_n) = 1$$

Satz 2 (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)**.**

$$\forall \epsilon : P(|\bar{X}_n| > \epsilon) \to 0$$

Satz 3 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.**

$$P(\overline{\lim}\ |\bar{X}_n| = 0) = 1$$

Definition 1 (Dynkin-System)**.** *Ein Dynkin-System ist ein Mengensystem mit*

- $\emptyset, \Omega \in \mathcal{D}$
- $E \in \mathcal{D} \implies E^C \in \mathcal{D}$
- (E_n) *disjunkt* $\subset \mathcal{D} \implies \cup E_n \in \mathcal{D}$

Satz 4 (Radon-Nikodym)**.** *Für einen Wahrscheinlichkeitsraum mit zwei endlichen Maßen ν, P, mit $P(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$. Dann ist ν darstellbar als*

$$\nu(E) = \int_E Y dP$$

für ein $Y : \Omega \to \mathbb{R}^+$

Satz 5 (Dynkinsystemtrick)**.** *Es sei D_0 ein System von Teilmengen von Ω Ist D_0 durchschnittsstabil, so ist $\mathcal{D}(D_0) = \sigma(D_0)$.*

2 Bedingte Erwartung

Definition 2 (Bedingte Erwartung)**.** *Eine Funktion ϕ heißt bedingte Erwartung von Y unter $\mathcal{E}$, wenn sie $\mathcal{E}$-messbar ist und $\int_{E_0} Y dP = \int_{E_0} \phi dP$*

Die bedingte Erwartung existiert und ist eindeutig wegen Radon-Nikodym. Es gilt:

- $E(XY|\mathcal{E}_0) = XE(Y|\mathcal{E}_0))$ für X $\mathcal{E}_0$-messbar
- $E(E(Y|\mathcal{E}_2)|\mathcal{E}_1) = E(Y|\mathcal{E}_1)$ für $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$

3 Stoppzeiten

Definition 3 (Stoppzeit)**.** *Eine Stoppzeit ist eine Abbildung $\tau : \Omega \to T \cup \{\infty\}$ für die gilt*

$$\forall t \in T : \{\omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

wobei $\mathcal{F}_t$ eine gegebene Filtration ist.

Ein gestoppter Prozess ist nicht automatisch eine Zufallsvariable! Hinreichend ist, dass die Zeiten abzählbar sind.

4 Markovprozesse

Definition 4 (Markovprozess)**.** *Prozess, sodass für $t < t_0$ und B Borel gilt: $P(X_{t_0} \in B | \mathcal{F}_t) = P(X_{t_0} \in B | X_t)$*

Äquivalent sind:

- $(\mathcal{F}_t)$ natürliche Filtration: Dann muss das nur für alle Auswahlen endlich vieler Zeitpunkte gelten
- $E(g|\mathcal{F}_t) = E(g|X_t)$ für alle integrierbaren g
- Für beliebige Zeitpunkte wie oben aber diesmal auch verschiedene Borelmengen
- Zuwächse $X_{t_0} - X_t$ von $\mathcal{F}_t$ unabhängig
- Zukunft und Vergangenheit sind unter der Bedingung der Gegenwart unabhängig voneinander

Aus dem letzten folgt insbesondere dass Markovprozesse symmetrisch in der Zeit sind.

5 Markovketten

Wir haben eine eindeutige stationäre Verteilung für aperiodische, irreduzible Ketten. Minimale, invariante Mengen kommunizieren.

6 Kontinuierliche Zeit

Für den infinitisimalen Generator gilt: Die Einträge neben der Diagonalen sind positiv und die Zeilensummen sind 0.

7 Optimales Stoppen

Definition 5 (Superharmonische Funktion)**.** *Eine Funktion auf dem Konfigurationsraum einer Markovkette ist superharmonisch, wenn $\forall i : \sum_{j \neq i} f(j) p_{ij} < f(i)$.*

Es gilt:

- Das Infimum superharmonischer Funktionen ist superharmonisch.
- Für einen symmetrischen absorbierenden Zufallsspaziergang ist die sup. harmonische Einhüllende so etwas wie die konkave obere Einhüllende.
- Für superharmonische Gewinnfunktionen lohnt sich warten nie.
- Den optimalen Gewinn finden wir indem wir die superharmonische Einhüllende finden
- Konkret berechnen kann man die iterativ via

$$u_n \to \max\{u_n, P u_n\}$$

8 Brownsche Bewegung

Definition 6 (Brownsche Bewegung). *Eine Brownsche Bewegung ist ein Prozess mit*

- *Stetig*
- 0 *in* 0
- *Zuwächse sind zwischen endlich vielen gegebenen Zeitpunkten unabhängig*
- *Zuwächse sind verteilt wie* $\mathcal{N}(0, \Delta t)$

Man konstuiert sie z.B. indem man sie auf den natürlichen Zahlen springen lässt und dazwischen interpoliert. Dann definiert man die mittleren Werte als $(X + Z)/2$ wobei Z normalverteilt ist und unabhängig von X. Das wiederholt man und argumentiert via Borel-Cantelli, dass das konvergiert.

Eigenschaften:

- Markovsch
- Selbstähnlich (Translation, Zoom, Zeitskalierung)
- Quadratische Variation ist t f.s.
- Variation ist unendlich f.s.
- Nicht hölder für Koeffizienten ¿ 0.5, aber für ¡ 0.5

9 Riemann-Stieltjes-Integral

Riemann-Integral gewichtet, geht gut für g mit beschränkter Variation. Wir haben einen Fortsetzungssatz gemacht, dass man Lipschitzfunktionen von dichten Teilräumen fortsetzen kann.

10 Elementare Prozesse & das Itô-Integral/Formel/Isometrie

Definition 7 (Elementarer Prozess). *Ein elementarer Prozess ist ein Prozess der stückweise konstante Pfade hat, wobei alle Teilstücke* $\mathcal{F}_t$*-messbar sein müssen.*

Auf diesen Funktionen nehmen wir die L^2-Norm (auf der Zeitachse und Omega!). Dann definieren wir ein Integral auf natürliche Weise für beschränkte Funktionen und zeigen die Itô-Isometrie

$$\|Y\|_{[0,t]\times\Omega} = \| \int Y\|_\Omega$$

Außerdem liegen diese Funktionen dicht und damit können wir das Integral für alle Prozesse definieren.

Einige Integrale:

- $E\left(\int Y_s dB_s\right) = 0$ (Dabei ist Y_s adaptiert)
- $e^{\alpha B_t} = 1 + \alpha^2/2 \int_0^t e^{\alpha B_s} ds + \alpha \int_0^t e^{\alpha B_s} dB_s$
- $E(e^{\alpha B_t}) = e^{\alpha^2 t/2}$
- $f = x^3 \implies B_t^3 = \int_0^t 3B_s ds + 3\int_0^t B_s^2 dB_s$
- $\int_0^t B_s^2 dB_s = B_t^3/3 - \int_0^t B_s ds$
- $U_s = 0, Y_s = 1, g = (x^2 - s)/2 \implies \int_0^t B_s dB_s = 1/2(B_t^2 - t)$
- $dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \implies N_t = N_0 e^{(r-\alpha^2/2)t + \alpha B_t}$ (Formel benutzen mit $g = e^{(r-\alpha^2/2)t+\alpha x}$)

11 Monte-Carlo-Verfahren

Wir haben Existenz & Eindeutigkeit von Lösungen stochastischer DGLs wenn die Funktionen vor dx und dBt lipschitz sind.

Satz 6 (Itô-Formel)**.** *Sei*

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t U_s(\omega)ds + \left(\int Y_s dB_s\right)(\omega)$$

ferner

$$\tilde{X}_0 = g(0, X_0),\ \tilde{U}_s = \partial_s g(s, X_s) + U_s \partial_x g(s, X_s) + 0.5 Y_s^2 \partial_x^2 g(s, X_s),\ \tilde{Y}_s = Y_s \partial_x g(s, X_s)$$

Dann gilt

$$\tilde{X}_t(\omega) = \tilde{X}_0(\omega) + \int_0^t \tilde{U}_s(\omega)ds + \left(\int_0^t \tilde{Y}_s dBs\right)(\omega)$$

Satz 7 (Dynkin-Formel)**.** *Gegeben*

$$dX_t = x_0 + b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,\ (Df)(x) = b^i f_i + 0.5\sigma^{ij}\sigma^{ji} f_{ij}$$

mit einsteinscher Summenkonvention. Dann gilt:

$$E(f(X_\tau)) = f(x_0) + E\left(\int_0^\tau (Df)(X_s)ds\right)$$

Das lässt sich ausnutzen um partielle DGLs zu lösen.