PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN I

OLIVER C. SCHNÜRER

Zusammenfassung. PDE 1 Script, gekürzt um alle Beweise, Bemerkungen und Aufgaben von Phillip Berndt

0. Die Laplacegleichung und Darstellungsformeln

0.1. **Die Fundamentallösung.** Wir folgen [2] und später [4]. Wir wollen $n \geq 2$ annehmen. Sonst entspricht das betrachtete Problem einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Definition 0.1 (Fundamentallösung)**.** Die Funktion

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

$\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Hier bezeichnet ω_n das Volumen von $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\omega_n = |B_1(0)|$.

0.2. **Darstellungsformel für $\mathbb{R}^n$.** Sei nun $n \geq 2$. Wir benutzen die Fundamentallösung zur Konstruktion von Lösungen der Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Theorem 0.2. *Sei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Definiere $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch*

$$u(x) = \underset{\mathbb{R}^n}{\Delta} \Phi(x-y) f(y)\, dy.$$

Dann gelten $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und

$$-\Delta u = f \quad \textit{in } \mathbb{R}^n.$$

0.3. **Mittelwerteigenschaft.**

Theorem 0.3 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch. Dann gilt*

$$u(x) = \underset{\partial B_r(x)}{\emptyset} u = \underset{B_r(x)}{\emptyset} u,$$

falls $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$.

Date: April 2009.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 35-01, 35J25.
Key words and phrases. Laplacegleichung, harmonische Funktionen, Perron, Maximumprinzip, Sobolevräume, L^2-Theorie.

Theorem 0.4 (Umkehrung der Mittelwerteigenschaft)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Falls für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,dy$$

gilt, so ist u harmonisch.

Theorem 0.5. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^2(\Omega)$. Gilt für jede Kugel $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$*

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy,$$

so ist u in Ω harmonisch. Zeige dies.

Theorem 0.6 (Starkes Maximumprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ sei harmonisch. Dann gilt*

(i)

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Existiert $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, so ist u auf der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

Theorem 0.7 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

0.4. **Regularität und innere Abschätzungen.**

Theorem 0.8 (Regularität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Erfüllt u die Mittelwerteigenschaft $u(x) = \fint\limits_{\partial B_r(x)} u$ für alle Kugeln $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Wir bemerken, dass es genügt, kleine Kugeln zu betrachten.

Daher werden wir in Zukunft annehmen, dass harmonische Funktionen von der Klasse C^∞ sind.

Theorem 0.9 (Innere Abschätzungen für harmonische Funktionen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und u in Ω harmonisch. Sei $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ und sei α ein Multiindex der Ordnung k, $|\alpha| = k$. Dann gilt

$$|D^\alpha u(x_0)| \le \frac{c_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))},$$

wobei

$$c_0 = \frac{1}{\omega_n},$$
$$c_k = \frac{\left(2^{n+1} n k\right)^k}{\omega_n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Theorem 0.10 (Satz von Liouville)**.** *Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt. Dann ist u konstant.*

Theorem 0.11 (Darstellungsformel). *Sei $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann ist jede beschränke Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ von*

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

von der Form

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)\,dy + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Theorem 0.12 (Analytizität). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist u in Ω analytisch.*

0.5. **Harnackungleichung.**

Theorem 0.13 (Harnackungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $u > 0$ in Ω. Sei $\Omega_1 \Subset \Omega$ offen und zusammenhängend. Dann gibt es $c = c(n, \Omega_1, \Omega)$, so dass*

$$\sup_{\Omega_1} u \leq c \cdot \inf_{\Omega_1} u$$

gilt.

Für x, $y \in \Omega_1$ folgt also

$$\frac{1}{c} u(y) \leq u(x) \leq c \cdot u(y),$$

d. h. die Funktionswerte von u in Ω_1 sind untereinander vergleichbar.

0.6. **Greensche Funktion und Darstellungsformeln auf Gebieten.** Wir erhalten also

Theorem 0.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

und G die Greensche Funktion für Ω, so gilt

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\,dy + \int_{\Omega} f(y) G(x,y)\,dy$$

für $x \in \Omega$.

Theorem 0.15 (Symmetrie der Greenschen Funktion). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und sei $\partial\Omega \in C^1$. Seien $x \neq y \in \Omega$. Sei G die zu Ω gehörige Greensche Funktion. Nehme an, dass $G \in C^2\left(\left(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}\right) \setminus \Delta\right)$, $\Delta := \{(x,x) : x \in \Omega\}$, ist. Dann gilt*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Beispiel 0.16 (Greensche Funktion für einen Halbraum). Dies ist zunächst eine formale Rechnung, da ein Halbraum nicht präkompakt ist. Definiere

$$\mathbb{R}^n_+ := \left\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \, : \, x^n > 0\right\}.$$

Definiere $\tilde{x}$ als die Reflektion von x an $\partial\mathbb{R}^n_+$,

$$\tilde{x} := (x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n).$$

Beobachtung: Für $x \in \mathbb{R}^n_+$ und $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ gilt $\Phi(y-\tilde{x}) = \Phi(y-x)$. Die Abbildung $y \mapsto \Phi(y-\tilde{x})$ ist in $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ harmonisch und glatt. Wir machen den folgenden Ansatz

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x})$$

und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y^n} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y^n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y^n}(y-\tilde{x})\\ &= -\frac{1}{n\omega_n}\left\{\frac{y^n-x^n}{|y-x|^n} - \frac{y^n+x^n}{|y-\tilde{x}|^n}\right\}.\end{aligned}$$

Für $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ erhalten wir

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y^n}(x,y) = -\frac{2x^n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}.$$

Aufgrund der Greenschen Darstellungsformel vermuten wir nun, dass eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+,\\ u = g & \text{auf } \partial\mathbb{R}^n_+\end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^n_+$ durch

$$u(x) = \frac{2x^n}{n\omega_n} \underset{\partial\mathbb{R}^n_+}{\Delta} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy$$

gegeben ist.

Eindeutigkeit ist nicht zu erwarten, da für $g = 0$ alle Funktionen $u(x) = \alpha x^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Lösungen sind.

Theorem 0.17 (Poissonsche Darstellungsformel für einen Halbraum)**.** *Sei $g \in C^0\left(\mathbb{R}^{n-1}\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ und betrachte $\mathbb{R}^{n-1}$ vermöge $x \mapsto (x,0)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Definiere für $x \in \mathbb{R}^n_+$*

$$u(x) := \frac{2x^n}{n\omega_n} \underset{\partial\mathbb{R}^n_+}{\Delta} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\,dy.$$

Dann gilt

(i) $u \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n_+\right)$,

(ii) $\Delta u = 0$ *in* $\mathbb{R}^n_+$,

(iii) $u \in C^0\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\right)$ *und* $u = g$ *auf* $\partial\mathbb{R}^n_+$. *Genauer gilt: Es gibt eine stetige Fortsetzung* $\tilde{u}$ *von* u *auf* $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ *mit* $\tilde{u} = g$ *auf* $\partial\mathbb{R}^n_+$.

Lemma 0.18 (Poissonsche Darstellungsformel für eine Kugel)**.** *Die Poissonsche Darstellungsformel für eine Kugel B_r für das Randwertproblem*

$$\begin{cases}\Delta u = 0 & \textit{in } B_r,\\ u = g & \textit{auf } \partial B_r\end{cases}$$

ist durch

$$u(x) = \underset{\partial B_r}{\Delta} K(x,y)g(y)\,dy \tag{0.1}$$

für $x \in B_r$ mit

$$K(x,y) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\omega_n r} \frac{1}{|x-y|^n}$$

für $x \in B_r$ und $y \in \partial B_r$ gegeben.

Theorem 0.19. *Sei $g \in C^0(\partial B_r)$ und u durch (0.1) definiert. Dann gilt*

(i) $u \in C^\infty(B_r)$,

(ii) $\Delta u = 0$ *in* B_r,

(iii) *u läßt sich stetig auf ∂B_r fortsetzen und erfüllt dort $u = g$.*

1. Perronverfahren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$, $g \in C^0(\partial\Omega)$. Wir wollen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ finden, die das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

löst.

1.1. Konvergenzsätze.

Theorem 1.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u_l : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge harmonischer Funktionen, die gleichmäßig gegen u konvergiert, $u_l \rightrightarrows u$.*

Dann ist u in Ω harmonisch.

Theorem 1.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei (u_l) eine Folge harmonischer Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ die Abschätzung $|u_l(x)| \le c(K)$ erfüllen. Dann gibt es eine Teilfolge der (u_l), die in $C^2_{loc}(\Omega)$ konvergiert. Der Grenzwert u ist eine glatte harmonische Funktion.*

Korollar 1.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u_l : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen $u_l \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch sind. Gelte $u_l = \varphi_l$ auf $\partial\Omega$.*

Konvergieren die Funktionen φ_l auf $\partial\Omega$ gleichmäßig gegen eine Funktion φ, so konvergieren die Funktionen u_l in $\overline{\Omega}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, die in Ω harmonisch ist.

Theorem 1.4 (Harnacksches Konvergenztheorem)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei u_l eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen. Sei $y \in \Omega$ und sei $u_l(y)$ gleichmäßig beschränkt. Sei $\Omega' \Subset \Omega$. Dann konvergiert u_l auf Ω' gegen eine harmonische Funktion.*

1.2. C^0-subharmonische Funktionen.

Definition 1.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(i) $u \in C^2(\Omega)$ heißt

- harmonisch, falls $-\Delta u = 0$,
- subharmonisch, falls $-\Delta u \le 0$,

- superharmonisch, falls $-\Delta u \ge 0$.

(ii) $u \in C^0(\Omega)$ heißt

- subharmonisch, falls für jede Kugel $B_r(x) \Subset \Omega$ und jede C^2-harmonische Funktion $h : C^2(B_r(x)) \cap C^0\left(\overline{B_r(x)}\right)$ mit $u \le h$ auf $\partial B_r(x)$ auch $u \le h$ in $B_r(x)$ folgt.
- superharmonisch, falls $-u$ subharmonisch ist.
- harmonisch, falls u subharmonisch und superharmonisch ist.

Kurzfristig werden wir diese Eigenschaften mit C^2-subharmonisch und C^0-subharmonisch unterschiedlich bezeichnen.

Lemma 1.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei subharmonisch. (Wir spezifizieren hier nicht genauer, welche Definition von subharmonisch wir voraussetzen, da die Aussage insbesondere für C^0-subharmonische Funktionen gilt.)*

(i) Dann erfüllt u das starke Maximumprinzip in Ω, d. h. falls es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\limits_\Omega u$ gibt, so ist u in der Zusammenhangskomponente von x_0 konstant.

(ii) Seien $u, v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$. Sei Ω zusammenhängend, v superharmonisch und es gelte $u = v$ auf $\partial\Omega$, so gilt entweder $u < v$ in Ω oder $u = v$ in Ω und beide Funktionen sind harmonisch.

Korollar 1.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in C^0(\Omega)$ erfülle eine der Mittelwerteigenschaften*

$$u(x) \le \underset{B_r(x)}{\varnothing}\, u \quad \text{oder} \quad u(x) \le \underset{\partial B_r(x)}{\varnothing}\, u$$

für alle Kugeln $B_r(x) \Subset \Omega$. Dann ist u auch C^0-subharmonisch.

Lemma 1.8 (Harmonische Ersetzung)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonisch und $B \Subset \Omega$ eine Kugel.*

Sei $\overline{u} : \overline{B} \to \mathbb{R}$ die harmonische Funktion mit $\overline{u} = u$ auf ∂B.

Wir definieren die harmonische Ersetzung von u in B durch

$$U(x) := \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B. \end{cases}$$

Dann ist U in Ω (C^0-)subharmonisch.

Lemma 1.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $u_1, \ldots, u_N$ in Ω subharmonisch. Dann ist auch*

$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

in Ω subharmonisch.

Definition 1.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Dann heißt $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Subfunktion oder Sublösung (für den Laplaceoperator $-\Delta$), wenn u subharmonisch ist und $u \le \varphi$ auf $\partial\Omega$ gilt.

Superfunktionen sind analog definiert.

1.3. Das Perronverfahren.

Theorem 1.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$. Sei*

$$S_\varphi := \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) : u \text{ ist Subfunktion bezüglich } \varphi\right\}.$$

Definiere

$$u(x) := \sup_{v \in S_\varphi} v(x).$$

Dann ist u in Ω harmonisch.

1.4. Barrieren und Randwerte.

Mit Hilfe von Barrieren zeigen wir nun, dass die Perronlösung stetige Randwerte auf hinreichend regulären Gebieten tatsächlich annimmt.

Definition 1.12 (Barriere)**.** Sei $\xi \in \partial\Omega$. Eine Funktion $w \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, $w = w_\xi$, heißt Barriere für ξ relativ zu Ω, falls

(i) w in Ω superharmonisch ist,

(ii) $w(\xi) = 0$ und $w > 0$ in $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$ gelten.

Die Existenz einer Barriere ist also eine lokale Eigenschaft des Randes. Definiere daher

Definition 1.13. Ein Randpunkt heißt regulär (bezüglich des Laplaceoperators), falls es eine Barriere zu diesem Punkt gibt.

Lemma 1.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei u eine mittels Perronverfahren konstruierte Lösung, sei ξ ein regulärer Randpunkt von Ω und sei φ in ξ stetig. Dann gilt $u(x) \to \varphi(\xi)$ für $x \to \xi$.*

Theorem 1.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist das Dirichletproblem*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für beliebiges $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ genau dann in $C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ lösbar, wenn jeder Randpunkt regulär ist.

Definition 1.16. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann erfüllt Ω eine äußere Kugelbedingung, falls für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Kugel B existiert, so dass $\{x\} = \overline{B} \cap \overline{\Omega}$ gilt.

Ω erfüllt eine gleichmäßige Kugelbedingung, falls für alle $x \in \partial\Omega$ Kugeln mit gleichem Radius verwendet werden können.

Lemma 1.17. *Erfülle Ω in ξ eine äußere Kugelbedingung, $\{\xi\} = \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega}$. Dann ist*

$$w(x) := \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \\ \log \frac{|x-y|}{R}, & n = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für $\xi \in \partial\Omega$.

1.5. **Existenzsätze.**

Theorem 1.18. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Theorem 1.19. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Sei $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert genau eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ zu*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Eindeutigkeit

2.1. **Energiemethoden.** Die Aussage des folgenden Theorems ist nicht neu, sie folgt auch schon aus dem Maximumprinzip. Wir lernen hieran nur eine neue Methode kennen.

Theorem 2.1 (Eindeutigkeit)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Dann besitzt das Randwertproblem*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

höchstens eine Lösung in $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$.

Später werden wir lernen, wie man das nun untersuchte Funktional in geeigneten Funktionenräumen tatsächlich minimieren kann.

Theorem 2.2 (Dirichletprinzip)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und $\partial\Omega \in C^1$. Definiere*

$$I[w] := \underset{\Omega}{\Delta} \frac{1}{2}|Dw|^2 - wf,$$

und

$$\mathcal{A} := \left\{w \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \,:\, w = g \text{ auf } \partial\Omega\right\},$$

wobei $f \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und $g \in C^2(U(\partial\Omega))$, also in C^2 in einer Umgebung U von $\partial\Omega$.

Sei $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ eine Lösung zu

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega, \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dann gilt

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w].$$

Ist umgedreht $u \in \mathcal{A}$ ein Minimierer für I,

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{A}} I[w],$$

so löst u das Randwertproblem (2.1)*.*

2.2. **Maximumprinzipien für elliptische Differentialgleichungen.** Wir folgen [6].

Definition 2.3. Sei $F\left(D^2u, Du, u, x\right) = 0$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sei $F \in C^1\left(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\right)$.

(i) Dann heißt die Differentialgleichung elliptisch, falls
$$a^{ij} := \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} > 0.$$

(ii) Ist F elliptisch, so heißt
$$\dot{u} - F\left(D^2u, Du, u, x\right) = 0 \quad \text{parabolisch}$$
und
$$u_{tt} - F\left(D^2u, Du, u, x\right) = 0 \quad \text{hyperbolisch.}$$

Beispiel 2.4. Für die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ erhalten wir $a^{ij} = \delta^{ij}$. Somit ist

- $\Delta u = 0$ elliptisch,
- $\dot{u} - \Delta u = 0$ parabolisch
- und $u_{tt} - \Delta u = 0$ hyperbolisch.

Ein Beispiel hierfür ist $Lu = \Delta u$.

Theorem 2.5. *Sei $c \equiv 0$ und erfülle u in Ω die Differentialungleichung $Lu \ge 0$, d. h.*
$$a^{ij}u_{ij} + b^iu_i \ge 0.$$
Dann gilt
$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Ein analoges Resultat erhält man für $Lu \le 0$ und das Infimum durch Betrachten von $-u$.

Korollar 2.6. *Seien $f \in C^0(\Omega)$ und $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ sowie $c \equiv 0$. Dann besitzt das Dirichletproblem*
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$
höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$.

Korollar 2.7. *Sei $c \le 0$, $Lu \ge 0$ in Ω, $u^+(x) := \max\{u(x), 0\}$ Dann gilt*
$$\sup_{\Omega} u^+ \le \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Theorem 2.8 (Starkes Maximumprinzip, E. Hopf)**.** *Sei $c \equiv 0$, $Lu \ge 0$. Sei Ω zusammenhängend. Nimmt u sein Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.*

Gilt $c \le 0$ und nimmt u sein nichtnegatives Maximum im Inneren von Ω an, so ist u konstant.

Der Beweis hiervon benutzt

Theorem 2.9 (Hopfsches Randpunktlemma)**.** *Sei $c \le 0$, $Lu \ge 0$. Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und gelte*

(i) *u ist in x_0 stetig,*

(ii) *$u(x_0) \ge 0$ falls $c \not\equiv 0$,*

(iii) *$u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$,*

(iv) *es gibt eine Kugel $B_R(y) \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B_R(y)$.*

Dann gilt

$$\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle > 0,$$

falls diese Ableitung existiert.

Hier ist klar, dass $\langle Du(x_0), x_0 - y\rangle \ge 0$ gilt.

3. Sobolevräume

3.1. **Definition und grundlegende Eigenschaften.** Wir folgen [2]. Weitere gute Übersichten zu Sobolevräumen und deren Umfeld vermitteln die Bücher von William Ziemer [9] und Robert Adams [1].

Definition 3.1 (Schwache Ableitung)**.** Sei nun $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $v \in L^1_{\text{loc}}$ heißt α-te schwache Ableitung von u, falls

$$\mathop{\Delta}\limits_{\Omega} uD^\alpha\varphi = (-1)^{|\alpha|} \mathop{\Delta}\limits_{\Omega} v\varphi$$

für alle Testfunktionen φ gilt. Wir schreiben $D^\alpha u = v$.

Lemma 3.2 (Eindeutigkeit der schwachen Ableitung)**.** *Seien v, $\tilde v \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitungen von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt $v = \tilde v$.*

Zum Beweis benötigen wir das Lemma von Du Bois-Reymond. Wir folgen der Darstellung in [3]

Lemma 3.3 (Du Bois-Reymond)**.** *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gilt*

$$\mathop{\Delta}\limits_{\Omega} f\varphi = 0$$

für alle Testfunktionen φ, so gilt $f = 0$ fast überall, $f = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definition 3.4.

(1) Seien $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ im schwachen Sinn für alle } |\alpha| \le k\right\}.$$

(2) Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ sind, wie wir später sehen werden, Hilberträume.

(3) Für u, $v \in W^{k,p}(\Omega)$ schreiben wir $u = v$, falls $u = v$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, d. h., falls $u = v$ fast überall gilt.

(4) Wir definieren die folgende Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \infty, & u \notin W^{k,p}(\Omega), \\ \left(\sum\limits_{|\alpha| \le k} \underset{\Omega}{\Delta} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sum\limits_{|\alpha| \le k} \sup\limits_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty. \end{cases}$$

Hier benutzen wir das wesentliche Supremum. Mit dieser Norm wird der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ zu einem Banachraum. Dies beweisen wir später.

(5) $u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls $u \in W^{k,p}(\Omega')$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt.

(6) Wir schreiben $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$$

und $u_m \to u$ in $W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, falls

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega')} \to 0$$

für alle $\Omega' \Subset \Omega$.

(7) Wir definieren

$$W^{k,p}_0(\Omega) := \overline{C^\infty_c(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Wir bemerken, dass es somit zu jedem $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ Funktionen $u_m \in C^\infty_c(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$ gibt. Unter geeigneten Voraussetzungen gilt für $u \in W^{k,p}_0(\Omega)$ auch $D^\alpha u = 0$ auf $\partial\Omega$ für alle $|\alpha| \le k-1$. Diese Aussage ist nicht trivial, da $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist.

(8) $H^k_0(\Omega) = W^{k,2}_0(\Omega)$.

Theorem 3.5 (Eigenschaften schwacher Ableitungen)**.** *Seien $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega)$. Dann gelten*

(1) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ und $D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha \left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta} u$ für $|\alpha|+|\beta| \le k$.

(2) $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ und $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.

(3) Ist $\Omega' \subset \Omega$ offen, so folgt $u \in W^{k,p}(\Omega')$.

(4) Ist $\zeta \in C^\infty_c(\Omega)$, so folgt $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ und es gilt die Leibnizregel

$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$$

ist und $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$.

Theorem 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $W^{k,p}(\Omega)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum.*

3.2. **Approximierbarkeit.** In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}$-Funktionen durch glatte Funktionen in der $W^{k,p}$-Norm approximieren.

Theorem 3.7 (Lokale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.**
Sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \le p < \infty$. Sei η eine Friedrichsche Glättungsfunktion, η_ε die zugehörige Diracfolge. Sei

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

Dann ist

$$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

und es gilt

$$u^\varepsilon \to u \text{ in } W^{k,p}_{loc}(\Omega)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Theorem 3.8 (Globale Approximierbarkeit durch glatte Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass $u_m \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$.*

Theorem 3.9 (Globale Approximierbarkeit in $C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Seien $u \in W^{k,p}(\Omega)$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es $u_m \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right) \cap W^{k,p}(\Omega)$, so dass*

$$u_m \to u \text{ in } W^{k,p}(\Omega).$$

3.3. **Fortsetzbarkeitssätze.**
In glatten beschränkten Gebieten lassen sich $W^{k,p}(\Omega)$-Funktionen nach $\mathbb{R}^n$ als $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, so dass deren Norm durch die ursprüngliche Norm abgeschätzt bleibt.

Theorem 3.10 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\Omega \Subset V$. Dann gibt es eine beschränkte lineare Abbildung*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

so dass für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ folgendes gilt

- *$Eu = u$ fast überall in Ω,*
- $\operatorname{supp}(Eu) \subset V$,
- $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c(p, \Omega, V) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Die Funktion Eu heißt Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$.

3.4. **Spuren von Sobolevfunktionen.** Wir wollen Randwerte von $W^{1,p}$-Funktionen definieren. Diese Funktionen sind i. a. nicht stetig und $\partial\Omega$ ist eine Nullmenge.

Sei Ω beschränkt. Ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, so besitzt u Randwerte als L^p-Funktion.

Theorem 3.11. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass $Tu = u|_{\partial\Omega}$, *falls* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *ist und*

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \le c(p,\Omega) \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt.*

Theorem 3.12. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $\partial\Omega \in C^1$ *und* $1 \le p < \infty$. *Sei* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Dann gilt*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad Tu = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

3.5. **Sobolevungleichungen und Einbettungssätze.** Sobolevräume betten in andere Funktionenräume ein. Diese Einbettungen

$$\left(W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow ?\right)$$

unterscheiden sich, je nachdem, ob

- $1 \le p < n$,
- $p = n$ oder
- $n < p \le \infty$

gilt. Es genügt, die entsprechenden Abschätzungen für glatte Funktionen zu beweisen, da diese dicht in den entsprechenden Sobolevfunktionen liegen.

3.6. **Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung.**

Definition 3.13. Sei $1 \le p < n$. Der zu p konjugierte Sobolevexponent ist $p^* = \frac{np}{n-p}$, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Es gilt $p^* > p$.

Theorem 3.14 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung)**.** *Sei* $1 \le p < n$. *Dann gibt es eine Konstante* c, *die nur von* p *und* n *abhängt, so dass*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u \in C_c^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ *gilt.*

Theorem 3.15. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $\partial\Omega \in C^1$. *Sei* $1 \le p < n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Dann gilt* $u \in L^{p^*}(\Omega)$ *und*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le c \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c = c(p,n,\Omega)$.

Einen solchen Einbettungssatz bekommen wir auch, wenn das Gebiet nicht von der Klasse C^1 ist, die Sobolevfunktion dafür aber Randwerte Null hat.

Theorem 3.16 (Poincaréungleichung)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt. Sei* $1 \le p < n$ *und* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Dann gilt*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für beliebiges $q \in [1, p^*]$, *wobei* $c = c(p,q,n,\Omega)$.

Korollar 3.17. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und beschränkt,* $1 \le p < n$. *Dann sind auf* $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

äquivalente Normen.

3.7. **Hölderräume.**

Definition 3.18. Sei $u:\Omega\to\mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Wir definieren für $0<\alpha<1$ die Hölderhalbnorm

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Im Fall $\alpha=1$ erhalten wir lipschitzstetige Funktionen.

Wir definieren die Höldernorm

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Der Hölderraum $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, besteht aus allen Funktionen $u\in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, für die die Norm

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\beta|\le k} \left\|D^\beta u\right\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|\beta|=k} \left[D^\beta u\right]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

endlich ist.

3.8. **Morreyungleichung.**

Theorem 3.19 (Morrey)**.** *Sei $n<p<\infty$. Dann gibt es $c=c(p,n)$, so dass*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le c\cdot\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, ggf. mit unendlicher rechter Seite, gilt, wobei $\gamma=1-\frac{n}{p}$ ist.

Theorem 3.20. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^1$. Sei $n<p\le\infty$, $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Dann besitzt u einen stetigen Repräsentanten, $u^*\in C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)$, $\gamma=1-\frac{n}{p}$, und es gilt*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \le c\cdot\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

mit $c=c(p,n,\Omega)$.

Für Funktionen, die schwache Ableitungen höherer Ordnung besitzen, erhält man den folgenden Einbettungssatz. Zum Beweis wendet man einfach solange den Sobolevschen oder Morreyschen Einbettungssatz an, bis dies nicht mehr möglich ist.

Theorem 3.21. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega\in C^1$. Sei $u\in W^{k,p}(\Omega)$.*

(1) Falls $k<\frac{n}{p}$ gilt, dann ist $u\in L^q(\Omega)$ mit

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{k}{n}$$

und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c\cdot\|u\|_{W^{k,p}},$$

wobei $c=c(k,p,n,\Omega)$ ist.

(2) Falls $k > \frac{n}{p}$ gilt, so ist

$$u \in C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right),$$

wobei

$$\gamma = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}, & \frac{n}{p} \notin \mathbb{N}, \\ < 1 \text{ (beliebig)}, & \frac{n}{p} \in \mathbb{N}, \end{cases},$$

und es gilt

$$\|u\|_{C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \le c(k,p,n,\gamma,\Omega) \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

3.9. **Kompaktheitssätze.** Für $1 \le p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ sind die Einbettungen $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ stetig. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ist für $1 \le q < p^*$ sogar eine kompakte Einbettung.

Definition 3.22. Seinen X, Y Banachräume, $X \subset Y$. X ist kompakt enthalten in Y,

$$X \Subset Y,$$

falls

(1) $\|x\|_Y \le c \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in X$,

(2) jede beschränkte Folge in X ist präkompakt in Y.

Theorem 3.23 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < n$. Dann gilt*

$$W^{1,p}(\Omega) \Subset L^q(\Omega)$$

für alle $1 \le q < p^*$.

Theorem 3.24 (Poincaré)**.** *Sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$. Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $c = c(n,p,\Omega)$, so dass*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt, wobei

$$(u)_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \underset{\Omega}{\Delta}\, u.$$

Theorem 3.25 (Poincaré für eine Kugel)**.** *Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $c = c(n,p)$ mit*

$$\|u - (u)_{B_r(x)}\|_{L^p(B_r(x))} \le c \cdot r \cdot \|Du\|_{L^p(B_r(x))}$$

für alle Kugeln $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ und für alle $u \in W^{1,p}(B_r(x))$.

3.10. **Differenzenquotienten.**

Definition 3.26. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in \Omega' \Subset \Omega$, $1 \le i \le n$ und $h \ne 0$. Sei $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ und $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Definiere den i-ten Differenzenquotienten der Gäße h durch

$$\begin{aligned} D_i^h u(x) &:= \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \\ D^h u &:= \left(D_1^h u, \ldots, D_n^h u\right). \end{aligned}$$

Theorem 3.27 (Differenzenquotienten und schwache Ableitungen)**.**

(1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \le p < \infty$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\Omega' \Subset \Omega$ gibt es ein $c > 0$, so dass
$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c \cdot \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$
für alle $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

(2) Sei $1 < p < \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gibt es $c > 0$ und $\Omega' \Subset \Omega$ mit
$$\left\|D^h u\right\|_{L^p(\Omega')} \le c$$
für alle $0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, so gilt $u \in W^{1,p}(\Omega')$ und
$$\|Du\|_{L^p(\Omega')} \le c.$$

4. L^2-Theorie

4.1. **Existenz.** Wir benutzen Methoden der Funktionalanalysis, um eine schwache Lösung zu konstruieren.

Definition 4.1 (Generalvoraussetzungen)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$, L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung in Divergenzform
$$Lu = -\left(a^{ij}(x)u_i\right)_j + b^i(x)u_i + d(x)u.$$
Wir machen folgende Annahmen

- gleichmäßige Elliptizität:
$$a^{ij}\xi_i\xi_j \ge \vartheta|\xi|^2$$
für eine Konstante $\vartheta > 0$.
- Symmetrie: $a^{ij} = a^{ji}$.
- Regularität: a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.
- Koerzivität: Es gibt $\beta > 0$, so dass
$$\int_\Omega a^{ij}\varphi_i\varphi_j + b^i\varphi_i\varphi + d\varphi^2 \ge \beta\|\varphi\|^2_{H^1_0(\Omega)}$$
für alle $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ gilt.

Dies motiviert die folgende Definition einer schwachen Lösung.

Definition 4.2 (Schwache Lösung)**.** Eine Funktion $u \in H^1_0(\Omega)$ heißt schwache Lösung des Randwertproblems
$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$
wenn für alle Funktionen $\varphi \in H^1_0(\Omega)$
$$\int_\Omega a^{ij}u_i\varphi_j + b^iu_i\varphi + du\varphi = \int_\Omega f\varphi$$
gilt.

Wir wollen die folgenden beiden Theoreme aus der Funktionalanalysis benutzen. Dabei bezeichnet H einen Hilbertraum, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt auf H und $\|\cdot\|$ die Norm von H.

Theorem 4.3 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Sei H ein Hilbertraum. Sein Dualraum H^* ist kanonisch isomorph zu H, d. h. zu jedem $f \in H^*$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $u \in H$, so dass*

$$f(v) = \langle u, v\rangle \quad \text{für alle } v \in H$$

gilt. Die Abbildung $f \mapsto u$ ist ein linearer Isomorphismus von H^* auf H.

Das folgende Theorem folgt direkt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, wenn die Bilinearform symmetrisch ist, denn dann definiert die Bilinearform ein zum Standardskalarprodukt äquivalentes Skalarprodukt (im Sinne von äquivalenten Normen) und wir können hierauf direkt den Rieszschen Darstellungssatz anwenden.

Theorem 4.4 (Lax-Milgram)**.** *Sei H ein Hilbertraum, $B : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinear, stetig, also*

$$|B[u,v]| \le \alpha\|u\| \cdot \|v\|,$$

und koerziv, also

$$\beta\|u\|^2 \le B[u,u],$$

für Konstanten α, $\beta > 0$ und alle u, $v \in H$. Sei $f \in H^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmes $u \in H$ mit

$$B[u,v] = f(v) \quad \text{für alle } v \in H.$$

Theorem 4.5. *Unter den Voraussetzungen von Definition 4.1 existiert genau eine schwache Lösung u des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$

4.2. **Alternativer Existenzbeweis mit Methoden der Variationsrechnung.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Wir suchen eine schwache Lösung $u \in W^{1,2}$ von

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega.\end{cases}$$

Dazu wollen wir

$$I(u) := \underset{\Omega}{\Delta} \tfrac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu$$

unter allen Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ minimieren.

Wir benutzen einige Resultate aus der Funktionalanalysis:

Definition 4.6 (Schwache Konvergenz)**.** Sei V ein Banachraum und V^* sein Dualraum. Dann konvergiert x_n schwach gegen x, $x_n \rightharpoonup x$, falls

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$$

für alle $f \in V^*$ gilt.

Sei H ein Hilbertraum. Dann ist H^* kanonisch isomorph zu H. Wir identifizieren H und H^*. Hier benötigen wir schwache Konvergenz nur in Hilberträumen.

Definition 4.7 (Separabel)**.** Ein metrischer Raum M ist separabel, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Das folgende Lemma gilt auch in Banachräumen.

Lemma 4.8. *Sei H ein Hilbertraum und $x_n \rightharpoonup x$ eine schwach konvergente Folge in H. Dann gilt*
$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Korollar 4.9. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Lipschitzrand. Sei $u_k \rightharpoonup u$ eine schwach konvergente Folge in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Dann gilt*
$$\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \ge \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Theorem 4.10 (Banach-Alaoglu)**.** *Sei H ein separabler Hilbertraum und sei (x_n), $x_n \in H$, eine beschränkte Folge. Dann besitzt (x_n) eine schwach konvergente Teilfolge. Für den schwachen Grenzwert gilt $\|x\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Sei nun u_k, $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$, eine Minimalfolge für $I(u)$, d. h. es gelte
$$\lim_{k\to\infty} I(u_k) \to \liminf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(u).$$

Im folgenden werden wir häufiger $\int_\Omega |\nabla u|^2 \ge \lambda \int_\Omega u^2$ für ein $\lambda = \lambda(\Omega) > 0$ verwenden.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass das betrachtete Infimum endlich ist. Es gilt
$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + fu \ge \frac{1}{2}\lambda \int_\Omega u^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \ge -\frac{1}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} > -\infty,$$
falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Mit einer analogen Rechnung können wir die $W^{1,2}$-Norm der u_n's gleichmäßig beschränken. Aufgrund der Minimalfolgeneigenschaft gilt
$$\begin{aligned} c &\ge \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \int_\Omega f u_n \ge \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u_n^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega f^2 \\ &\ge \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 - \frac{\varepsilon}{2\lambda}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} f^2. \end{aligned}$$
Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ klein und bringen den $\int_\Omega f^2$-Term auf die linke Seite. Die Behauptung folgt. Aufgrund der Äquivalenz der Normen mit und ohne L^2-Term auf $W_0^{1,2}$ ist auch $\int_\Omega u_n^2$ gleichmäßig beschränkt.

Nach Banach-Alaoglu besitzt u_n also eine Teilfolge (wir benennen nicht um), die in $W^{1,2}$ schwach gegen u konvergiert. Aufgrund der Spurabschätzungen ist $W_0^{1,2}$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,2}$. Ein abgeschlossener Unterraum ist, wie man durch Testen mit einem Vektor aus dem orthogonalen Komplement sieht, auch unter schwacher Konvergenz abgeschlossen. Daher hat auch der Grenzwert u wieder Randwerte Null. Da $W^{1,2} \Subset L^2$ ist, dürfen wir weiterhin annehmen, dass diese Folge in $L^2(\Omega)$ gegen u konvergiert. Somit ist
$$\inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w) = \lim_{n\to\infty} I(u_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \int_\Omega f u_n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \underset{\Omega}{\Delta} \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \underset{\Omega}{\Delta} fu \geq \liminf_{n\to\infty} \underset{\Omega}{\Delta} \frac{1}{2}|\nabla u_n|^2 + \underset{\Omega}{\Delta} fu \\
&\geq \underset{\Omega}{\Delta} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \underset{\Omega}{\Delta} fu = I(u) \geq \inf_{w\in W_0^{1,2}(\Omega)} I(w)
\end{aligned}
$$

Somit gilt überall Gleichheit. u minimiert also I in $W_0^{1,2}$ und die Euler-Lagrange-Gleichung besagt gerade, dass u eine schwache Lösung ist: Sei $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
0 = {}& \left.\frac{d}{dt} I(u+tv)\right|_{t=0} \\
={}& \left.\frac{d}{dt} \underset{\Omega}{\Delta} \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + |\nabla v|^2\right) + fu + tfv \right|_{t=0} \\
={}& \underset{\Omega}{\Delta} \langle \nabla u, \nabla v\rangle + fv.
\end{aligned}
$$

4.3. **Regularität.**

4.4. **Generalvoraussetzungen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in Divergenzform,

$$Lu = -\left(a^{ij}u_i\right)_j + b^i u_i + du,$$

mit

- gleichmäßig elliptischem a^{ij},
- a^{ij}, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$.

4.5. **Innere H^2-Regularität.**

Theorem 4.11 (Innere H^2-Regularität)**.** *Sei $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von*

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann ist $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt

$$\|u\|_{H^2(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(\Omega', \Omega, L)$.

4.6. **Höhere Regularität.**

Theorem 4.12 (Höhere innere Regularität)**.** *Sei $0 < m \in \mathbb{N}$,*

$$
\begin{aligned}
a^{ij},\ b^i,\ d \in{}& C^{m+1}(\Omega), \\
f \in{}& H^m(\Omega).
\end{aligned}
$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann ist $u \in H^{m+2}_{loc}(\Omega)$ und für alle $\Omega' \Subset \Omega$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega')} \leq c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(m, \Omega, \Omega', L)$.

Theorem 4.13 (Schwache Lösungen sind bei glatten Daten glatt)**.** *Seien*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^\infty(\Omega), \\ f \in & C^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$Lu = f \text{ in } \Omega.$$

Dann gilt

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

4.7. **Randregularität.** Bei glatten Daten erhalten wir $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

Theorem 4.14 (H^2-Regularität am Rand)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^2$. Seien $a^{ij} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$, b^i, $d \in L^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so gilt $u \in H^2(\Omega)$ mit der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

wobei $c = c(\Omega, L)$.

Theorem 4.15 (Höhere Randregularität)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^{m+2}$. Seien $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right), \\ f \in & H^m(\Omega). \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1_0$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann ist $u \in H^{m+2}(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \le c \cdot \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

mit $c = c(m, \Omega, L)$.

Theorem 4.16 (Glattheit bei glatten Daten)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^\infty$. Seien weiterhin*

$$\begin{aligned} a^{ij},\, b^i,\, d \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), \\ f \in & C^\infty\left(\overline{\Omega}\right). \end{aligned}$$

Sei $u \in H^1_0(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann gilt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

5. Eigenwerte des Laplaceoperators

5.1. **Existenz und Basiseigenschaften.** Wir folgen [6, S. 231 ff.]. Sei hier stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\partial\Omega \in C^\infty$. Bezeichne hier $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$.

Theorem 5.1. *Der kleinste Eigenwert des Laplaceoperators bei Dirichletrandwerten ist gegeben durch*

$$\lambda_1 := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\underset{\Omega}{\Delta} |Du|^2}{\underset{\Omega}{\Delta} u^2} \equiv \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle} > 0.$$

Es gibt $u \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, $u > 0$ in Ω, so dass

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_1 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

λ_1 ist ein Eigenwert der Vielfachheit eins.

Theorem 5.2. *Seien (λ_i, u_i), $1 \le i \le k$ die ersten k Eigenwerte und Eigenfunktionen (mit Vielfachheit). (Diese sind wie üblich bei Eigenwerten mit Vielfachheit nicht eindeutig bestimmt.) Dann ist*

$$\lambda_{k+1} = \inf_{\substack{0 \not\equiv u \in H_0^1(\Omega) \\ \langle u, u_i \rangle = 0,\, 1 \le i \le k}} \frac{\langle Du, Du \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Es gibt $u_{k+1} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, so dass

$$\begin{cases} \Delta u_{k+1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_{k+1} = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

gilt.

Theorem 5.3. *Es gibt abzählbar viele Eigenwerte λ_k des Laplaceoperators und es gilt*

$$\lambda_k \to \infty \text{ für } k \to \infty.$$

Die Eigenfunktionen u_k bilden (bei Konstruktion wie oben und nach Normierung) eine Orthonormalbasis in $L^2(\Omega)$ und es gilt

$$v = \sum_{i=1}^\infty \langle v, u_i \rangle u_i \text{ für alle } v \in L^2,$$

$$\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^\infty \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in L^2,$$

$$\langle Dv, Dv \rangle = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2 \text{ für alle } v \in H_0^1.$$

5.2. **Separation der Variablen.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ sei glatt. Seien u_0, $u_1 \in L^2(\Omega)$. Wir wollen die Anfangswertprobleme

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times [0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

und

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times (-\infty, \infty), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

lösen. Dabei beschreibt die Wärmeleitungsgleichung (5.1) die Wärmeverteilung in einem Körper Ω als Funktion der Zeit, wenn die Außenflächen eine konstante Temperatur haben. Die Wellengleichung beschreibt die Auslenkung der Membran einer wenig ausgelenkten Trommel.

Wärmeleitungsgleichung. Um die Gleichung (5.1) zu lösen, machen wir den Ansatz $u(x, t) := f(t)v(x)$, nehmen $u \neq 0$ (für die Herleitung) an, und erhalten

$$\frac{1}{u} (\dot{u} - \Delta u) = \frac{v}{vf} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{f}{vf} \Delta v = \frac{1}{f} \cdot \frac{d}{dt} f - \frac{1}{v} \Delta v.$$

Wir haben also die Abhängigkeit von den beiden Variablen separiert. Gleichheit gilt somit, wenn $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt} f$ und $\frac{-\Delta v}{v}$ beide mit einer gegebenen Konstanten λ übereinstimmen.

Eigenfunktionen u des Laplaceoperators auf Ω mit Randwerten Null zu einem Eigenwert λ

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

gibt es nur für eine diskrete Menge von positiven Konstanten λ. Sei (u_i, λ_i) ein solches Tupel.

Die Differentialgleichung $-\frac{1}{f}\frac{d}{dt} f = \lambda$ besitzt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ die Lösung $f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$.

Nun löst $w(x, t) := \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \dot{w} - \Delta w = 0 & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Linearkombinationen von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung sind wieder Lösungen. Somit ist auch

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (5.1).

Ist $u_0 \in L^2(\Omega)$ beliebig, so gibt es nach Theorem 5.3 Konstanten $\beta_i := \langle u_0, u_i \rangle$ für $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, so dass

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i u_i.$$

Mit zusätzlicher Arbeit kann man nachweisen, dass nun

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e^{-\lambda_i t} u_i(x) \tag{5.3}$$

in einem geeigneten Sinne das Anfangswertproblem (5.1) für positive Zeiten löst. Für positive Zeiten ist die Lösung glatt. Für $t = 0$ erhält man jedoch i. a. nur eine L^2-Funktion.

Diese Probleme bei $t = 0$ wollen wir für den Rest der Betrachtungen von (5.1) und (5.2) nicht weiter verfolgen.

Wir beobachten, dass hohe Frequenzen (große Eigenwerte) in (5.3) schneller abklingen als tiefe. Weiterhin kann man einen gemeinsamen Faktor $e^{-\lambda_1 t}$ ausklammern und sieht, dass $u(x,t)$ mindestens mit dieser Rate gegen Null konvergiert. Im generischen Fall, wenn $\beta_1 = \underset{\Omega}{\Delta} u_0 u_1 \neq 0$ ist, kann man die Lösung reskalieren. Es gilt dann

$$\frac{1}{\beta_1} e^{\lambda_1 t} u(x,t) \to u_1(x) \text{ für } t \to \infty.$$

Somit verteilt sich die Wärme für große Zeiten immer gleichmäßiger in dem gegebenen Körper und das Profil der Temperaturverteilung approximiert (nach Reskalieren) generisch die erste Eigenfunktion. Ist $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$, so approximiert man entsprechend die k-te Eigenfunktion.

Wellengleichung. Hier führt ein Ansatz $u(x,t) = f(t)v(x)$ zu

$$\frac{1}{u}(u_{tt} - \Delta u) = \frac{1}{f} f_{tt} - \frac{\Delta v}{v}$$

zum Gleichungssystem

$$-\frac{1}{f} f_{tt} = \lambda = -\frac{\Delta v}{v}.$$

Lösungen u_i des rechten Teiles kennen wir bereits. Lösungen des ersten Teiles sind gegeben durch

$$f(t) = \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right).$$

Der formale Ansatz

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) + \frac{\beta_i}{\sqrt{\lambda_i}} \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) \right) u_i(x)$$

führt also zu

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) u_i(x), \\ u_t(x,0) &= \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i} t\right) u_i(x). \end{aligned}$$

Da die u_i eine Orthonormalbasis von L^2 bilden, können wir damit das Anfangswertproblem (5.2) zumindest formal lösen. Im Unterschied zu (5.1) existiert solch eine Lösung für alle Zeiten, während im parabolischen Fall eine Lösung für negative Zeiten im allgemeinen nicht existiert, da die Exponentialfaktoren sofort die Konvergenz der Reihe zerstören; die rückwärtige Wärmeleitungsgleichung ist allgemein nicht lösbar.

Anschaulich bedeutet die angegebene Lösung, dass die betrachtete Membran eine Überlagerung von Eigenschwingungen ausführt. In der Musik bezeichnet man λ_1 als Grundton und λ_i als Obertöne. Diese sind von der Geometrie des Instrumentes abhängig.

Im Falle endlicher Summen liegt eine klassische Lösung vor und die formalen Rechnungen werden sofort rigoros.

Anhang A. Divergenzsatz

Theorem A.1 (Divergenzsatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1, $\xi \in C^1\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right)$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \xi = \int\limits_{\partial\Omega} \langle \xi, \nu \rangle.$$

Anhang B. Hölderräume

Die im folgenden definierten Räume $C^{\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ und $C^{\cdot,\cdot}\left(\overline{\Omega}\right)$ sind Banachräume.

Definition B.1 (Hölderräume)**.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Es ist

(i) $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$, falls u sich stetig bis zum Rand fortsetzen läßt und
$$\|u\|_{C^0(\Omega)} := \sup_{x \in \Omega} |u| < \infty.$$

(ii) $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, falls $D^\alpha u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ für alle $|\alpha| \le k$ und
$$\|u\|_{C^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u| < \infty.$$

(iii) $u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ und
$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^0(\Omega)} + \sup_{x \ne y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \equiv \|u\|_{C^0(\Omega)} + [u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(iv) $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ und
$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty.$$

(v) $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha \le 1$, falls $u \in C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega'}\right)$ für alle $\Omega' \Subset \Omega$. $C^{k,\alpha}(\Omega)$ ist kein Banachraum.

Für $0 < \alpha < 1$ heißen die Räume $C^{k,\alpha}$ Hölderräume. $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}}$ heißt Höldernorm, $[\cdot]_{C^{0,\alpha}}$ heißt Hölderhalbnorm.

Beispiel B.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ mit $\Omega = (-1, 1)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist $u(x) := |x|^\alpha$ hölderstetig. Es ist $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Literatur

1. Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
2. Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
3. Claus Gerhardt, *Partielle Differentialgleichungen*, 1997-1998, (Vorlesungsmitschrift).
4. David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
5. Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1991.
6. Jürgen Jost, *Partial differential equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 214, Springer-Verlag, New York, 2002.
7. Murray H. Protter and Hans F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984, Corrected reprint of the 1967 original.
8. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.
9. William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989.

Oliver C. Schnürer, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, 14195 Berlin, Germany

E-mail address: `Oliver.Schnuerer@math.fu-berlin.de`