Numerik 3 „Spicker“

1 Prinzipielles

1.1 Formeln

Divergenztheorem $v \in C^1(\bar{\Omega})$, Ω so, dass die greenschen Formeln gelten. Dann gilt $\int_\Omega \operatorname{div} v \; dx = \int_{\partial\Omega} \langle v, n \rangle \; d\sigma$.

Hölder $\int fg \leq (\int f^p)^{\frac{1}{p}} (\int g^q)^{\frac{1}{q}}$

Greensche Formel $\int_\Omega u \Delta v = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v \; d\sigma$

2. Greensche Formel $\int_\Omega u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v - v \partial_\nu u \; d\sigma$

Fourier $\hat{v} = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi} v(x) \; dx$. Es gilt $\hat{\partial}_x = i\xi\hat{}$ und $(2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}(v * w) = \hat{v}\hat{w}$

1.2 Unser Problem

- Wir lösen
  $$u \in H : \; J(u) \leq J(v) \; \forall v \in H$$
  für
  $$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha |\nabla v|^2 \; dx - \int_\Omega f v \; dx$$
  In Variationsform lautet das
  $$\int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega f v \; dx \; \forall v \in H_C$$
  Lösungen sind gleichzeitig Lösung von $\{-\alpha \Delta u = f \text{ in } \Omega, u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$.

- Cauchy-Problem: Löse PDE von Ordnung 2 ($au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$) mit Bekannten Funktionswerten und Ableitungen entlang einer Kurve. Das ist überbestimmt denn $\partial_s u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = g_1\gamma_1' + g_2\gamma_2'$. Also geben wir nur Funktionswerte und Normalenableitung vor. Um Existenz zu erhalten: Taylor 2. Ordnung der Lösung. Die DGL liefert dann eine zu lösende Matrix und das geht wenn $\det(s) := a\gamma_2'(s)^2 - 2b\gamma_1'(s)\gamma_2'(s) + c\gamma_1'(s)^2 \neq 0$ (Kurven die das erfüllen heißen Charakteristik der DGL)

- Cauchy-Kowalevskaya sagt: Für nicht charakteristische Kurven gibt es in kleinen Umgebungen um γ eine eindeutig bestimmte Lösung.

- Wir klassifizieren: Elliptisch wenn keine reelle Charakteristik, Parabolisch falls genau eine, Hyperbolisch falls zwei. Fouriertransformieren wir u_x so ergibt sich für den Differentialoperator ein Polynom (das Symbol der DGL), das genau diese Form hat

- Bei DGLs erster Ordnung ($a_1u_x + a_2u_y + bu + d = 0$) haben wir Charakteristiken wenn gilt $\gamma_1' = a_1(\gamma)$, $\gamma_2' = a_2(\gamma)$. Dann erfüllt $U(t) := u(\gamma(t))$ die DGL $U' + b(\gamma)U + d(\gamma) = 0$. Es gibt zu jedem Punkt eine Charakteristik.

- Ein Beispiel für ein schlecht gestelltes Problem ist $g_0 = \cos(j\pi x)$, $g_1 = j\pi \cos(j\pi x)$ mit g_0 Werten auf γ und g_1 Normalenableitungen darauf. Die Lösung hängt nicht stetig vom Problem ab.

- Dementsprechend heißt ein Problem korrekt gestellt, falls Existenz, Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit gelten

2 Klassische Theorie

- Im Fall von Neumann-Bedingungen brauchen wir $\int_\Omega f\ dx = -\int_{\partial\Omega} h\ d\sigma$ für die Existenz einer Lösung
- Fundamentallösung des Laplaceoperators:
$$s(x,a) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x-a| & n=2 \\ -\frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-a|^{2-n} & n>2 \end{cases}$$
Dabei ist ω_n Oberfläche der Einheitskugel.
- Darstellungssatz:
$$u(a) = \int_{\partial\Omega} \gamma(x,a)\partial_\nu u - u\partial_\nu\gamma\ d\sigma - \int_\Omega \gamma\Delta u dx$$
wobei $\gamma = s + \Phi$ mit Φ harmonisch (Greensche Funktion - ist 0 auf dem Rand)
- Greensche Funktion der Kugel ist $s(x,a) - |a|^{2-n}s(x, \frac{a}{|a|^2})$, denn $\frac{|x-\tilde{a}|}{|x-a|} = \frac{1}{|a|}$
- Poissonsche Integralformel:
$$u(x) = \frac{r^2-|x|^2}{r\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{g(\xi)}{|\xi-x|^n}d\sigma$$
löst das Randwertdirichletproblem der Laplacegleichung
- Mittelwerteigenschaft: Beweis per Darstellungsformel nach Translation auf $x=0$
- Maximumprinzip: Beweis per Zerlegung in Gebiet wo gleich sup und wo kleiner. 2. Menge offenbar offen, aber 1. auch: Aus der Mittelwerteigenschaft auf dem Rand folgt dass u auch dort gleich dem sup ist. Damit sind beide Mengen offen, also eine von beiden leer.
- Stetige Abhängigkeit von den Randwerten: Maximumprinzip auf Differenz anwenden.

2.1 Shortley-Weller

- Diskretisiere: Zentrale Diff'quot führen auf Matrix mit $-4/h^2$ in der Mitte, $1/h^2$ in den vier Richtungen weg. $\Delta u - \Delta_h u \in \mathcal{O}(h)$, h^2 falls innerer Punkt und $u \in C^4$
- Shortley-Weller straight-forward System, Randwerte vorgegeben
- Es gilt die diskrete Mittelwerteigenschaft, das diskrete Maximumprinzip. Daraus folgt Lösbarkeit (weil endlich und injektiv!)
- Shortley-Weller ist konsistent 1. Ordnung, Konvergiert für $u \in C^3$ in 1. Ordnung und in C^4 in zweiter.

3 L^2-Theorie

- Lax-Milgram liefert Operatornorm $1/\gamma$ für γ-elliptische Probleme
- Céa-Lemma: Variationsproblem im Teilraum hat eindeutige Lösung, es gilt $|u-u_s| \leq \Gamma/\gamma \inf_{v\in S}|u-v|$. Dabei ist Γ die Norm der Bilinearform a.
- Sobolev-Einbettung: Für $k > m + \frac{n}{2}$, $v \in H^k$, n die Raumdimension folgt $v \in C^m$.
- Gegenbeispiel, dass $H^1(\mathbb{R}^2) \not\subset C$: ??? Keine Ahn
- Rellichscher Einbettungssatz: H^{m+1} bettet Kompakt in H^m ein.
- Morreyscher Einbettungssatz: H^n bettet ein in $C^{0,1-n/2}$ mit $\gamma = 1 - n/p$
- Poincaré: $|u - (u)_\Omega|_{L^p} \leq c|Du|_{L^p}$

- Poincaré-Friedrich: $a(u,v) = \int_\Omega \alpha \nabla u \cdot \nabla v dx$ erfüllt $\gamma |v|^2 \leq a(v,v)$.

- Umgang mit von-Neumann Problemen: Ist $u = g_D$ auf dem D-Rand, $\partial_\nu u = g_N$ auf dem N-Rand, so kann man eine schwache Formulierung finden durch Anwendung derselben Gesetze. Hier: $a(v,w) = \int \nabla v \cdot \nabla u$, $l(v) = \int fv + \int_{\partial_N} g_N v \, d\sigma$ und man löst mit ∂_D 0-Randwerten (und nimmt an, dass eine homogene Lösung existiert für die eigentlichen Randwerte..)

4 Finite Elemente

- Triangulierung: $\Omega = \bigcap_{t \in \mathcal{T}} t$, Schnitt zweier Dreiecke ist gena eine gemeinsame Kante, Punkt oder leer. Die Interpolationsaufgabe darauf ist natürlich eindeutig lösbar. (Wirklich interpolieren!!) Knotenbasis wie man's erwarten würde.

- Der Raum der dadurch entsteht ist ein abgeschlossener Teilraum von H_0^1 und auf dem bekommt man durch die Variationsaufgabe wieder ein Gleichungssystem

- Der Diskretisierungsfehler geht nach Céa gegen 0. Geschwindigkeit bekommen wir nur mit Regularitärsvoraussetzung $u \in H_0^1 \cap H^{m+1}$ H^1 Konvergenz in Ordnung h^m. Ist das duale Problem H^2-regulär (d.h. in $a(v,w) = \langle g, v \rangle$ wird w in H^2-Norm von $c|g|_{L^2}$ beschränkt) haben wir Ordnung h in L^2, ist auch das ursprüngliche Problem regulär haben wir h^2 in L^2 (und dann sogar in Abhängigkeit von $|f|_{L^2}$)

5 Parabolische Gleichungen

- Fouriertransformieren! Dann haben wir ein einfach lösbares Problem und für die Wärmeleitungsgleichung die Lösung
$$u(x,t) = (4\pi t)^{-1/2} \int e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi) \, d\xi$$

- Die Anfangsdaten limitieren alle anderen Daten in sup-Norm: $\sup |u(\cdot, t)| = \max\{|u_0|, |g|\}$ (Nachweis per Produktansatz)

- Wir sind für C-Anfangsdaten in C^∞!

- Es gilt das Maximumprinip

- Die Lösung ist nicht eindeutig (Aber schon falls Exponentialschranke oder immer positiv)