Funktionalanalysis II

Beweisideen

1 Unbeschränkte Operatoren

Satz 1. *Normale Operatoren haben kein Restspektrum. Man kann approximative Eigenvektoren finden.*

Beweis. Es gilt ja $\langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$. Also haben $T-\lambda$ und $T^*-\bar{\lambda}$ denselben Kern. Da $(\operatorname{ran} T-\lambda)^\perp = \ker(T^*-\bar{\lambda})$ kann es kein Restspektrum geben. Für die approximative Folge benutze, dass $(T-\lambda)^{-1}$ unbeschränkt ist. □

Satz 2. *Aus $\langle f, Sf\rangle \in \mathbb{R}$ folgt bereits Symmetrie*

Beweis. Betrachte $\langle S(f+\lambda g), f+\lambda g\rangle$ für $\lambda = 1$ und $\lambda = i$. Kürzt man i und addiert beide erhält man $\langle Sg, f\rangle = \langle g, Sf\rangle$. □

Satz 3. *Für dicht definierte Operatoren S ist der Adjungierte abgeschlossen. S ist abschließbar gdw. S^* dicht definiert ist. Dann gilt auch $(\bar{S})^* = S^*$ und $S^{**} = \bar{S}$. Ist T eine Erweiterung von S, so ist $T^* \subset S^*$.*

Beweis. Haben wir per einem Rotationsoperator gemacht. Werner macht's schöner: Abgeschlossenheit folgt mit $\langle Tx, y\rangle = \lim\langle Tx, y_n\rangle = \lim\langle x, T^*y_n\rangle = \langle x, z\rangle$. Daraus folgt, dass $y \in \operatorname{dom} T^*$. Dass $T \subset T^{**}$ folgt direkt mit der Stetigkeits-Definition. Den letzten Teil macht man entweder über den Graphen oder direkt. □

Satz 4. *Für symmetrische Operatoren ist $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset r(S)$ und die Resolvente ist durch $\|\Im\lambda\|^{-1}$ in ihrer Norm abgeschätzt.*

Beweis. Einfach die Norm $\|(S-\lambda)f\|^2$ auflösen und den Realteil per Binomialsatz vom Imaginärteil trennen. □

Satz 5. $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \subset \rho(S)$ *ist äquivalent zu Selbstadjungiertheit.*

Beweis. Nimmt man an dass für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ $(S-\lambda)$ surjektiv ist, so ist $(S^*-\lambda)g = (S-\lambda)f$. Daraus folgt $(f-g) \in \ker(S^*-\lambda) = (\operatorname{ran}(S-\bar{\lambda}))^\perp = \{0\}$, also $f = g$. Umgekehrt folgt aus selbstadjungiertheit $\ker(S^*-\lambda) = \{0\}$ und $\ker(S-\lambda) = H$ und damit wieder die Inklusion. □

2 Cayleytransformation

Satz 6. *Die Cayleytransformation* $C : A \mapsto (A+i)(A-i)^{-1} = \mathrm{id} + 2i(A-i)^{-1}$ *bildet bijektiv zwischen der Menge der selbstadjungierten Operatoren und der der unitären mit* $1 \notin \sigma_p$ *ab.* $1 \in \sigma_C(CA) \Leftrightarrow A$ *unbeschränkt.*

Beweis. Unitarität von CA straight-forward nachrechnen. $1 \notin \sigma_p$ folgt aus $\ker(U-1) = \ker 2i(A-i)^{-1} = \{0\}$. Aus dieser Äquivalenz folgt auch die Behauptung mit dem stetigen Spektrum. Umgekehrt definiert man sich $C^{-1}U$ und schaut sich $\Im \left\langle i(U+1)(U-1)^{-1}f, f\right\rangle = \Im \left\langle i(U+1)g, (U-1)g\right\rangle$ an, um Symmetrie zu zeigen. Für $\mathrm{ran}(A-i) = H$ setze die Cayley-Transformation ein. □

3 Spektralsatz für unitäre Operatoren

Satz 7. *Spektralabbildungsatz für rationale Funktionen*

Beweis. Für $\lambda \in \sigma(U)$ betrachte $f(z) - f(\lambda) = (z-\lambda)P(z)Q(z)^{-1}$. Wäre $f(\lambda) \in \rho(f(U))$, so wäre durch Multiplikation von $f(U) - f(\lambda)$ mit dem Inversen $\mathrm{id} = P(U)Q(U)^{-1}(f(U) - f(\lambda))^{-1}(U-\lambda)$ und damit $\lambda \in \rho(U)$. Umgekehrt sei $\mu \in \sigma(f(U))$. Betrachte hier $f(z) - \mu$ und faktorisiere den Ausdruck. Da $f(U) - \mu$ nicht invertierbar ist, ist einer der Faktoren in $\rho(U)$. Damit folgt für diesen Faktor ν, dass $f(\nu) - \mu = 0$. □

Für stetige Funktionen können wir mit dem Funktionalkalkül dasselbe zeigen (Nämlich ist $\Phi(f(t) - \mu)$ stetige Inverse von $f(U) - \mu$ für μ nicht in $f(\sigma(U))$. Umgekehrt benutzen wir dann aber doch rationale Approximation und bauen mit einer Approximativen Eigenfolge den Beweis, dass $\mu \in \sigma(f(U))$.

Satz 8. *Stetiger Funktionalkalkül*

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus den Eigenschaften und dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß. Zur Existenz definiere den Kalkül für Polynome und zeige die Eigenschaften direkt. Für die Norm ist $\|\Phi f\|^2 = \|(\Phi f)^*(\Phi f)\| = \|\Phi \bar{f} f\| = \inf \|(\Phi \bar{f} f)^n\|^{\frac{1}{n}} = \sup\{\|\lambda\| : \lambda \in \sigma(\Phi \bar{f} f)\} = \|f^2\|_\infty$. □

Satz 9. *Messbarer Funktionalkalkül*

Beweis. Für Eindeutigkeit benutzen wir das Lemma, dass $B(\sigma(U))$ der kleinste Funktionenraum ist, der abgeschlossen gegenüber punktweiser Konvergenz glm. beschränkter Folgen ist und $C(\sigma(U))$ enthält. Zur Existenz: Über den Rieszschen Darstellungssatz finden wir $\langle f(U)x, y\rangle = \int f d\mu_{x,y}$ und definieren über diese Darstellung eine stetige Bilinearform in x und y. Nach Lax-Milgram gibt es dann einen Operator A, der die Darstellung als $\langle Ax, y\rangle$ erlaubt. Wir setzen $\Phi f = A$. Lax-Milgram haben wir én passant gezeigt: Mit Frechet-Riesz finden wir für feste y ein z mit $B(x,y) = \langle x, z\rangle$. Die Abbildung $y \mapsto z$ ist linear und beschränkt durch $\|f\|_\infty$. Wir setzen A gleich der Adjungierten Abbildung zu diesem Operator. Die Eigenschaften zeigt man dann direkt. Dass Grenzwerte vertauschen zeigt man dabei dann wieder über die Integraldarstellung und Lebesgue. □

Satz 10. *Für Treppenfunktionen gilt* $\| \int f dE\| \leq \|f\|_\infty$.

Beweis. $\| \int f dEx\|^2 = \| \sum \alpha_i E_{A_i} x\|^2 = \alpha_i \bar{\alpha}_j \left\langle E_{A_i} x, E_{A_j} x \right\rangle + \cdots = \sum \alpha_i^2 \|E_{A_i} x\|^2 \leq \|f\|_\infty \|x\|^2$ □

Satz 11. *Spektralsatz für unitäre Operatoren*

Beweis. $U = \int \lambda dE$: Approximiere mit Treppenfunktionen die Identität. Benutze die Eigenschaften des Funktionalkalküls um die Summe des Integrals in Φ hineinzuziehen und erhalte $\Phi(\mathrm{id}) = U$.

$\Phi(f) = \int f dE$: Approximiere gleichmäßig mit Treppenfunktionen und verfahre dann genauso.

Definiert man U über ein Spektralmaß ist dessen Funktionalkalkül wieder dadurch gegeben: Dass überhaupt ein unitärer Operator herauskommt, sieht man, indem man id durch Treppenfunktionen f_n approximiert und auch $1/f_n$ anschaut. Auf der Einheitskugel ist $\bar{z} = \frac{1}{z}$, die Involutivitätseigenschaft bringt damit die Aussage. Nun zeigt man an dem über das Integral definierte Kalkül direkt die Eigenschaften des Funktionalkalküls von U. Die Grenzwerteigenschaft bekommt man, weil man messbare Funktionen auf beschränkten Gebieten gleichmäßig mit Treppenfunktionen approximieren kann. Dass das Integral über die Einsfunktion die Identität ergibt sieht man, indem man $E_\rho = 0$ zeigt. Dafür wähle $\mu \in \rho(U) \cap S_1^{\mathbb{C}}$ und unterteile die Kugel in Kreisbögen Γ_n. Approximiere id mit Treppenfunktionen f_n auf den Γ_n, die immer den Wert am rechten Rand eines Bogenelementes annehmen. Dann weicht $O := \sum (e^{ik2\pi\frac{1}{n}} - \mu) E_{\Gamma_k}$ von $U - \mu$ nur um einen mit n gegen 0 gehenden Betrag in der Norm ab. Damit liegt im Inversen die Norm in einer $B_\varepsilon(\|(U-\mu)^{-1}\|)$. Da nun die Norm von O^{-1} durch $\sup_{k: E_{\Gamma_{k+1}} \neq 0} \|e^{ik2\pi\frac{1}{n}} - \mu\|^{-1}$ gegeben ist folgt, dass $E_{\mathcal{U}} = 0$ für eine ganze Umgebung $\mathcal{U}$ von μ. Durch ein Kompaktheitsargument folgt nun mit der Regularität des E-Maßes $E_\rho = 0$. □

Satz 12. *Für unitäre Operatoren gilt:*

1. $\lambda \in \rho \Leftrightarrow$ *Es gibt eine offene Umgebung von* λ *mit* $E_{\mathcal{U}} = 0$
2. $\ker(U - \lambda) = \operatorname{ran} E_{\{\lambda\}}$ *für* $\lambda \in \sigma_p$
3. *Isolierte Spektralpunkte sind Eigenwerte*

Beweis. (i): Wenn es die Umgebung gibt, so ist mit $f = t - \lambda$ außerhalb von $\mathcal{U}$ und sonst $f = 0$ die Resolvente gegeben. Für die Umkehrung benutze einfach $E_{\rho(U)} = 0$.

(ii): Für $x \in \ker(U - \lambda)$ ist $Ux = \lambda x$. $\chi_{\{\lambda\}}(Ux) = \chi_{\{\lambda\}}(\lambda)x \Rightarrow E_{\{\lambda\}}x = x$. Umgekehrt sei $x \in \operatorname{ran} E_{\{\lambda\}}$. $E_{\{\lambda\}}x = x$, also ist $\langle (U-\lambda)x, x\rangle = \left\langle (U-\lambda)E_{\{\lambda\}}x, y \right\rangle = \left\langle \int_{\{\lambda\}} t - \lambda dE_t x, y \right\rangle = 0$.

(iii): Folgt aus (i) und (ii). □

4 Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Sei f unbeschränkt, aber messbar. Setze $f_n = f$, abgeschnitten mit 0 bei Funktionswerten über n. Setze $\mathcal{D}$ gleich der Menge $\{x \in H : \int f^2 d\langle E_\lambda x, x\rangle < \infty\}$. Zwischen Spektralmaßen auf $\mathbb{R}$ und $S_1^{\mathbb{C}}$ projezieren wir per $E^A : B \mapsto E_B^A = E_{\tilde{B}}^U$ mit $\tilde{B} = \{e^{it} : \cot\frac{t}{2} \in B\}$ hin- und her. E_s^U setzen wir gleich $E_{(1,e^{is})}^U$.

Satz 13 (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren)**.** *Für $A = A^*$ gilt:*

1. $h \in \operatorname{dom} A \Leftrightarrow \int t^2 d\left\langle E_t^A h, h\right\rangle < \infty$
2. $Ah = \int t dE_t^A h$

Umgekehrt wird durch ein gegebenes Spektralmaß und eine reellwertige Funktion f ein selbstadjungierter Operator definiert.

Beweis. Der Beweis beruht auf der Bildmaß-Darstellung von oben. $h \in \operatorname{dom} A$ kann man schreiben als $h = (U-1)f$, da U ja per Cayley-Transformation definiert ist. Man zeigt durch Ausnutzung der Bildmaße $\|Ah\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2\frac{s}{2} d\left\langle E_s^U f, f\right\rangle$ und $\int_0^s d\left\langle E_\tau^U h, h\right\rangle = \left\langle E_s^U h, h\right\rangle = \int_0^s \sin^2\frac{\tau}{2} d\left\langle E_\tau^U f, f\right\rangle$ und baut beide zusammen um zu zeigen $\int_0^{2\pi} \cot^2\frac{\tau}{2} d\left\langle E_\tau^U h, h\right\rangle = \|Ah\|^2$. Man findet ähnliche Darstellungen für $\langle Ah, h'\rangle$ und $\left\langle E_s^U h, h\right\rangle$ und zeigt dann $\langle Ah, h'\rangle = \int_0^{2\pi} -\cot\frac{s}{2} d\left\langle E_s^U h, h'\right\rangle$. Zusammen ist $\|Ah\|^2 = \int_0^{2\pi} \cot^2\frac{s}{2} d\left\langle E_{-\cot\frac{s}{2}} h, h'\right\rangle$ und $\langle Ah, h'\rangle = \int_0^{2\pi} -\cot\frac{s}{2} d\left\langle E_{-\cot\frac{s}{2}} h, h'\right\rangle$. Subsitution von $t = -\cot\frac{s}{2}$ bringt schließlich die Hinrichtung von (i) sowie (ii).

Für die Umkehrung nimm an $\int_0^{2\pi} \frac{s}{2} d\left\langle E_s^U h, h\right\rangle < \infty$. Für $f(s) = e^{-i\frac{s}{2}}(\sin\frac{s}{2})^{-1}$ ist $g := \int_0^{2\pi} f(s) dE_s^U h$ wohldefiniert, weil die Funktion sich durch den Kotangens abschätzen lässt. Damit ist $h \in \mathcal{D}_f$. Durch Umformung von $\langle (U-1)g, f'\rangle$ zu $\langle h, f'\rangle$ sehen wir schließlich $h = \frac{1}{2i}(U-1)g$ und damit $h \in \operatorname{dom}(U-1)^{-1} = \operatorname{dom} A$.

Für den letzten Teil forme $\int_{\mathbb{R}} \|f(\lambda)\|^2 d\left\langle E_\lambda^A x, x\right\rangle$ in das andere Spektralmaß um und benutze $E_{S_1^{\mathbb{C}}\setminus\{1\}} = \mathrm{id}$ um Dichtheit von $\mathcal{D}_f$ zu zeigen. Approximiere das f durch Abschneiden wie oben und definiere $f(A)x$ über den Grenzwert, der für $x \in \mathcal{D}_f$ ja existiert. Selbstadjungiertheit folgt aus der Involutivität des Funktionalkalküls. $\square$

5 Störungstheorie

Satz 14. *A-Beschränktheit von V ist äquivalent zu:* $\limsup \|V(A - i\eta)^{-1}\| < \infty$. *Die A-Schranke ist gleich diesem Grenzwert.*

Beweis. Für die Hinrichtung benutze die Definition (In der quadrierten Version) um das V vorne loszuwerden. Klammere die A-Schranke aus, setze $\alpha = \frac{a}{b}$, löse die Skalarprodukte auf und schätze schließlich mit $b^2\|x\|^2$ ab. Benutze dabei $A(A+i\alpha)^{-1} = \mathrm{id} - i\alpha(A+i\alpha)^{-1}$ und die Resolventenformel $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R\mu$. Dann haben wir freie Wahl von a und können damit die Richtung zeigen. Umgekehrt ist $\|Vx\| = \|V(A+i\alpha)^{-1}(A+i\alpha)\| \leq b\|(A+i\alpha)x\| \leq b\alpha\|x\| + b\|Ax\|$. Dass die Schranke gleich ist folgt aus den Beweisen für beide Richtungen. $\square$

Satz 15. *Kato-Rellich für selbstadjungierte A. (Für symmetrische, A-Beschränkte V mit Schranke echt kleiner als 1 ist $A+V$ selbstadjungiert)*

Beweis. Benutze die Darstellung aus dem Satz vorher: $\|V(A-i\eta)^{-1}\| < 1$ für passendes η. Wir zeigen, dass die Graphennormen von A und $V+A$ äquivalent sind; damit ist $A+V$ abgeschlossen. $A+V \pm i\eta$ ist für große η surjektiv. Das sieht man mithilfe von $B_k = \sum(-1)^n(A+i\eta)^{-1}(V(A+i\eta)^{-1})^n$, was in etwa die neumannsche Reihe ist; das (-1) ist dabei enthalten, weil man später ein Teleskopsummenargument benutzen will. Man zeigt $B_k \to B$ und $(A+V+i\eta)B = \text{id}$. Damit ist $A+V \pm i\eta$ für alle η surjektiv, also $A+V$ selbstadjungiert. □

Satz 16. *Kato-Rellich für wesentlich selbstadjungierte A*

Beweis. Aus der A-Beschränktheit von V folgt $\bar{A}$-Beschränktheit auf $\operatorname{dom} A$ und damit, dass für konvergente Folgen in $\operatorname{dom} A$ wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{A}$ auch für das Bild unter $\bar{V}$ Konvergenz vorliegen muss. Es folgt $(\bar{A}+\bar{V}) = (\bar{A}+\bar{V})^*$. Man zeigt nun noch, dass die Domains passen: $\operatorname{dom}(\bar{A}+\bar{V}) = \operatorname{dom}\bar{A}$, $\bar{A}+\bar{V} \subset \overline{A+V} \subset \overline{A+V}^* \subset (\bar{A}+\bar{V})^*$. □

Satz 17. *Ist A nach unten beschränkt und V A-Beschränkt, so ist auch die Summe nach unten beschränkt mit maximaler unterer Schranke $\gamma_A - \max\{\frac{a}{1-b}, a+b\|\gamma_A\|\}$ (bei $\|Vx\| \leq a\|x\| + b\|Ax\|$)*

Beweis. Zeige $(-\infty, \gamma_{A+V}) \subset \rho(A+V)$. Sei λ aus der Menge. Wir zeigen $\|V(A-\lambda)^{-1}\| < 1$ und folgern wie bei Kato-Rellich $\operatorname{ran}(A+V-\lambda) = H$. Dann folgt $\|(A+V-\lambda)x\| \geq \|(A-\lambda)x\| - \|Vx\| = \|(A-\lambda)x\| - \|V(A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)x\| \geq \|(A-\lambda)x\|(1-\|V(A-\lambda)^{-1})\| > 0$ und damit, was wir brauchen. Um $\|V(A-\lambda)^{-1}\| < 1$ zu zeigen ziehen wir wieder mit der A-Beschränktheit das V raus, stellen die Operatoren als Integral dar und schätzen dort die Integranden mit der Voraussetzung ab. □

6 Kompakte Störungen

Satz 18. *Sind A und B selbstadjungiert und $((A-\mu)^{-1} - (B-\mu)^{-1}) \in K(H)$ für ein μ aus der gemeinsamen Resolventenmenge, so sind die essentiellen Spektren gleich.*

Beweis. Wir wählen für $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ eine Einheitsfolge mit $(A-\lambda)x_n \to 0$, die schwach gegen 0 geht, für die also auch das Bild unter dem kompakten Störungsoperator gegen 0 geht. Gleichzeitig gilt auch $((A-\mu)^{-1} - (\lambda-\mu)^{-1})x_n \to 0$, das sieht man in der Integraldarstellung (Beachte, dass der Träger in einer $B_{\frac{1}{n}}$ um den Spektralwert liegt, mit dem man bei x_n gerade an λ approximiert!). Damit geht auch für B die Folge $((B-\mu)^{-1} - (\lambda-\mu)^{-1})x_n$ gegen 0. Damit muss λ auch in $\sigma_{\text{ess}}(B)$ liegen, denn sonst wäre ja für ein $\varepsilon > 0$ der Projektor $E^A_{B_\varepsilon(\lambda)}$ kompakt, also hätten wir mit schwacher Konvergenz wieder starke und damit geht $\|((B-\mu)^{-1} - (\lambda-\mu)^{-1})x_n\|$ (sieht man via der Integraldarstellung) nicht gegen 0. □

7 Fouriertransformation

Unsere Notation: $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $t^\beta D^\alpha \mathscr{F} = (-1)^{|\alpha|}\mathscr{F} D^\beta k^\alpha$

Wir hatten (Beweisideen anbei)

1. Riemann-Lebesgue: Für Stetigkeit Lebesgue mit dem e-Term benutzen, für die Randwerte Schwartzfunktionen betrachten und in eine Richtung $\frac{1}{x_n}$ dranmultiplizieren und den e-Term danach differenzieren als Ausgleich. Partielle Integration bringt das Ergebnis.

2. $\mathscr{F}^2 = -\operatorname{id}$: $\int(\mathscr{F}\varphi)e^{-itk}e^{-\frac{at^2}{2}}dt = \int \varphi \mathscr{F} e^{-itk}e^{-\frac{(at)^2}{2}}dt$, dann mit dem e-Term das Argument reinziehen, rübersubstituieren und $a \to 0$.

3. Bildet Schwarzraum in sich ab: Einfach durchdifferenzieren um $\partial\mathscr{F} = -\mathscr{F}x$ zu zeigen, damit ist C^∞ klar. Andersherum eine Ableitung rausziehen um die Umkehrung zu zeigen. Dann $x^\beta\partial^\alpha\mathscr{F}$ zurückführen auf $c \cdot \mathscr{F}\partial^\alpha x^\beta$ und Riemann-Lebesgue

4. Ist bijektiv auf Schwarzraum: Aus $\mathscr{F}^2 f = f(-x)$ folgt $\mathscr{F}^4 = \operatorname{id}$ und damit $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^3$.

5. Fortsetzbarkeit auf L^2: Unitarität im L^2-Skalarprodukt zeigen, dafür die Symmetrie bei L^1-Funktionen ausnutzen. Ergo kann man's fortsetzen, denn Domain und Range sind dicht. Der Operator dort kann als Grenzwert im Mittel des Integrals über eine $B_r(0)$ für $r \to \infty$ dargestellt werden. (Sprich als Grenzwert von abgeschnittenen Approximationen im L^2-Sinn). Ist $f \in L^2 \cap L^1$, so gilt die Integraldarstellung fast überall. Das sieht man auch durch Approximation mit der Isometrie ($\|\mathscr{F}f_n - \mathscr{F}f\| = \|f_n - f\|$)

6. Faltungssatz: Direkt nachrechnen in L^1. Für die Aussage

$$\mathscr{F}f \cdot \mathscr{F}g \in L^2 \Leftrightarrow \mathscr{F}^{-1}f * \mathscr{F}^{-1}g \in L^2 \Leftrightarrow f * g \in L^2$$

   approximiert man f und g von unten in L^2. Dann ist auch $\mathscr{F}f_\varepsilon \cdot \mathscr{F}g_\varepsilon$ eine Approximation an $\mathscr{F}f \cdot \mathscr{F}g$, die in $L^2 \cap L^1$ liegt. Also gilt der Faltungssatz auch hier und damit folgt insbesondere diese Behauptung.

8 Differentialoperatoren

Haben wir via Polynomen im Fourierraum eingeführt. Zum Hin- und Her-Beweisen bzgl. spektraler Eigenschaften nimm die Resolventenmenge des Diff'Ops und zeige: Sie kann nicht in σ_p des Multiplikationsoperators liegen (Fouriertransformiere Eigenvektoren) und $\operatorname{ran}(M_p\lambda) = L^2$ (ebenfalls: Zu $h \in L^2$ nimmt man $g = \mathscr{F}^{-1}h$, $g = (T-\lambda)f$ und zeigt dann $h = (M_p - \lambda)\mathscr{F}f$.

Anmerkung: Werner zeigt mit Plancherel, dass $\mathscr{F}\partial^\alpha = cx^\alpha\mathscr{F}$ auch in L^2 hält. Dafür schaut er sich eine mit $\mathscr{F}C_0^\infty$ getestete Version der linken Seite an, streicht die Transformation, wendet dann die bekannten Sätze an und baut die Transformation wieder ein. Die Differenz der entstandenen Funktion mit der Behauptung steht senkrecht auf allen Testfunktionen. Er zeigt noch, dass sie L^2 ist, indem er schlichtweg sagt, dass die Aussage ja auch auf $L^2(B_R(0))$ für alle $R > 0$ stimmt.