CoMa II: Überblick

Phillip Berndt

9. Juli 2008

1 Polynominterpolation

Lagrange-Knotenbasis	$L_k(x) = \prod_{i=0;i\neq k} \frac{x-x_i}{x_k-x},\ k=0,\dots,n$
Lebesgue-Konstante	$\kappa_{abs_{interp}} = \Lambda_n = \left\Vert \sum_{k=0}^{n} \lvert L_k \rvert \right\Vert_\infty$
Aufwand bei Lagrange	$4n(n+1)+n = \mathcal{O}(n^2)$
Newton-Darstellung	$p_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k)$
Horner-Schema	$S_n = a_n; \texttt{for} k = n-1 \to 0 : S_k = S_{k+1}(x-x_k)+a_k$
Dividierte Differenzen	$f[x_i] = f(x_i); f[x_i,\dots,x_k] = \frac{f[x_{i+1},\dots,x_k]-f[x_i,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_i}$

```
A(:,1) = f(stuetz); for j=2:a, i=j:a:
A(i,j) = (A(i,j-1) - A(i-1,j-1)) / (g(i) - g(i-j+1));
```

2 Quadratur

Konvergente Quadraturformel	$\lim_{n\to\infty} \tilde{I}_N(f) = I(f)$
Effizienz	Genauigkeit pro Aufwand $= \lvert I_f - \tilde{I}_N(f)\rvert^{-1} N^{-1}$
Absolute Kondition der Quadrator	$\kappa_{abs} = (b-a)$
Newton-Côtes Formeln	$I_n(f) = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\lambda_k$
Gewichte	$\lambda_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b L_k(x)dx,\ k=0\dots n$
	$= \frac{1}{n}\int_0^n \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{s-j}{k-j} ds$

	Trapezregel	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$	Exakt für p_1
Bedeutende Gewichte:	Simpsonregel	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}(\frac{b-a}{2})^5$	Exakt für p_3
	Newton	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$3\frac{f^{(4)}(\xi)}{80}(\frac{b-a}{4})^5$	

Fehlerabschätzung für den summierten Fall:	Trapezregel	$\|I(f) - S_n^{(1}\| \leq \frac{h^2}{12}(b-a)\|\|f''\|\|_\infty$
	Simpsonregel	$\|I(f) - S_n^{(2}\| \leq \frac{8 \cdot h^4}{45}(b-a)\|\|f^{(4)}\|\|_\infty$

3 Differentialgleichungen

Kondition von homogenen AWPs	$\lambda < 0 : \|\|x - \tilde{x}\|\|_\infty = \|x_0 - \tilde{x}_0\|$
	$\lambda \geq 0 : \|\|x - \tilde{x}\|\|_\infty = e^{\lambda T}\|x_0 - \tilde{x}_0\|$
Kondition inhomogener AWPs	$\lambda < 0 : \|\|x - \tilde{x}\|\|_\infty \leq (1+T)\max\{\|x_0 - \tilde{x}_0\|, \|\|f - \tilde{f}\|\|_\infty\}$
	$\lambda \geq 0 : \|\|x - \tilde{x}\|\|_\infty \leq (1+T)e^{\lambda T}\max\{\|x_0 - \tilde{x}_0\|, \|\|f - \tilde{f}\|\|_\infty\}$
Also	$\lambda > 0 : e^{\lambda T} \leq \kappa_{abs} \leq (1+T)e^{\lambda T},\ \lambda \leq 0 : 1 \leq \kappa_{abs} \leq 1+T$
Explizites Eulerverfahren	$x_{k+1} = x_k + \tau f(t_k, x_k), \quad k = 1, 2, \ldots$
Implizites Eulerverfahren	$x_{k+1} = x_k + \tau f(t_{k+1}, x_{k+1}), \quad k = 1, 2, \ldots$
Stabiliätsbedingung	$0 < \tau \leq \frac{2}{\|\lambda\|}$
Greift bei	$\lambda < 0$ explizit, $\lambda > 0$ implizit
Diskretisierungsfehler	$\|x(t_k) - x_k\|$
Konsistenzfehler	$\epsilon(t_k, \tau) = x(t_k + \tau) - x(t_k) - \tau(\lambda x(t_k) + f(t_k))$
Konsistenzordnung c	$\max\|\epsilon(t_k, \tau) \leq c\tau^{p+1}$
Kondition bei linearen AWP Systemen	$\|\|x - \tilde{x}\|\|_\infty \leq max_{t \in [0,1]} e^{\lambda_1 t}\|x_0 - \tilde{x}_0\|_2$
	Selbe Bedingung wie vorher, aber für jeden
	Eigenwert einzeln
Mittelpunkt/Trapezregel	$x_k = \left(\frac{1+\frac{\tau\lambda}{2}}{1-\frac{\tau\lambda}{2}}\right)^k x_0$

Stabilität und Konsistenz ergeben Konvergenz

4 Nichtlineare Gleichungssysteme

Fixpunktiteration für LGS	$F(x) = b - Ax = 0; \Phi(x) = (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b$
	$\|\|I - M^{-1}A\|\| < 1$ gefordert.
Namen einiger M	$M = I$ ist Richardson, $M = \text{diag}(A)$ ist Jacobiverfahren
Newtonverfahren	$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
Konvergenzordnung von Newton	n^2
	Das geht auch im Fall einer mehrdimensionalen Funktion!
Dämpfung	$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \Delta x_k,\ F'(x_k)\Delta x_k = -F(x_k)$
Dämpfungsstrategie	Δx_kgeg.,$\lambda_k = 1, \tilde{\Delta} x_k = F'(x_k)^{-1}F(x_k + \lambda_k \Delta x_k)$
	falls $\|\|\tilde{\Delta} x_k\|\| \leq (1 - \frac{\lambda_k}{2})\|\|\Delta x_k\|\|$ abbrechen,
	sonst halbieren und weiter.