5. Übung zur Linearen Algebra II

V. Schulze / H. Klarner

FU Berlin. SS 2010. *Abgabe: 17. Mai 2010*

Aufgabe 17

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

(ii) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 18

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Man zeige, daß A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist und bestimme D.

(ii) Berechne eine Basis aus Eigenvektoren.

(iii) Bestimme eine Matrix T mit $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe 19

Berechne A^{25} für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20

Sei X ein $\mathbb{R}$-VR der Dimension 2 und $\varphi : X \to X$ ein Endomorphismus mit dem charakteristischen Polynom $x^2 - 1$.

(i) Welche Eigenwerte hat φ?

(ii) Existiert eine Basis aus Eigenvektoren?

(iii) Bestimme φ^2.

(iv) Beschreibe φ geometrisch für den Fall, daß die beiden Basisvektoren aus (ii) senkrecht aufeinander stehen.

Zusatzaufgabe auf der Rückseite. ↪

Zusatzaufgabe (ohne Wertung)

Es sei K ein Körper, $B \in K^{(2,2)}$, d.h. B eine 2×2-Matrix mit Einträgen aus K. Die Abbildung $f : K^{(2,2)} \to K^{(2,2)}$ sei definiert durch

$$f(A) := B \cdot A \quad \text{f.a. } A \in K^{(2,2)}.$$

(i) Man zeige, daß f eine lineare Abbildung ist.

(ii) Bestimme eine Darstellungsmatrix von f.

(iii) Sei $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$. Ist f diagonalisierbar?