Anwesenheitsklausur zur Linearen Algebra I - Lösungen

Kommentare an Hannes.Klarner@Fu-Berlin.de

FU Berlin. WS 2009-10.

Aufgabe 1

Entweder A oder B sei wahr. Ist dann die Implikation

$$((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$$

wahr?

Lösung

Ja denn durch aufschreiben der Wahrheitstafel erhält man in jedem Fall "wahr" für die Implikation.

((	A	→	B	)	→	C	)	→	(	A	→	(	B	→	C	))
	w	f	f		w	w		**w**		w	w		f	w	w	
	f	w	w		w	w		**w**		f	w		w	w	w	
	w	f	f		w	f		**w**		w	w		f	w	f	
	f	w	w		f	f		**w**		f	w		w	f	f	

Aufgabe 2

Sei U eine Teilmenge des K-Vektorraums V. Auf V sei eine Relation $\sim$ definiert durch

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a - b \in U$$

(i) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, falls U ein Unterraum von V ist?

(ii) Ist U ein Unterraum von V, falls $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist?

Lösung

Zu (i):

Ja, wenn U ein UVR ist, muss $\sim$ eine Äquivalenzrelation sein. Dazu die drei Eigenschaften prüfen:

Reflexivität: $\forall a \in V : a - a = 0 \in U$, da jeder UVR die 0 enthält.

Symmetrie: Sei $a \sim b$. Dann $a - b \in U \Rightarrow -(a - b) \in U \Rightarrow b \sim a$.

Transitivität: Seien $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann sind $a - b, b - c \in U \Rightarrow (a - b) + (b - c) \in U \Rightarrow a \sim c$.

Zu (ii):

Nein, wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, muss U nicht zwingend ein UVR sein. Dazu ein einfaches Gegenbeispiel. Betrachte $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-VR und $U := \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. U ist offensichtlich kein UVR, da die Menge nicht in Bezug aus Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Trotzdem ist die induzierte Relation eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: $\forall q \in \mathbb{Q} : q - q = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \sim q$

Symmetrie: Sei $p \sim q$. Dann $p - q \in \mathbb{Z} \Rightarrow q - p \in \mathbb{Z} \Rightarrow q \sim p$.

Transitivität: Seien $p \sim q, q \sim r$. Also $p - q, q - r \in \mathbb{Z} \Rightarrow p - q + q - r \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \sim r$.

Aufgabe 3

Sei $F := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}$ der $\mathbb{Q}$-VR bezüglich der üblichen Verknüpfungen.

(i) Sei $g_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $g_1(x) := x,\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Sei $g_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$g_2(x) := \begin{cases} 1/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist die Teilmenge $\{g_1, g_2\}$ von F linear unabhängig?

(ii) Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $f_q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gilt für die Teilmenge $M := \{f_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$, daß $[M] = F$?

Lösung

Zu (i):

Ja, die Menge $\{g_1, g_2\}$ ist linear unabhängig, denn sei eine beliebige LK gegeben, sodaß

$$\lambda g_1 + \mu g_2 = 0$$

Dann gilt insbesondere für

$x = 1$: $0 = \lambda g_1(1) + \mu g_2(1) = \lambda + \mu$ und

$x = 2$: $0 = \lambda g_1(2) + \mu g_2(2) = 2\lambda + 0,5\mu \equiv 4\lambda + \mu = 0$

einsetzen: $0 = 4\lambda - \lambda = 3\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \mu = 0$.

Zu (ii):

Nein, es gilt nicht $[M] = F$, da $[M]$ nur Vektoren enthält die an endlich vielen Stellen ungleich 0 sind (da $[M]$ die Menge aller endlichen Linearkombinationen aus M ist). Also fehlen in $[M]$ alle Funktionen, die sich an unendlich vielen Stellen von 0 unterscheiden. Insbesondere ist $f(q) = 1 \notin [M]$.

Aufgabe 4

Sei B eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathfrak{a}_1 \underset{B}{\longleftrightarrow} (0, 1, -1)$$

$$\mathfrak{a}_2 \underset{B}{\longleftrightarrow} (-1, 1, 0)$$

$$\mathfrak{a}_3 \underset{B}{\longleftrightarrow} (1, 0, 1)$$

(i) Man zeige, daß $A := \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Sei $\mathfrak{a} \underset{A}{\longleftrightarrow} (3, 1, -1)$. Man berechne die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ bzgl. der Basis B.

Lösung

Zu (i):

Es genügt lineare Unabhäüngigkeit der Koordinatenvektoren zu zeigen, da $dim(V) = 3$ durch Anzahl der Koordinaten gegeben. Also

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drei unabhängige Zeilen $\Rightarrow A$ ist eine Basis von V.

Zu (ii):

Durch einsetzen und sortieren:

$$\mathfrak{a} = 3a_1 + a_2 - a_3 = 3(b_2 - b_3) - b_1 + b_2 - b_1 - b_3 = -2b_1 + 4b_2 - 4b_3$$

In Koordinatenschreibweise:

$$\mathfrak{a} \underset{B}{\longleftrightarrow} (-2, 4, -4)$$