Anwesenheitsklausur zur Linearen Algebra I

Name:	Vorname:
Matr.Nr.:	Unterschrift:

Aufgabe	1	2	3	4	Punktesumme
Punkte					

Aufgabe 1

Entweder A oder B sei wahr. Ist dann die Implikation

$$((A \to B) \to C) \to (A \to (B \to C))$$

wahr?

Aufgabe 2

Sei U eine Teilmenge des K-Vektorraums V. Auf V sei eine Relation $\sim$ definiert durch

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a - b \in U, \qquad \forall\, a, b \in V$$

(i) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, falls U ein Unterraum von V ist?

(ii) Ist U ein Unterraum von V, falls $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist?

Aufgabe 3

Sei $F := \{f \mid f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}$ der $\mathbb{Q}$-VR bezüglich der üblichen Verknüpfungen.

(i) Sei $g_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch $g_1(x) := x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Sei $g_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$g_2(x) := \begin{cases} 1/x & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist die Teilmenge $\{g_1, g_2\}$ von F linear unabhängig?

(ii) Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $f_q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definiert durch

$$f_q(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Gilt für die Teilmenge $M := \{f_q \mid q \in \mathbb{Q}\}$, daß $[M] = F$?

Aufgabe 4 auf der Rückseite. $\hookrightarrow$

Aufgabe 4

Sei B eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ und

$$\mathfrak{a}_1 \underset{B}{\longleftrightarrow} (0,1,-1)$$

$$\mathfrak{a}_2 \underset{B}{\longleftrightarrow} (-1,1,0)$$

$$\mathfrak{a}_3 \underset{B}{\longleftrightarrow} (1,0,1)$$

(i) Man zeige, daß $A := \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ ist.

(ii) Sei $\mathfrak{a} \underset{A}{\longleftrightarrow} (3,1,-1)$. Man berechne die Koordinaten von $\mathfrak{a}$ bzgl. der Basis B.