Klausur Lineare Algebra I — Lösungen

(Klaus Altmann, FU Berlin, WS 2005/06)

Aufgabe 1. Sei $a := 17^{35} \in \mathbb{F}_{37}$. Diese Restklasse ist dann gleich zu

(i)	1	nein
(ii)	-1	nein
(iii)	17	nein
(iv)	$\frac{1}{17}$	ja

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $U, V \subseteq \mathbb{K}^5$ zwei dreidimensionale $\mathbb{K}$-Unterräume. Welche Dimensionen sind dann für $U \cap V$ möglich?

(i)	0	nein
(ii)	1	ja
(iii)	2	ja
(iv)	3	ja
(v)	4	nein
(vi)	5	nein
(vii)	das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab.	nein

Die Dimension von $U + V$

(viii)	ist durch $\dim(U \cap V)$ genau bestimmt	ja
(ix)	ist unabhängig von $\dim(U \cap V)$	nein

Aufgabe 3. Sei A eine (2×3)-Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Welche Werte sind für $\operatorname{rank} A$ möglich?

(i)	0	ja
(ii)	1	ja
(iii)	2	ja
(iv)	3	nein
(v)	4	nein
(vi)	5	nwin
(vii)	das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab.	nein

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $C_1 := \{(1,2), (3,2)\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Dann ist die Menge C_1

(i)	garantiert linear abhängig	nein
(ii)	garantiert linear unabhängig	nein
(iii)	das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab.	ja

Sei $C_2 := \{(1,1), (2,0), (0,2)\} \subseteq \mathbb{K}^2$. Dann ist die Menge C_2

(i)	garantiert linear abhängig	ja
(ii)	garantiert linear unabhängig	nein
(iii)	das hängt von $\operatorname{char} \mathbb{K}$ ab.	nein

Aufgabe 5. Sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Dann ist U komplementär zu $V \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

(i)	$V = 0$	nein
(ii)	$V = \mathbb{R}^4$	nein
(iii)	$V = \operatorname{span}\{(1,1,1,1)\}$	ja
(iv)	$V = \operatorname{span}\{(1,1,2,2)\}$	ja
(v)	$V = \operatorname{span}\{(1,1,-1,-1)\}$	nein
(vi)	$V = \operatorname{span}\{(1,1,1,1), (2,2,2,2)\}$	ja
(vii)	$V = \operatorname{span}\{(1,2,3,4), (0,1,1,1)\}$	nein

Aufgabe 6. Welche Werte kann das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma^2)$ annehmen, wenn σ die Permutationen durchläuft?
Lösung: sgn ist Gruppenhomomorphismus $S_n \to \{\pm 1\}$, damit $\operatorname{sgn}(\sigma^2) = \operatorname{sgn}(\sigma)^2 = 1$.

Aufgabe 7. Wie viele Elemente hat ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum?
Lösung: 81, denn ein 4-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{F}_3^4$.

Aufgabe 8. Unter welchen Bedingungen besitzt ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V einen Unterraum $U \subseteq V$ mit $\dim U = \dim V/U$?
Lösung: $2 | \dim V$ denn $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U) = 2\dim(U)$.

Aufgabe 9. a) Man finde eine nicht-triviale, $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
b) Man gebe eine nicht-triviale, $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{Q}^3/((1,2,3)\cdot\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ an.
c) Was ist $\dim \ker \psi$?
Lösung: a) $1 \mapsto 5$. b) Z.B. $(1,0,0) \mapsto -5$, $(0,1,0) \mapsto 1$, $(0,0,1) \mapsto 1$. c) 1.

Aufgabe 10. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $v, w \in V$ zwei *verschiedene* Vektoren. Man zeige, dass es dann ein $f \in V^*$ gibt mit $f(v) \neq f(w)$.
Man zeige an einem Beispiel, dass die entsprechende Aussage für Moduln über einem beliebigen Ring nicht mehr wahr sein muss.
Lösung: $v - w$ kann als Teil einer Basis gewählt werden, und dann kann man $(v - w) \mapsto 1$ linear fortsetzen. 0 und 1 aus dem $\mathbb{Z}$-Modul $M := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lassen sich nicht trennen.

Aufgabe 11. Sei $f : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ der Vektorraum-Endomorphismus $x^i \mapsto x^{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$. Sei $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ die Funktion, die jedem Polynom $g(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j x^j$ die Zahl $\varphi(g) := 3a_5 - a_0$ zuordnet. Man zeige, dass $\varphi \in \mathbb{K}[x]^*$ und berechne $f^*(\varphi)$.
Lösung: $f^*(\varphi) : \sum_j a_j x^j \mapsto 3a_4$.

Aufgabe 12. Seien $(\mathbb{B}_1, W_1)$, $(\mathbb{B}_2, W_2) \subseteq (\mathbb{A}, V)$ zwei affine Unterräume, so dass die Unterräume $W_i \subseteq V$ komplementär zueinander sind, d.h. es gilt $W_1 \oplus W_2 = V$. Man zeige, dass sich $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ in genau einem Punkt schneiden.
Lösung: Nach Basiswahl ergibt sich ein inhomogenes Gleichungssystem mit regulärer Koeffizientenmatrix.

Aufgabe 13. Sei $V := \mathbb{K}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2; weiter sei $\psi : V \to \mathbb{K}^2$ die Abbildung $p(x) \mapsto (p(1), p'(1))$.
a) Für die geordneten Basen $B := \{1,\, x-1,\, (x-1)^2\}$ von V und $K := \{(1,0),\, (0,1)\}$ von $\mathbb{K}^2$ berechne man die Matrix $M_{KB}(\psi)$.
b) Für $C := \{1,\, x+1,\, (x+1)^2\} \subseteq V$ berechne man die Basiswechselmatrix M_{BC}. Man errechne daraus dann $M_{KC}(\psi)$.
Lösung: $M_{KB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; wegen $(x+1)^2 = (x-1)^2 + 4(x-1) + 4$ gilt $M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und schließlich ist $M_{KC}(\psi) = M_{KB}(\psi)M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 14. Seien $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$ und $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid -x_2 = x_3 = x_4\}$. Man zeige, dass $\mathbb{Q}^4 = U \oplus V$ und zerlege so den Vektor $(2,4,6,8) \in \mathbb{Q}^4$ in seine U- und V-Komponente. Alternativ gebe man eine allgemeine Zerlegungsformel für einen Vektor (x,a,b,y) an.
Lösung: $U \cap V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Q}^4 \mid -x_2 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = 0$. Die Zerlegungsformel folgt nach Basiswahl und Invertierung der so gewonnenen (4×4)-Matrix. Oder: Aus $(a,b) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}) + (\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2})$ erkennt man leicht $(x,a,b,y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, ?) + (?, \frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2})$, also $(x,a,b,y) = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, y + \frac{a-b}{2}) + (x - \frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2})$. Insbesondere gilt $(2,4,6,8) = (5,5,5,7) + (-3,-1,1,1)$.