15 Klausur (Abschluß Lineare Algebra I)

SINV

Teil A: *3 Punkte* pro Aufgabe.

Aufgabe 15.1. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Wie berechnet sich $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ aus $\operatorname{sgn}(\sigma)$?

II

Lösung: $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$, da sgn ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 15.2. Man fasse $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und fixiere die Basis $\{1, i\}$. Welcher Matrix entspricht dann der Endomorphismus, der durch die Multiplikation mit i gegeben ist?

Lösung: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15.3. (Wie Übungsaufgabe 8.1.) Geben Sie alle ganzzahligen Lösungen (x, y) der Gleichung $17x + 13y = 1$ an.

Lösung: $17 = 13 + 4;\ 13 = 3 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 1 = 13 - 3 \cdot (17 - 13) = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17.$
$\Rightarrow x_k = -3 + 13k,\ \ y_k = 4 - 17k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 15.4. (Wie Übungsaufgabe 13.2) Welche Teilmengen von $\{e^1, e^2, e^3\}$ induzieren Basen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3/\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1, 2, 3)\}$?

DUALA

Lösung: $\{e^1, e^2\}$, $\{e^1, e^3\}$, $\{e^2, e^3\}$.

Aufgabe 15.5. Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Abbildung. Man bestimme den Kern der Abbildung $\varphi^* : (\mathbb{R}^3)^* \to (\mathbb{R}^2)^*$.

FAKT

Lösung: $\mathbb{R} \cdot (1, 1, -1)$.

Aufgabe 15.6. Man gebe zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ an, die im Faktorraum $\mathbb{R}^3/\operatorname{span}\{(2, -1, 5)\}$ abhängig werden. Geht es auch umgekehrt?

Lösung: Z.B. $\{(2, -1, 5), (1, 0, 0)\}$ oder auch $\{(2, 0, 5), (0, 1, 0)\}$

Teil B: *5 Punkte* pro Aufgabe.

Aufgabe 15.7. (Wie Übungsaufgabe 9.2) Sei $f : \mathbb{Z}/221\,\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/13\,\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/17\,\mathbb{Z}$ die Abbildung $x \mapsto (x, x)$.

a) Ist diese Abbildung injektiv/surjektiv/bijektiv?

b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{Z}/\,221\,\mathbb{Z}$ mit $f(x) = (5, 4)$.

Lösung: f ist bijektiv, da $221 = 13 \cdot 17$ und $\gcd(13, 17) = 1$.
Aus $1 = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$ folgt $f(-51) = f(-3 \cdot 17) = (1, 0)$ und $f(52) = f(4 \cdot 13) = (0, 1)$,
EULERPHI also $f(-47) = f(5 \cdot (-51) + 4 \cdot 52) = (5, 4)$.

Aufgabe 15.8. Man bestimme alle natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 4$.

Lösung: n muß von der Form $n = 2^a\,3^b\,5^c$ sein, da für alle anderen Primfaktoren p schon $p - 1 > 4$ gelten würde. Danach folgt $b, c \leq 1$, da 3 und 5 keine Teiler von 4
PRRG sind, und schließlich ergeben sich $n = 5, 8, 10, 12$.

Aufgabe 15.9. a) Man gebe die Elemente der primen Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ explizit an.

b) Ist diese Gruppe zyklisch?

SN *Lösung:* $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und diese Gruppe ist z.B. von 3 erzeugt.

Aufgabe 15.10. a) Man stelle die beiden Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

in Zyklenschreibweise dar.

b) Was ist das Signum dieser beiden Permutationen?

c) Sind σ und τ zueinander konjugiert?

Lösung: $\sigma = (1342)(576)$, $\tau = (1572)(346)$. $\mathrm{sgn}(k\text{–Zyklus}) = (-1)^{k-1}$, also $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^3 \cdot (-1)^2 = -1$. Beide Permutationen haben den selben Typ, sind also konjugiert zueinander.

Aufgabe 15.11. (Übungsaufgabe 12.5) Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper der Charakteristik p. Man zeige, daß dann $\#(\mathbb{K})$ eine p-Potenz ist.

Lösung: $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{K}$ macht $\mathbb{K}$ zu einem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Ist $\{b^1, \ldots, b^n\}$ eine Basis, dann
GLS3 hat $\mathbb{K}$ (wegen der eindeutigen Darstellbarkeit der Elemente) also p^n Elemente.

Aufgabe 15.12. (Wie Übungsaufgabe 10.4) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ x - y &= 1 \\ -x + y - z &= 0\ . \end{aligned}$$

Lösung: Nach Gauß ergibt sich die Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Damit gilt $x = y+1$ und $z = -1$ mit frei wählbarem Parameter y. Explizit ist also die Lösungsmenge
PI $H = \{(0,-1,-1),\ (1,0,-1),\ (-1,1,-1)\}$.

Aufgabe 15.13. Seien $B := \{e^1, e^2, e^3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die kanonische Basis und $C := \{e^1, e^3\} \subseteq \mathbb{R}^3/\operatorname{span}(1,1,1)$ eine Basis des Faktorraumes. Man bestimme die Abbildungsmatrix $M_{CB}(\pi)$.

LINF *Lösung:* $M_{CB}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15.14. Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(1,1) = (2,3), \quad f(-1,0) = (1,0), \quad f(3,1) = (s,t)?$$

Lösung: $(3,1) = (1,1) - 2(-1,0)$ erzwingt $f(3,1) = f(1,1) - 2f(-1,0) = (0,3)$,
LINU also $s = 0$ und $t = 3$.

Aufgabe 15.15. Für welche $t \in \mathbb{C}$ sind die Vektoren

a) $(1,t), (i+1,1) \in \mathbb{C}^2$

b) $(1,t), (i+1,1), (2,1) \in \mathbb{C}^2$

linear abhängig über $\mathbb{C}$?

Lösung: (a) $(1,t)$ müßte dann ein skalares Vielfaches von $(i+1,1)$ sein, d.h., $t = 1/(i+1) = (1-i)/2$.

(b) Drei Vektoren sind in zweidimensionalen Vektorräumen immer linear abhängig.

Teil C: *9 Punkte* pro Aufgabe.

Aufgabe 15.16. (Wie Übungsaufgabe 14.6) Seien

$$\begin{aligned} V_1 &= \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1,1,0), (0,-1,1), (1,0,1)\}; \\ V_2 &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Man berechne eine Basis von $V_1 \cap V_2$ und setze diese jeweils zu Basen von V_1 und V_2 fort. Ist die Vereinigung dieser Basen eine Basis von $V_1 + V_2$?

Lösung: Zeilenweises Eintragen der V_1-Erzeuger gibt die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Gauß liefert dann $\mathbb{R}\cdot(-1,1,1)$ als Kern, d.h., $V_1 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1+x_2+x_3 =$

$0\}$, also $V_1 \cap V_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Das Lösen dieses homogenen Gleichungssystems liefert z.B. die Basis $\{(1, -2, 3)\}$. Da V_1 und V_2 zweidimensional sind, erhält man deren Basen durch die jeweilige Hinzunahme von einem Vektor aus $V_i \setminus (V_1 \cap V_2)$. Beispielsweise $B_1 = \{(1, -2, 3), (1, 1, 0)\} \subseteq V_1$ und $B_2 = \{(1, -2, 3), (1, 0, -1)\} \subseteq V_2$. Dann ist $B_1 \cup B_2 = \{(1, -2, 3), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ eine Basis von $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

KERA,B **Teil D:** *7 Punkte* pro Aufgabe.

Aufgabe 15.17. Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{M}(3, 5; \mathbb{K})$ Matrizen, beide vom Rang 2. Man zeige, daß die Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ eine gemeinsame nichttriviale Lösung in $\mathbb{K}^5$ haben.

Lösung: $\dim(\ker \mathbf{A}) = 5 - \dim(\operatorname{im} \mathbf{A}) = 5 - \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = 3$. Selbiges gilt für $\mathbf{B}$, und damit folgt $\dim(\ker \mathbf{A} \cap \ker \mathbf{B}) = \dim(\ker \mathbf{A}) + \dim(\ker \mathbf{B}) - \dim(\ker \mathbf{A} + \ker \mathbf{B}) \geq$
EVAL $6 - 5 = 1$. Also enthält $\ker \mathbf{A} \cap \ker \mathbf{B}$ auch nicht-triviale Vektoren.

Aufgabe 15.18. Seien $\mathrm{ev}_k : \mathbb{K}[x]_{\leq 1} \to \mathbb{K}$ die Abbildungen $p(x) \mapsto p(k)$ für $k = 1, 2$. Man zeige, daß ev_1, ev_2 eine Basis von $\mathbb{K}[x]^*_{\leq 1}$ bilden und berechne deren duale Basis von $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$.

Lösung: ev_k ordnet jedem $p = ax + b \in \mathbb{K}[x]$ die Zahl $ak + b$ zu. Die gesuchte duale Basis $\{p_1, p_2\} \subseteq \mathbb{K}[x]_{\leq 1} = \mathbb{K}[x]^{**}_{\leq 1}$ erfüllt also $p_i(k) = \mathrm{ev}_k(p_i) = p_i(\mathrm{ev}_k) = \delta_{ik}$. Das führt auf die Gleichung

$$\begin{pmatrix} (k=)1 & 1 \\ (k=)2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Basis ist also $\{p_1(x) = -x + 2,\ p_2(x) = x - 1\}$.
Andere Lösung: Die kanonische (monomiale) Basis von $\mathbb{K}[x]_{\leq 1}$ induziert Isomorphien $\mathbb{K}[x]_{\leq 1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^2$ und $\mathbb{K}[x]^*_{\leq 1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^2$ (letztere durch die Benutzung der dualen Basis). Damit entsprechen die $(\mathrm{ev}_k \in \mathbb{K}[x]^*_{\leq 1}$ den Vektoren $(k, 1) \in \mathbb{K}^2$, und hiervon muß nun die duale Basis berechnet werden. Das geschieht über das zeilenweise Eintragen in eine Matrix, Invertieren und spaltenweises Auslesen des Ergebnisses. Letztlich
RSA ergibt sich also genau wieder die obige Gleichung.

Aufgabe 15.19. Man bestimme eine ganze Zahl d, so daß für alle $a \in \mathbb{Z}/31\,\mathbb{Z}$ gilt: $(a^{17})^d \equiv a\ (31)$.

Lösung: Gesucht ist ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $17 \cdot d \equiv 1\ (\varphi(31))$. Der Euklidische Algorithmus
FIBER liefert $d = 23$.

Aufgabe 15.20. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Sei $h \in H$ ein Element, von dem man weiß, daß die Faser $f^{-1}(h)$ aus genau fünf Elementen besteht. Man zeige, daß G dann eine zu $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppe enthält.

Lösung: $\#(\ker f) = \#(f^{-1}(h)) = 5$, also ist $\ker f \subseteq G$ eine Untergruppe mit fünf Elementen. Da 5 eine Primzahl ist, ist diese Gruppe automatisch zyklisch.